

2018 年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅲ卷)数学文

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x-1\geq 0\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$

- A. $\{0\}$
- B. $\{1\}$
- C. $\{1, 2\}$
- D. $\{0, 1, 2\}$

解析：∵ $A=\{x|x-1\geq 0\}=\{x|x\geq 1\}$, $B=\{0, 1, 2\}$,
 ∴ $A\cap B=\{x|x\geq 1\}\cap\{0, 1, 2\}=\{1, 2\}$.

答案：C

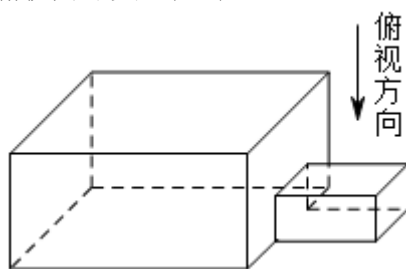
2. $(1+i)(2-i)=(\quad)$

- A. $-3-i$
- B. $-3+i$
- C. $3-i$
- D. $3+i$

解析： $(1+i)(2-i)=3+i$.

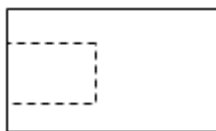
答案：D

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来. 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是()



- A.
- B.
- C.
- D.

解析：由题意可知，如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，小的长方体，是榫头，从图形看出，轮廓是长方形，内含一个长方形，并且一条边重合，另外 3 边是虚线，所以木构件的俯视图是 A.



答案: A

4. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

解析: $\because \sin\alpha = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

答案: B

5. 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45, 既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15, 则不用现金支付的概率为 ()

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.6

D. 0.7

解析: 某群体中的成员只用现金支付, 既用现金支付也用非现金支付, 不用现金支付, 是互斥事件,

所以不用现金支付的概率为: $1 - 0.45 - 0.15 = 0.4$.

答案: B

6. 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 ()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. 2π

解析: 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

答案: C

7. 下列函数中, 其图象与函数 $y = \ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的是 ()

A. $y = \ln(1-x)$

B. $y = \ln(2-x)$

C. $y = \ln(1+x)$

D. $y = \ln(2+x)$

解析：首先根据函数 $y=\ln x$ 的图象，

则：函数 $y=\ln x$ 的图象与 $y=\ln(-x)$ 的图象关于 y 轴对称。

由于函数 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称。

则：把函数 $y=\ln(-x)$ 的图象向右平移 2 个单位即可得到： $y=\ln(2-x)$ 。

即所求得解析式为： $y=\ln(2-x)$ 。

答案：B

8. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴， y 轴交于 A, B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是()

A. $[2, 6]$

B. $[4, 8]$

C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

解析：∵ 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴， y 轴交于 A, B 两点，

∴ 令 $x=0$ ，得 $y=-2$ ，令 $y=0$ ，得 $x=-2$ ，

∴ $A(-2, 0)$ ， $B(0, -2)$ ， $|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ ，

∵ 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，∴ 设 $P(2+\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ ，

∴ 点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离：

$$d = \frac{|2 + \sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 4|}{\sqrt{2}}$$

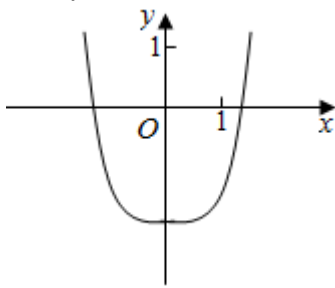
$$\because \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [-1, 1], \therefore d = \frac{|2\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 4|}{\sqrt{2}} \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}],$$

∴ $\triangle ABP$ 面积的取值范围是：

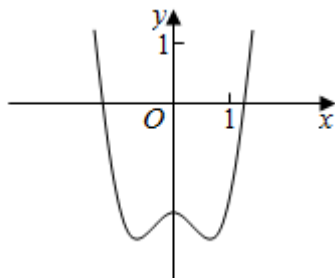
$$[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}, \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}] = [2, 6].$$

答案：A

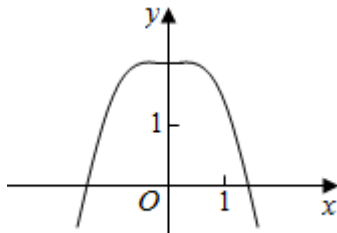
9. 函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图象大致为()



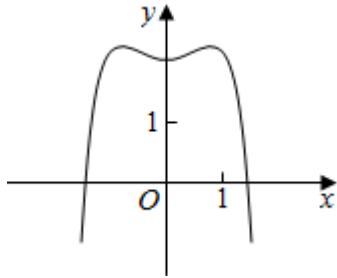
A.



