

一、选择题（共10小题，每小题3分，满分30分）

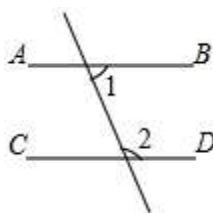
1.  $a$  的相反数是（ ）

- A.  $|a|$
- B.  $\frac{1}{a}$
- C.  $-a$
- D.  $\sqrt{a}$

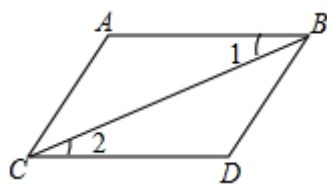
解析： $a$  的相反数是 $-a$ 。故选：C.

答案：C

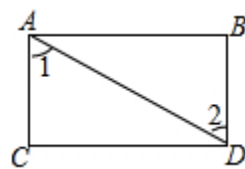
2. 下列图形中，由 $\angle 1 = \angle 2$  能得到  $AB \parallel CD$  的是（ ）



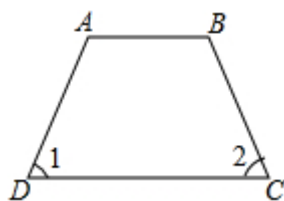
A.



B.

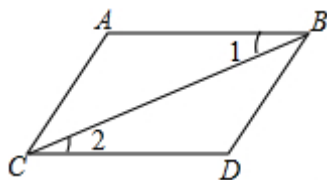


C.



D.

解析：如图所示：



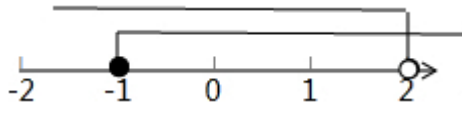
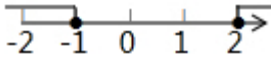
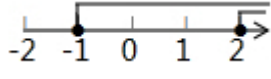
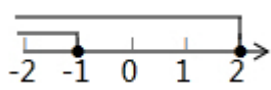
$\because \angle 1 = \angle 2$  (已知),

$\therefore AB \parallel CD$  (内错角相等, 两直线平行),

故选 B.

答案：B

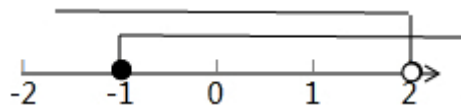
3. 不等式组  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$  的解集在数轴上表示正确的是 ( )

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析：不等式组  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$  的解集是：

$$-1 \leq x < 2,$$

$\therefore$  不等式组  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$  的解集在数轴上表示为：



故选 A.

答案：A

4. 计算  $3.8 \times 10^7 - 3.7 \times 10^7$ ，结果用科学记数法表示为 ( )

A.  $0.1 \times 10^7$

B.  $0.1 \times 10^6$

C.  $1 \times 10^7$

D.  $1 \times 10^6$

解析：  $3.8 \times 10^7 - 3.7 \times 10^7$

$$= (3.8 - 3.7) \times 10^7$$

$$= 0.1 \times 10^7$$

$$= 1 \times 10^6$$

故选：D

答案：D

5. 下列选项中，显示部分在总体中所占百分比的统计图是（ ）

- A. 扇形图
- B. 条形图
- C. 折线图
- D. 直方图

解析：根据统计图的特点进行分析可得：扇形统计图表示的是部分在总体中所占的百分比，但一般不能直接从图中得到具体的数据；折线统计图表示的是事物的变化情况；条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目。在进行数据描述时，要显示部分在总体中所占的百分比，应采用扇形统计图。

故选：A

答案：A

6. 计算 $a \cdot a^{-1}$ 的结果为（ ）

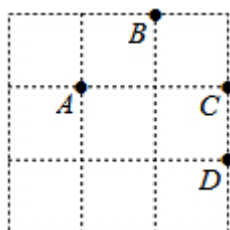
- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D.  $-a$

解析： $a \cdot a^{-1} = a^0 = 1$

故选：C

答案：C

7. 如图，在 $3 \times 3$ 的正方形网格中由四个格点A，B，C，D，以其中一点为原点，网格线所在直线为坐标轴，建立平面直角坐标系，使其余三个点中存在两个点关于一条坐标轴对称，则原点是（ ）



- A. A 点
- B. B 点
- C. C 点
- D. D 点

解析：当以点B为原点时，

A (-1, -1), C (1, -1),

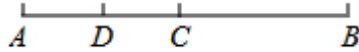
则点A和点C关于y轴对称，

符合条件，

故选：B

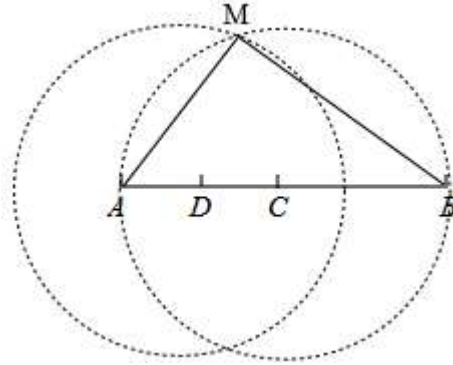
答案：B

8. 如图，C，D分别是线段AB，AC的中点，分别以点C，D为圆心，BC长为半径画弧，两弧交于点M，测量 $\angle AMB$ 的度数，结果为（ ）



- A.  $80^\circ$
- B.  $90^\circ$
- C.  $100^\circ$
- D.  $105^\circ$

解析：如图，



AB 是以点 C 为圆心，BC 长为半径的圆的直径，  
 因为直径对的圆周角是  $90^\circ$  ，  
 所以  $\angle AMB=90^\circ$  ，  
 所以测量  $\angle AMB$  的度数，结果为  $90^\circ$  。

故选：B.

