2005年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题卷（理工农医类）

数学试题（理工农医类）分选择题和非选择题两部分. 满分150分. 考试时间120分钟.

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案标号。
3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5．考试结束后，将试题卷和答题卡一并交回。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么P(A+B)=P(A)+P(B)

如果事件A、B相互独立，那么P(A·B)=P(A)·P(B)

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

第一部分（选择题 共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．圆$(x+2)^2+y^2=5$关于原点（0，0）对称的圆的方程为　　　　（　　）

A．$(x-2)^2+y^2=5$　　　　B．$x^2+(y-2)^2=5$

C．$(x+2)^2+(y+2)^2=5$　　　　D．$x^2+(y+2)^2=5$

2．$(\frac{1+i}{1-i})^{2005}=$　　　　（　　）

A．i　　B．$-i$　　C．2^{2005}　　D．-2^{2005}

3．若函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，在$(-\infty,0]$上是减函数，且$f(2)=0$，则使得$f(x)<0$的x的取值范围是　　　　（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　D．（－2，2）

4．已知A（3，1），B（6，1），C（4，3），D为线段BC的中点，则向量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{DA}$的夹角为

（　　）

A． $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}$　B． $\arccos\frac{4}{5}$　C． $\arccos(-\frac{4}{5})$　D． $-\arccos(-\frac{4}{5})$

5．若 x，y 是正数，则 $(x+\frac{1}{2y})^2+(y+\frac{1}{2x})^2$ 的最小值是　（　　）

A．3　B． $\frac{7}{2}$　C．4　D． $\frac{9}{2}$

6．已知 α 、 β 均为锐角，若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta), q:\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,则 p 是 q 的　（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

7．对于不重合的两个平面 α 与 β ，给定下列条件：

①存在平面 γ ，使得 α 、 β 都垂直于 γ ；

②存在平面 γ ，使得 α 、 β 都平行于 γ ；

③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等；

④存在异面直线 l、m，使得 $l//\alpha$ ， $l//\beta$ ， $m//\alpha$ ， $m//\beta$ ，

其中，可以判定 α 与 β 平行的条件有　（　　）

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

8．若 $(2x-\frac{1}{x})^n$ 展开式中含 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数之比为－5，则 n 等于　（　　）

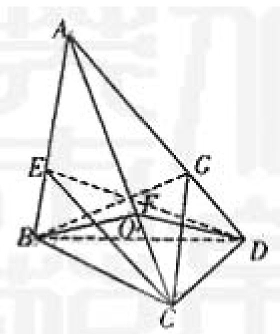
A．4　B．6　C．8　D．10

9．若动点（ x,y ）在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 上变化，则 x^2+2y 的最大值为　（　　）

A． $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4 & (0<b<4),\\ 2b & (b\geq 4)\end{cases}$　B． $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4 & (0<b<2),\\ 2b & (b\geq 2)\end{cases}$

C． $\frac{b^2}{4}+4$　D． $2b$

10．如图，在体积为 1 的三棱锥 A—BCD 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G， 使 AE : EB=AF : FC=AG : GD=2 : 1，记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点，则三棱锥 O—BCD 的体积等于　（　　）



A. $\dfrac{1}{9}$　　　　B. $\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{1}{7}$　　　　D. $\dfrac{1}{4}$

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填写在答题卡相应位置上.

11．集合 $A=\{x\in R\mid x^2-x-6<0\}, B=\{x\in \mathrm{R}\mid |x-2|<2\}$，则 $A\cap B=$________.

12．曲线 $y=x^3$ 在点 $(a,a^3)(a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{6}$，则 $a=$____________.

13．已知 α、β 均为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，则 $\tan\alpha=$____________.

14．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n}-3^{2n+1}}{2^{3n}+3^{2n}}=$______________.

15．某轻轨列车有 4 节车厢，现有 6 位乘客准备乘坐，设每一位乘客进入每节车厢是等可能的，则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0，1，2，3 的概率为____________.