B.



C.



D.

解析：函数过定点(0, 2)，排除A, B.

函数的导数 $f'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$,

由 $f'(x) > 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) < 0$,

得 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，此时函数单调递增，排除C.

答案：D

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$ ，则点(4, 0)到C的渐近线的距离为()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{2}$

解析：双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$ ，

可得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，即： $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2$ ，解得 $a = b$ ，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的渐近线方程为： $y = \pm x$ ，

点(4, 0)到C的渐近线的距离为： $\frac{|\pm 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 。

答案：D

11. $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$ ，则C=()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

解析: $\because \triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c.

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$,

$\therefore \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} = \cos C$,

$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{4}$.

答案: C

12. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 D - ABC 体积的最大值为 ()

A. $12\sqrt{3}$

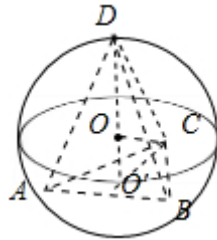
B. $18\sqrt{3}$

C. $24\sqrt{3}$

D. $54\sqrt{3}$

解析: $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 = 9\sqrt{3}$, 解得 $AB=6$,

球心为 O, 三角形 ABC 的外心为 O' , 显然 D 在 $O'O$ 的延长线与球的交点如图:



$O'C = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 2\sqrt{3}$, $OO' = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$,

则三棱锥 D - ABC 高的最大值为: 6,

则三棱锥 D - ABC 体积的最大值为: $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^3 = 18\sqrt{3}$.

答案: B

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$. 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\lambda = \underline{\quad}$.

解析: \because 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$,

$\therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$,

$\because \vec{c} = (1, \lambda)$, $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$,

$\therefore \frac{1}{4} = \frac{\lambda}{2}$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

答案: $\frac{1}{2}$

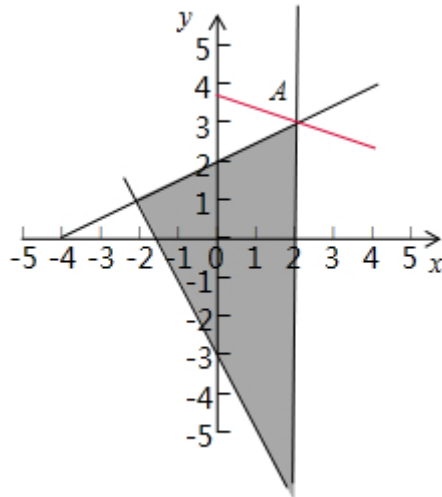
14. 某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异. 为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是_____.

解析：某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异，为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是分层抽样.

答案：分层抽样

15. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y + 3 \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + \frac{1}{3}y$ 的最大值是_____.

解析：画出变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y + 3 \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域如图：



由 $\begin{cases} x=2 \\ x-2y+4=0 \end{cases}$ 解得 $A(2, 3)$.

$z = x + \frac{1}{3}y$ 变形为 $y = -3x + 3z$ ，作出目标函数对应的直线，

当直线过 $A(2, 3)$ 时，直线的纵截距最小， z 最大，

最大值为 $2 + 3 \times \frac{1}{3} = 3$.

答案：3

16. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$ ， $f(a) = 4$ ，则 $f(-a) =$ _____.

解析：函数 $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

满足 $g(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -g(x)$ ，

所以 $g(x)$ 是奇函数.

函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$,

可得 $f(a) = 4 = \ln(\sqrt{1+a^2} - a) + 1$, 可得 $\ln(\sqrt{1+a^2} - a) = 3$,

则 $f(-a) = -\ln(\sqrt{1+a^2} - a) + 1 = -3 + 1 = -2$.

答案: -2

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答. (一) 必考题: 共 60 分.

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 63$, 求 m .

解析: (1) 利用等比数列通项公式列出方程, 求出公比 $q = \pm 2$, 由此能求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 当 $a_1 = 1$, $q = -2$ 时, $S_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}$, 由 $S_m = 63$, 得 $S_m = \frac{1 - (-2)^m}{3} = 63$, $m \in \mathbb{N}$, 无解; 当

$a_1 = 1$, $q = 2$ 时, $S_n = 2^n - 1$, 由此能求出 m .

