绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）

文科数学

注意事项:

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题.
2. 考生领到试卷后，须按规定在试卷上填写姓名、准考证号，并在答题卡上填涂对应的试卷类型信息.
3. 所有解答必须填写在答题卡上指定区域内. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(共 50 分)

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. 设全集为 R，函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 的定义域为 M，则 $C_{\mathbf{R}}M$ 为

(A) $(-\infty,1)$　　(B) $(1,+\infty)$　　(C) $(-\infty,1]$　　(D) $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $a=(1,m),b=(m,2)$，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则实数 m 等于

(A) $-\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{2}$

(C) $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$　　(D) 0

3. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数，则下列等式中恒成立的是

(A) $\log_a b\cdot\log_c b=\log_c a$　　(B) $\log_a b\cdot\log_a a=\log_a b$

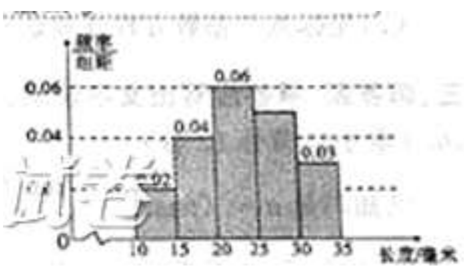
(C) $\log_a(bc)=\log_a b\cdot\log_a c$　　(D) $\log_a(b+c)=\log_a b+\log_a c$

4. 根据下列算法语句，当输入 x 为 60 时，输出 y 的值为

```
输入 x
If x≤50 Then
    y = 0.5 * x
Else
        y = 25 + 0.6*(x-50)
End  If
输出 y
```

(A) 25
(B) 30
(C) 31
(D) 61

4. 对一批产品的长度(单位：毫米)进行抽样检测，下图为检测结果的频率分布直方图. 根据标准，产品长度在区间[20,25)上为一等品，在区间[15,20)和区间[25,30)上为二等品，在区间[10,15)和[30,35)上为三等品. 用频率估计概率，现从该批产品中随机抽取 1 件，则其为二等品的概率为



(A) 0.09　　(B) 0.20　　(C) 0.25　　(D) 0.45

6. 设 z 是复数，则下列命题中的假命题是

(A) 若 $z^2\ge 0$，则 z 是实数　　(B) 若 $z^2<0$，则 z 是虚数

(C) 若 z 是虚数，则 $z^2\ge 0$　　(D) 若 z 是纯虚数，则 $z^2<0$

7. 若点(x,y)位于曲线 $y = |x|$与 $y = 2$ 所围成的封闭区域，则 $2x-y$ 的最小值为

(A) -6　　(B) -2　　(C) 0　　(D) 2

8. 已知点 $M(a,b)$在圆 $O: x^2+y^2=1$外，则直线 $ax + by = 1$ 与圆 O 的位置关系是

(A) 相切　　(B) 相交　　(C) 相离　　(D) 不确定

9 设△ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC 的形状为

(A) 直角三角形　　(B) 锐角三角形　　(C) 钝角三角形　　(D) 不确定

10. 设$[x]$表示不大于 x 的最大整数，则对任意实数 x,有

(A) $[-x] =-[x]$　　(B) $[x+\frac{1}{2}] = [x]$

(C) $[2x] = 2[x]$　　(D) $[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的离心率为________.

12. 某几何体的三视图如图所示，则其表面积为________.

13. 观察下列等式:

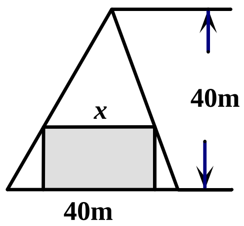
$(1+1)=2\times 1$

$(2+1)(2+2)=2^2\times 1\times 3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times 1\times 3\times 5$

…

照此规律，第 n 个等式可为________.

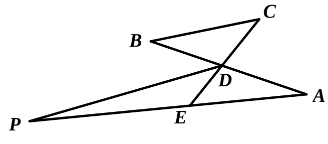


14. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x 为________(m).

15. (考生请注意:请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分)

A. (不等式选做题) 设 a，$b\in R$，$|a-b|>2$，则关于实数 x 的不等式 $|x-a|+|x-b|>2$ 的解集是______.

B. (几何证明选做题) 如图，AB 与 CD 相交于点 E，过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线相交于点 P. 已知 $\angle A=\angle C$，$PD = 2DA = 2$，则 $PE =$ ______.



C. (坐标系与参数方程选做题) 圆锥曲线 $\begin{cases}x=t^2\\y=2t\end{cases}$ (t 为参数)的焦点坐标是____________ .

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

16. (本小题满分 12 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,-\frac{1}{2}),\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x),x\in \boldsymbol{R}$，设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$的最小正周期.