16．连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是_________（填写所有正确选项的序号）.

①菱形　　　　②有 3 条边相等的四边形　　　　③梯形

④平行四边形　　　　⑤有一组对角相等的四边形

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 13 分）

若函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{4\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)}-a\sin\dfrac{x}{2}\cos(\pi-\dfrac{x}{2})$ 的最大值为 2，试确定常数 a 的值.

18.（本小题满分 13 分）

在一次购物抽奖活动中，假设某 10 张券中有一等奖券 1 张，可获价值 50 元的奖品；有二等奖券 3 张，每张可获价值 10 元的奖品；其余 6 张没有奖，某顾客从此 10 张券中任抽 2 张，求：

（Ⅰ）该顾客中奖的概率；

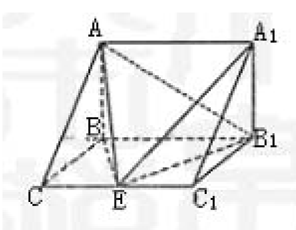
（Ⅱ）该顾客获得的奖品总价值 ξ（元）的概率分布列和期望 $E\xi$.

19.（本小题满分 13 分）

已知 $a\in R$，讨论函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+a+1)$ 的极值点的个数.

20.（本小题满分 13 分）

如图，在三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C，E 为棱 CC_1 上异于 C、C_1 的一点，EA



$\perp EB_1$，已知 AB=$\sqrt{2}$，BB_1=2，BC=1，$\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$，求：

（Ⅰ）异面直线 AB 与 EB_1 的距离；

（Ⅱ）二面角 A—EB_1—A_1 的平面角的正切值.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点，而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

（Ⅰ）求双曲线 C_2 的方程；

（Ⅱ）若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点，且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$（其中 O 为原点），求 k 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$且$a_{n+1}=(1+\dfrac{1}{n^2+n})a_n+\dfrac{1}{2^n}(n\geq 1)$.

（Ⅰ）用数学归纳法证明：$a_n\geq 2(n\geq 2)$；

（Ⅱ）已知不等式$\ln(1+x)<x$对$x>0$成立,证明:$a_n<e^2(n\geq 1)$，其中无理数 e=2.71828….

2005年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题卷（理工农医类）

一、选择题：每小题5分，满分50分.

1．A　2．A　3．D　4．C　5．C　6．B　7．B　8．B　9．A　10．C

二、填空题：每小题4分，满分24分.

11．$\{x\mid 0<x<3\}$　　12．± 1　　13．1　　14．－3　　15．$\dfrac{45}{128}$　16．②③⑤

三、解答题：满分76分.

17.（本小题13分）

$$\text{解}: f(x)=\frac{2\cos^2 x}{4\cos x}+a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{a}{2}\sin x$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4}}\sin(x+\varphi),\text{其中角}\varphi\text{满足}\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\text{由已知有}\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4}=4.$$

$$\text{解之得},a=\pm\sqrt{15}.$$

18.（本小题13分）

解法一：

（Ⅰ）$P=I-\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}=1-\dfrac{15}{45}=\dfrac{2}{3}$，即该顾客中奖的概率为$\dfrac{2}{3}$.

（Ⅱ）ξ的所有可能值为：0，10，20，50，60（元）.

$$\text{且}P(\xi=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3},P(\xi=10)=\frac{C_3^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(\xi=20)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15},P(\xi=50)=\frac{C_1^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

$$P(\xi=60)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}.$$

故ξ有分布列：

ξ	0	10	20	50	60
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

从而期望 $E\xi = 0\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{15}+50\times\frac{2}{15}+60\times\frac{1}{15}=16.$

解法二：

（Ⅰ）$P=\frac{(C_4^1C_6^1+C_4^2)}{C_{10}^2}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3},$

（Ⅱ）ξ 的分布列求法同解法一

由于 10 张券总价值为 80 元，即每张的平均奖品价值为 8 元，从而抽 2 张的平均奖品价值 $E\xi$ =2×8=16（元）.