答案: (1) \because 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

$\therefore 1 \times q^4 = 4 \times (1 \times q^2)$,

解得 $q = \pm 2$,

当 $q = 2$ 时, $a_n = 2^{n-1}$,

当 $q = -2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}$,

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为, $a_n = 2^{n-1}$, 或 $a_n = (-2)^{n-1}$.

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

当 $a_1 = 1$, $q = -2$ 时, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$,

由 $S_m = 63$, 得 $S_m = \frac{1 - (-2)^m}{3} = 63$, $m \in \mathbb{N}$, 无解;

当 $a_1 = 1$, $q = 2$ 时, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$,

由 $S_m = 63$, 得 $S_m = 2^m - 1 = 63$, $m \in \mathbb{N}$,

解得 $m = 6$.

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人. 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间(单位: min)绘制了如下茎叶图:

第一种生产方式										第二种生产方式									
									8	6	5	5	6	8	9				
								9	7	6	2	7	0	1	2	2	3	4	5
								9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	8	1
								2	1	1	0	0	9	0					

(1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;

(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m , 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
--	--------	---------

第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据(2)中的列联表, 能否有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析: (1) 根据茎叶图中的数据判断第二种生产方式的工作时间较少些, 效率更高;

(2) 根据茎叶图中的数据计算它们的中位数, 再填写列联表;

(3) 列联表中的数据计算观测值, 对照临界值得出结论.

答案: (1) 根据茎叶图中的数据知,

第一种生产方式的工作时间主要集中在 70~92 之间,

第二种生产方式的工作时间主要集中在 65~90 之间,

所以第二种生产方式的工作时间较少些, 效率更高;

(2) 这 40 名工人完成生产任务所需时间按从小到大的顺序排列后,

排在中间的两个数据是 79 和 81, 计算它们的中位数为 $m = \frac{79+81}{2} = 80$;

由此填写列联表如下;

	超过 m	不超过 m	总计
第一种生产方式	15	5	20
第二种生产方式	5	15	20
总计	20	20	40

(3) 根据(2)中的列联表, 计算

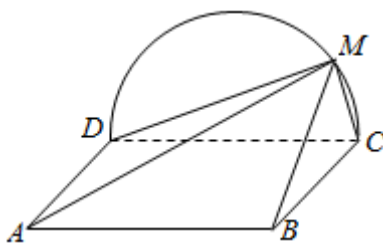
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{40 \times (15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635,$$

\therefore 能有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

19. 如图, 矩形 ABCD 所在平面与半圆弧 CD 所在平面垂直, M 是 CD 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 AMD \perp 平面 BMC;

(2) 在线段 AM 上是否存在点 P, 使得 MC \parallel 平面 PBD? 说明理由.



解析: (1) 通过证明 $CD \perp AD$, $CD \perp DM$, 证明 $CD \perp$ 平面 AMD, 然后证明平面 AMD \perp 平面 BMC;

(2) 存在 P 是 AM 的中点, 利用直线与平面平行的判断定理说明即可.

答案: (1) 证明: 矩形 ABCD 所在平面与半圆弦 CD 所在平面垂直, 所以 $AD \perp$ 半圆弦 CD 所在平面, $CM \subset$ 半圆弦 CD 所在平面,

$\therefore CM \perp AD$,

M 是 CD 上异于 C, D 的点. $\therefore CM \perp DM$, $DM \cap AD = D$, $\therefore CD \perp$ 平面 AMD, $CD \subset$ 平面 CMB,

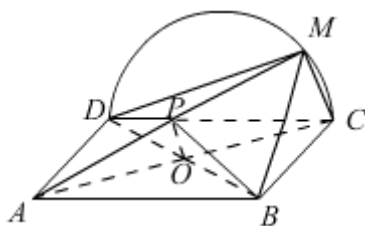
\therefore 平面 AMD \perp 平面 BMC;

(2) 解: 存在 P 是 AM 的中点,

理由:

连接 BD 交 AC 于 O, 取 AM 的中点 P, 连接 OP, 可得 $MC \parallel OP$, $MC \not\subset$ 平面 BDP, $OP \subset$ 平面 BDP,

所以 $MC \parallel$ 平面 PBD .