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

17. (本小题满分 12 分)

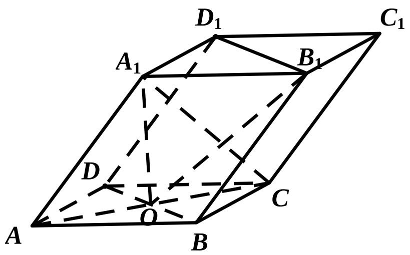
设 S_n 表示数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

(Ⅰ) 若$\{a_n\}$为等差数列, 推导 S_n 的计算公式;

(Ⅱ) 若 $a_1=1, q\neq 0$, 且对所有正整数 n, 有 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}$. 判断$\{a_n\}$是否为等比数列.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, O 为底面中心, $A_1O\perp$平面 $ABCD$, $AB=AA_1=\sqrt{2}$.



(Ⅰ) 证明: A_1BD // 平面 CD_1B_1;

(Ⅱ) 求三棱柱 $ABD-A_1B_1D_1$ 的体积.

19. (本小题满分 12 分)

有 7 位歌手(1 至 7 号)参加一场歌唱比赛, 由 500 名大众评委现场投票决定歌手名次, 根据年龄将大众评委分为 5 组, 各组的人数如下:

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50

(Ⅰ) 为了调查评委对 7 位歌手的支持状况, 现用分层抽样方法从各组中抽取若干评委, 其中从 B 组中抽取了 6 人. 请将其余各组抽取的人数填入下表.

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数		6			

(Ⅱ) 在(Ⅰ)中, 若 A, B 两组被抽到的评委中各有 2 人支持 1 号歌手, 现从这两组被抽到的评委中分别任选 1 人, 求这 2 人都支持 1 号歌手的概率.

20. (本小题满分 13 分)

已知动点 $M(x,y)$到直线 l:$x = 4$ 的距离是它到点 $N(1,0)$的距离的 2 倍.

(Ⅰ) 求动点 M 的轨迹 C 的方程;

(Ⅱ) 过点 $P(0,3)$的直线 m 与轨迹 C 交于 A, B 两点. 若 A 是 PB 的中点, 求直线 m 的斜率.

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x, x\in \boldsymbol{R}$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$的反函数的图象上图象上点(1,0)处的切线方程;

(Ⅱ) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$有唯一公共点.

(Ⅲ) 设 $a<b$, 比较 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小, 并说明理由.

参考答案

1.B 2. C 3. B 4. C 5. D 6. C 7. A 8. B 9. A 10. D

11. $\frac{5}{4}$

12. 3π

13. $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots(2n-1)$

14. 20

15. $(-\infty,+\infty)$

B $\sqrt{6}.$

C (1, 0)

16【解】 $f(x)=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\cos x\cdot\sqrt{3}\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$。

最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

所以 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$, 最小正周期为 π。

(Ⅱ) 当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$, 由标准函数$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上的图像知,.

$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[f(-\frac{\pi}{6}),f(\frac{\pi}{2})]=[-\frac{1}{2},1]$.

所以，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为 $1,-\frac{1}{2}$.

17【解】(Ⅰ) 设公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d$

$$\begin{cases}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\\S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1\end{cases}\Rightarrow 2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_1)+(a_n+a_1)$$

$$\Rightarrow 2S_n=n(a_1+a_n)\Rightarrow S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n(a_1+\frac{n-1}{2}d).$$

(Ⅱ) $a_1=1$, $q\neq0$,由题知$q\neq1$。

$$\forall n\in N^*,\ S_n=\frac{1-q^n}{1-q}\Rightarrow a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n-q^{n+1}}{1-q}=q^n$$

$$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\q^{n-1} & n\geq2\end{cases}\Rightarrow a_n=q^{n-1},\ n\in N^*.$$

所以,数列$\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$,公比 $q\neq1$ 的等比数列。

18【解】 (Ⅰ) 设 B_1D_1线段的中点为O_1.

$\because BD$和B_1D_1是$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对应棱$\therefore BD//B_1D_1$.

同理,$\because AO$和A_1O_1是棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对应线段

$\therefore AO//A_1O_1$且$AO//OC\Rightarrow A_1O_1//OC$且$A_1O_1=OC\Rightarrow$四边形$A_1OCO_1$为平行四边形

$\Rightarrow A_1O//O_1C.$且$A_1O\cap BD=O,O_1C\cap B_1D_1=O_1\Rightarrow$面$A_1BD//$面$CD_1B_1$.(证毕)

(Ⅱ) $\because A_1O\perp$面$ABCD\therefore A_1O$是三棱柱$A_1B_1D_1-ABD$的高.