19.（本小题 13 分）

解：$f'(x)=e^x(x^2+ax+a+1)+e^x(2x+a)$

$=e^x[x^2+(a+2)x+(2a+1)],$

令 $f'(x)=0$ 得 $x^2+(a+2)x+(2a+1)=0.$

（1）当 $\Delta=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a=a(a-4)>0.$

即 $a<0$ 或 $a>4$ 时，方程 $x^2+(a+2)x+(2a+1)=0$

有两个不同的实根 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

于是 $f'(x)=e^x(x-x_1)(x-x_2)$，从而有下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	↗	$f(x_1)$ 为极大值	↘	$f(x_2)$ 为极小值	↗

即此时 $f(x)$ 有两个极值点.

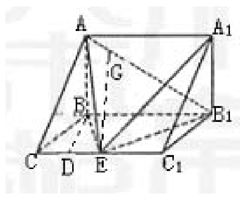
（2）当 $\Delta=0$ 即 $a=0$ 或 $a=4$ 时，方程 $x^2+(a+2)x+(2a+1)=0$ 有两个相同的实根 $x_1=x_2$

于是 $f'(x)=e^x(x-x_1)^2$

故当 $x<x_1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 无极值.

（3）当 $\Delta<0$，即 $0<a<4$ 时，$x^2+(a+2)x+(2a+1)>0,$

$f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+(2a+1)]>0$，故 $f(x)$ 为增函数，此时 $f(x)$ 无极值. 因此当



$a>4$或$a<0$时, $f(x)$有2个极值点,当$0\le a\le 4$时, $f(x)$无极值点.

20.（本小题 13 分）

解法一：

（Ⅰ）因 AB⊥面 BB_1C_1C，故 AB⊥BE.

又 EB_1⊥EA，且 EA 在面 BCC_1B_1 内的射影为 EB.

由三垂线定理的逆定理知 EB_1⊥BE，因此 BE 是异面直线

AB 与 EB_1 的公垂线，

在平行四边形 BCC_1B_1 中，设 EB=x，则 $EB_1=\sqrt{4-x^2}$，

作 BD⊥CC_1，交 CC_1 于 D，则 BD=BC・$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在△BEB_1 中，由面积关系得$\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,即$(x^2-1)(x^2-3)=0$.

解之得$x=\pm1, x=\pm\sqrt{3}$（负根舍去）

当$x=\sqrt{3}$时,在ΔBCE中,$CE^2+1^2-2CE\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3$,

解之得 CE=2，故此时 E 与 C_1 重合，由题意舍去 $x=\sqrt{3}$.

因此 x=1，即异面直线 AB 与 EB_1 的距离为 1.

（Ⅱ）过 E 作 EG//B_1A_1，则 GE⊥面 BCC_1B，故 GE⊥EB_1 且 GE 在圆 A_1B_1E 内，

又已知 AE⊥EB_1

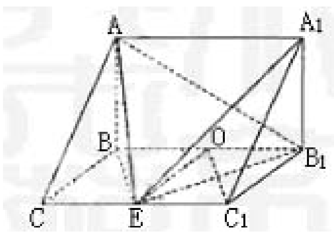
故∠AEG 是二面角 A—EB_1—A_1 的平面角.

因 EG//B_1A_1//BA，∠AEG=∠BAE，故$\tan AEG=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二：

（Ⅰ）由$AE\perp EB_1$,得$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$,又由$AB\perp$平面

而 BB_1C_1C 得 AB⊥EB_1 从而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB_1}$=0.



$$\begin{aligned}故\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB_1}&=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{EB_1}\\&=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0\end{aligned}$$

即$\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{EB_1}$,故线段$BE$是异面直线$AB$与$EB_1$的公垂线.