20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$, 证明: $2|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}|$.

解析: (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 利用点差法得 $6(x_1 - x_2) + 8m(y_1 - y_2) = 0$,
 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{8m} = -\frac{3}{4m}$, 又点 $M(1, m)$ 在椭圆内, 即 $\frac{1}{4} + \frac{m^2}{3} < 1$, ($m > 0$), 解得 m 的取值范围, 即可得 $k < -\frac{1}{2}$,

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$, 可得 $x_1 + x_2 = 2$

由 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$, 可得 $x_3 - 1 = 0$, 由椭圆的焦半径公式得则 $|FA| = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1$, $|FB| = 2 - \frac{1}{2}x_2$, $|FP| = 2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}$. 即可证明 $|FA| + |FB| = 2|FP|$.

答案: (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

\because 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$,

$\therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2m$

将 A, B 代入椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中, 可得

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \\ 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12 \end{cases}$$

两式相减可得, $3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

即 $6(x_1 - x_2) + 8m(y_1 - y_2) = 0$,

$$\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{8m} = -\frac{3}{4m}$$

点 $M(1, m)$ 在椭圆内, 即 $\frac{1}{4} + \frac{m^2}{3} < 1$, ($m > 0$),

解得 $0 < m < \frac{3}{2}$

$$\therefore k = \frac{3}{4m} < -\frac{1}{2}$$

(2) 证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$,

可得 $x_1 + x_2 = 2$

$\because \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$, $F(1, 0)$, $\therefore x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 = 0$,

$\therefore x_3 = 1$

由椭圆的焦半径公式得则 $|FA| = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1$, $|FB| = 2 - \frac{1}{2}x_2$, $|FP| = 2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}$.

$$\text{则 } |FA| + |FB| = 4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3,$$

$$\therefore |FA| + |FB| = 2|FP|,$$

21. 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

解析: (1) $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}$

由 $f'(0)=2$, 可得切线斜率 $k=2$, 即可得到切线方程.

(2) 可得 $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$. 可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,$

$-\frac{1}{a}$), $(2, +\infty)$ 递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 递增, 注意到 $a \geq 1$ 时, 函数 $g(x) = ax^2 + x - 1$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 且 $g(2) = 4a + 1 > 0$

只需 $f(x)_{\min} = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e$, 即可.

答案: (1) $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$.

$\therefore f'(0)=2$, 即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线斜率 $k=2$,

\therefore 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 2x$.

即 $2x - y - 1 = 0$ 为所求.

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 的定义域为: \mathbb{R} ,

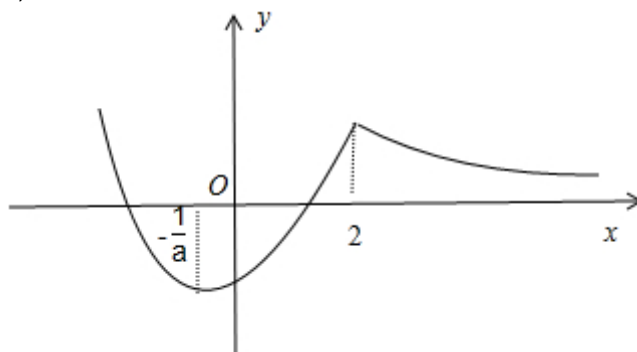
可得 $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$.

令 $f'(x)=0$, 可得 $x_1=2, x_2=-\frac{1}{a} < 0$,

当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (-\frac{1}{a}, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(2, +\infty)$ 递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 递增,

注意到 $a \geq 1$ 时, 函数 $g(x) = ax^2 + x - 1$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 且 $g(2) = 4a + 1 > 0$
函数 $g(x)$ 的图象如下:



$\because a \geq 1, \therefore \frac{1}{a} \in (0, 1],$ 则 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e,$

$\therefore f(x)_{\min} = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e,$

\therefore 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0.$

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$, (θ 为参数), 过点 $(0, -\sqrt{2})$

且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

解析: (1) $\odot O$ 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r=1$, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 l 的

方程为 $x=0$, 成立; 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为

$y = \tan \alpha \cdot x + \sqrt{2}$, 从而圆心 $O(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} < 1$, 进而求出

$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, 由此能求出 α 的取值范围.