在正方形 AB CD 中,AO = 1 . 在$RT\Delta A_1OA$中，$A_1O=1.$

三棱柱$A_1B_1D_1-ABD$的体积$V_{A_1B_1D_1-ABD}=S_{\Delta ABD}\cdot A_1O=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1=1$.

所以，三棱柱$A_1B_1D_1-ABD$的体积$V_{A_1B_1D_1-ABD}=1$.

19【解】（Ⅰ）按相同的比例从不同的组中抽取人数。

从 B 组 100 人中抽取 6 人，即从 50 人中抽取 3 人，从 100 人中抽取 6 人，从 100 人中抽取 9 人。

(Ⅱ) A 组抽取的 3 人中有 2 人支持 1 号歌手，则从 3 人中任选 1 人，支持支持 1 号歌手的概率为$\frac{2}{3}$·

B 组抽取的 6 人中有 2 人支持 1 号歌手，则从 6 人中任选 1 人，支持支持 1 号歌手的概率为$\frac{2}{6}$·

现从抽样评委 A 组 3 人,B 组 6 人中各自任选一人，则这 2 人都支持 1 号歌手的概率$P=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$.

所以，从 A,B 两组抽样评委中，各自任选一人，则这 2 人都支持 1 号歌手的概率为$\frac{2}{9}$.

20.【解】（Ⅰ）点 M(x,y)到直线 x=4 的距离,是到点 N(1,0)的距离的 2 倍，则

$$|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

所以，动点 M 的轨迹为 椭圆，方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(Ⅱ) P(0, 3)，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由题知:$2x_1=0+x_2,2y_1=3+y_2$

椭圆 的上下顶点坐标分别是$(0,\sqrt{3})$和$(0,-\sqrt{3})$,经检验直线 m 不经过这 2 点，即直线 m 斜率 k 存在。

设直线m方程为:$y=kx+3$.联立椭圆和直线方程，整理得：

$$(3+4k^2)x^2+24kx+24=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-24k}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{24}{3+4k^2}$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}+2\Rightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{(-24k)^2}{(3+4k^2)\cdot 24}=\frac{9}{2}\Rightarrow k=\pm\frac{3}{2}$$

所以，直线 m 的斜率$k=\pm\frac{3}{2}$

21. 【答案】(Ⅰ) y = x+ 1.

当 m $\in(0,\frac{e^2}{4})$时，有 0 个公共点；当 m=$\frac{e^2}{4}$，有 1 个公共点；当 m $\in(\frac{e^2}{4},+\infty)$有 2 个公共点；

(III) $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ > $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(Ⅱ)(Ⅰ) f (x)的反函数$g(x)=\ln x$，则 y=g(x)过点（1,0）的切线斜率 k=$g'(1)$.

$g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow k=g'(1)=1$. 过点（1,0）的切线方程为：y = x+ 1

(Ⅱ) 证明曲线 y=f(x)与曲线$y=\frac{1}{2}x^2+x+1$有唯一公共点，过程如下。

令$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2-x-1=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1,x\in R$,则

$h'(x)=e^x-x-1,h'(x)$的导数$h''(x)=e^x-1$,且$h(0)=0$，$h'(0)=0,,h''(0)=0$

因此，

当$x<0$时$h''(x)<0\Rightarrow y=h'(x)$单调递减;当$x>0$时$h''(x)>0\Rightarrow y=h'(x)$单调递增

$\Rightarrow y=h'(x)\ge h'(0)=0$,所以$y=h(x)$在$R$上单调递增，最多有一个零点$x=0$

所以，曲线 y=f(x) 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 只有唯一公共点(0, 1).（证毕）

（III）设 $\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b-a+2)\cdot f(a)+(b-a-2)\cdot f(b)}{2\cdot(b-a)}$

$=\frac{(b-a+2)\cdot e^a+(b-a-2)\cdot e^b}{2\cdot(b-a)}=\frac{(b-a+2)+(b-a-2)\cdot e^{b-a}}{2\cdot(b-a)}\cdot e^a$

令 $g(x)=x+2+(x-2)\cdot e^x, x>0,$ 则 $g'(x)=1+(1+x-2)\cdot e^x=1+(x-1)\cdot e^x$ 。

$g'(x)$ 的导函数 $g''(x)=(1+x-1)\cdot e^x=x\cdot e^x>0,$ 所以 $g'(x)$ 在（$0,+\infty$）上单调递增，且 $g'(0)=0.$ 因此 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(0)=0,$

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $g(x)>0$ 。