设 O 是 BB_1 的中点，连接 EO 及 OC_1，则在 Rt△BEB_1 中，EO=$\frac{1}{2}BB_1=OB_1$=1，

因为在△OB_1C_1中，$B_1C_1=1$，$\angle OB_1C_1=\dfrac{\pi}{3}$，故△$OB_1C_1$是正三角形，

所以 $OC_1=OB_1=1$，

又因$\angle OC_1E=\angle B_1C_1C-\angle B_1C_1O=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，故△$OC_1E$是正三角形，

所以 $C_1E=1$，故 CE=1，易见△BCE 是正三角形，从面 BE=1，

即异面直线 AB 与 EB_1 的距离是 1.

（Ⅱ）由（I）可得∠AEB 是二面角 A—EB_1—B 的平面角，在 Rt△ABE 中，由 AB=$\sqrt{2}$，

BE=1，得 tanAEB=$\sqrt{2}$.

又由已知得平面 A_1B_1E⊥平面 BB_1C_1C，

故二面角 A—EB_1—A_1 的平面角$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEB$，故

$$\tan\theta=\tan(\frac{\pi}{2}-\angle AEB)=\cot AEB=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解法三：

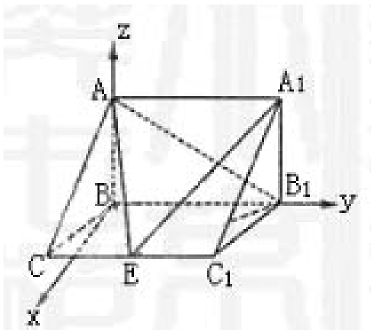
（I）以 B 为原点，$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{BA}$分别为 y、z 轴建立空间直角坐标系.

由于 BC=1，$BB_1=2$，AB=$\sqrt{2}$，$\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$，

在三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中有

B（0，0，0），A（0，0，$\sqrt{2}$），B_1（0，2，0），

$$C(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0),C_1(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$$



$$设E(\frac{\sqrt{3}}{2},a,0),由EA\perp EB_1,得\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,即$$

$$0=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-a,\sqrt{2})\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2},2-a,0)$$

$$=\frac{3}{4}+a(a-2)=a^2-2a+\frac{3}{4},$$

$$得(a-\frac{1}{2})(a-\frac{3}{2})=0,即a=\frac{1}{2}或a=\frac{3}{2}(舍去),故E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EB_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 0)=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0,即BE\perp EB_1.$$

又 AB⊥面 BCC_1B_1，故 AB⊥BE. 因此 BE 是异面直线 AB、EB_1 的公垂线，

则$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$，故异面直线 AB、$EB_1$ 的距离为 1.

（II）由已知有$\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EB_1},\overrightarrow{B_1A_1}\perp\overrightarrow{EB_1}$, 故二面角 A—$EB_1$—$A_1$ 的平面角θ的大小为向量

$\overrightarrow{B_1A_1}$与$\overrightarrow{EA}$的夹角.

因$\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(0,0,\sqrt{2}),\overrightarrow{EA}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}),$

故$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}}{|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{B_1A_1}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$

即$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

21.（本小题 12 分）

解：（Ⅰ）设双曲线 C_2 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则$a^2=4-1=3,$再由$a^2+b^2=c^2$得$b^2=1.$

故 C_2 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1.$

（II）将 $y=kx+\sqrt{2}$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得$(1+4k^2)x^2+8\sqrt{2}kx+4=0.$

由直线 l 与椭圆 C_1 恒有两个不同的交点得

$\Delta_1=(8\sqrt{2})^2k^2-16(1+4k^2)=16(4k^2-1)>0,$

即 $k^2>\frac{1}{4}.$ ①

将$y=kx+\sqrt{2}$代入$\frac{x^2}{3}-y^2=1$得$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$.