(2) 设直线 l 的方程为 $x = m(y + \sqrt{2})$, 联立 $\begin{cases} x = m(y + \sqrt{2}) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, 得

$(m^2 + 1)y^2 + \sqrt{2} \cdot 2m^2 y + 2m^2 - 1 = 0$, 由此利用韦达定理、中点坐标公式能求出 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

答案: (1) $\because \odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

$\therefore \odot O$ 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r=1$,

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $x=0$, 成立;

当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $y = \tan \alpha \cdot x + \sqrt{2}$,

\therefore 倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点,

\therefore 圆心 $O(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} < 1$,

$\therefore \tan^2 \alpha > 1, \therefore \tan \alpha > 1$ 或 $\tan \alpha < -1$,

$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$,

综上 α 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

(2) 由(1)知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = m(y + \sqrt{2})$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = m(y + \sqrt{2}) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 + 1)y^2 + 2\sqrt{2}m^2y + 2m^2 - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m^2}{m^2 + 1} \\ y_1 y_2 = \frac{2m^2 - 1}{m^2 + 1} \end{cases},$$

$$x_1 + x_2 = m(y_1 + \sqrt{2}) + m(y_2 + \sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}m^3}{m^2 + 1} + 2\sqrt{2}m,$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\sqrt{2}m}{m^2 + 1}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2 + 1},$$

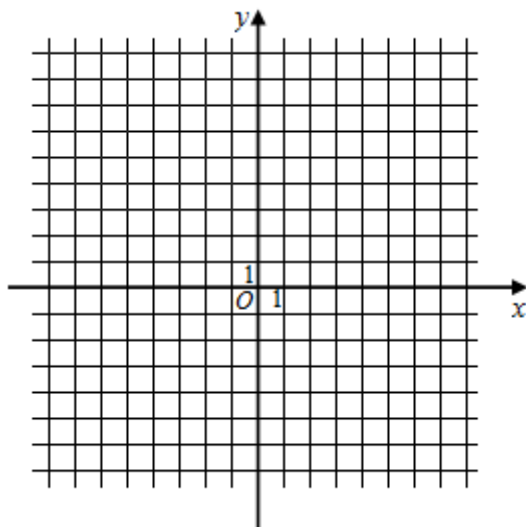
$$\therefore \text{AB 中点 P 的轨迹的参数方程为} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{\sqrt{2}m^2}{m^2 + 1} \end{cases}, \text{ (m 为参数), } (-1 < m < 1).$$

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 设函数 $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



解析: (1) 利用分段函数的性质将函数表示为分段函数形式进行作图即可.

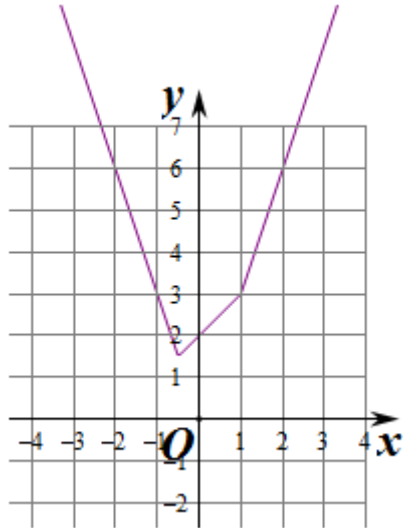
(2) 将不等式恒成立转化为图象关系进行求解即可.

答案: (1) 当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -(2x+1) - (x-1) = -3x$,

当 $-\frac{1}{2} < x < 1$, $f(x) = (2x+1) - (x-1) = x+2$,

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = (2x+1) + (x-1) = 3x$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2, & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases} \text{ 对应的图象为:}$$



画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax+b$,

当 $x=0$ 时, $f(0)=2 \leq 0 \cdot a+b$, $\therefore b \geq 2$,

当 $x>0$ 时, 要使 $f(x) \leq ax+b$ 恒成立,

则函数 $f(x)$ 的图象都在直线 $y=ax+b$ 的下方或在直线上,

$\therefore f(x)$ 的图象与 y 轴的交点的纵坐标为 2,

且各部分直线的斜率的最大值为 3,

故当且仅当 $a \geq 3$ 且 $b \geq 2$ 时, 不等式 $f(x) \leq ax+b$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立,

即 $a+b$ 的最小值为 5.