由直线 l 与双曲线 C_2 恒有两个不同的交点 A，B 得

$$\begin{cases}1-3k^2\neq0,\\ \Delta_2=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0.\end{cases}$$

即$k^2\neq\frac{1}{3}$且$k^2<1.$

设$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$,则$x_A + x_B = \dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}, x_A \cdot x_B = \dfrac{-9}{1-3k^2}$

由$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 6$得$x_A x_B + y_A y_B < 6$,而

$$\begin{aligned} x_A x_B + y_A y_B &= x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2}) \\ &= (k^2+1)x_A x_B + \sqrt{2}k(x_A + x_B) + 2 \\ &= (k^2+1)\cdot\frac{-9}{1-3k^2} + \sqrt{2}k \cdot \frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2} + 2 \\ &= \frac{3k^2+7}{3k^2-1}. \end{aligned}$$

于是$\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1} < 6$,即$\dfrac{15k^2-13}{3k^2-1} > 0$.解此不等式得

$k^2 > \dfrac{13}{15}$或$k^2 < \dfrac{1}{3}$. ③

由①、②、③得

$\dfrac{1}{4} < k^2 < \dfrac{1}{3}$或$\dfrac{13}{15} < k^2 < 1$.

故 k 的取值范围为$(-1,-\sqrt{\dfrac{13}{15}}) \cup (-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}) \cup (\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\sqrt{\dfrac{13}{15}},1)$

22.（本小题 12 分）

（Ⅰ）证明：（1）当 n=2 时，$a_2 = 2 \ge 2$，不等式成立.

（2）假设当$n = k(k \ge 2)$时不等式成立，即$a_k \ge 2(k \ge 2)$,

那么$a_{k+1} = (1+\dfrac{1}{k(k+1)})a_k + \dfrac{1}{2^k} \ge 2$． 这就是说，当$n = k+1$时不等式成立.

根据（1）、（2）可知：$a_k \ge 2$对所有$n \ge 2$成立.

（Ⅱ）证法一：

由递推公式及（Ⅰ）的结论有 $a_{n+1} = (1+\dfrac{1}{n^2+n})a_n + \dfrac{1}{2^n} \le (1+\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{1}{2^n})a_n.(n \ge 1)$

两边取对数并利用已知不等式得 $\ln a_{n+1} \le \ln(1+\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{1}{2^n}) + \ln a_n$

$\le \ln a_n + \dfrac{1}{n^2+n} + \dfrac{1}{2^n}$. 故$\ln a_{n+1} - \ln a_n \le \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{2^n} \quad (n \ge 1)$.

上式从 1 到$n-1$求和可得

$$\ln a_n-\ln a_1\le\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{2^n}<2.$$

即 $\ln a_n<2,$ 故 $a_n<e^2\qquad(n\ge1).$

（Ⅱ）证法二：

由数学归纳法易证 $2^n>n(n-1)$ 对 $n\ge2$ 成立，故

$$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n^2+n})a_n+\frac{1}{2^n}<(1+\frac{1}{n(n-1)}a_n+\frac{1}{n(n-1)}\qquad(n\ge2).$$

令 $b_n=a_n+1\qquad(n\ge2),$ 则 $b_{n+1}\le(1+\frac{1}{n(n-1)})b_n\qquad(n\ge2).$

取对数并利用已知不等式得 $\ln b_{n+1}\le\ln(1+\frac{1}{n(n-1)})+\ln b_n$

$$\le\ln b_n+\frac{1}{n(n-1)}\qquad(n\ge2).$$

上式从 2 到 n 求和得 $\ln b_{n+1}-\ln b_2\le\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<1.$$

因 $b_2=a_2+1=3.$ 故 $\ln b_{n+1}<1+\ln3,b_{n+1}<e^{1+\ln3}=3e\qquad(n\ge2).$

故 $a_{n+1}<3e-1<e^2,n\ge2,$ 又显然 $a_1<e^2,a_2<e^2,$ 故 $a_n<e^2$ 对一切 $n\ge1$ 成立.