答案：B

9. 若一组数据 1, 2, 3, 4, x 的平均数与中位数相同，则实数 x 的值不可能是 ( )
- A. 0
  - B. 2.5
  - C. 3
  - D. 5

解析：(1) 将这组数据从小到大的顺序排列为 1, 2, 3, 4, x，  
 处于中间位置的数是 3，

$\therefore$  中位数是 3，

平均数为  $(1+2+3+4+x) \div 5$ ，

$\therefore 3 = (1+2+3+4+x) \div 5$ ，

解得  $x=5$ ；符合排列顺序；

(2) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, 2, 3, x, 4，  
 中位数是 3，

此时平均数是  $(1+2+3+4+x) \div 5=3$ ，

解得  $x=5$ ，不符合排列顺序；

(3) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, x, 2, 3, 4，  
 中位数是 2，

平均数  $(1+2+3+4+x) \div 5=2$ ，

解得  $x=0$ ，不符合排列顺序；

(4) 将这组数据从小到大的顺序排列后 x, 1, 2, 3, 4，  
 中位数是 2，

平均数  $(1+2+3+4+x) \div 5=2$ ，

解得  $x=0$ ，符合排列顺序；

(5) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, 2,  $x$ , 3, 4,

中位数,  $x$ ,

平均数  $(1+2+3+4+x) \div 5=x$ ,

解得  $x=2.5$ ，符合排列顺序；

$\therefore x$  的值为 0、2.5 或 5.

故选 C.

答案: C

10. 已知一个函数图象经过 (1, -4), (2, -2) 两点, 在自变量  $x$  的某个取值范围内, 都有函数值  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则符合上述条件的函数可能是 ( )

A. 正比例函数

B. 一次函数

C. 反比例函数

D. 二次函数

解析: 设一次函数解析式为:  $y=kx+b$ ,

$$\text{由题意得, } \begin{cases} k+b=-4 \\ 2k+b=-2 \end{cases}$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k=2 \\ b=-6 \end{cases}$$

$\therefore k>0$ ,

$\therefore y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore$  A、B 错误,

设反比例函数解析式为:  $y = \frac{k}{x}$ ,

由题意得,  $k=-4$ ,

$k<0$ ,

$\therefore$  在每个象限,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore$  C 错误,

当抛物线开口向上,  $x>1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

故选: D.

答案: D

## 二、填空题 (共 6 小题, 满分 24 分)

11. 分解因式  $a^2-9$  的结果是\_\_\_\_\_.

解析: 直接运用平方差公式分解:  $a^2-9=(a+3)(a-3)$ .

答案:  $(a+3)(a-3)$

12. 计算  $(x-1)(x+2)$  的结果是\_\_\_\_\_.

解析: 根据多项式乘以多项式的法则, 可表示为  $(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$ , 则,

$$(x-1)(x+2)$$

$$=x^2+2x-x-2$$

$$= x^2 + x - 2.$$

答案:  $x^2 + x - 2$

13. 一个反比例函数图象过点 A (-2, -3), 则这个反比例函数的解析式是\_\_\_\_\_.

解析: 设这个反比例函数解析式为  $y = \frac{k}{x}$ ,

$$\therefore \frac{k}{-2} = -3,$$

解得  $k=6$ ,

$\therefore$  这个反比例函数的解析式是  $y = \frac{6}{x}$ .

答案:  $y = \frac{6}{x}$

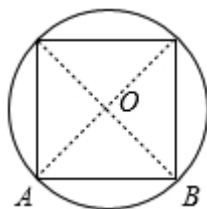
14. 一组数据: 2015, 2015, 2015, 2015, 2015, 2015 的方差是\_\_\_\_\_.

解析: 方差是用来衡量一组数据波动大小的量. 数据 2015, 2015, 2015, 2015, 2015, 2015 全部相等, 没有波动, 故其方差为 0.

答案: 0

15. 一个工件, 外部是圆柱体, 内部凹槽是正方体, 如图所示, 其中, 正方体一个面的四个顶点都在圆柱底面的圆周上, 若圆柱底面周长为  $2\pi$  cm, 则正方体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

解析: 该几何体的俯视图如图:



$\therefore$  圆柱底面周长为  $2\pi$  cm,

$\therefore OA=OB=1$  cm,

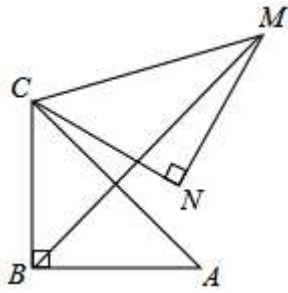
$\therefore \angle AOB=90^\circ$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{2} OA = \sqrt{2},$$

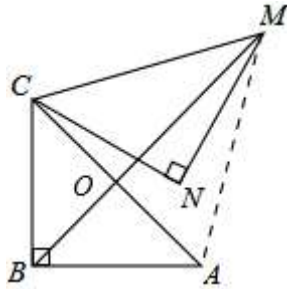
$\therefore$  该正方体的体积为  $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ ,

答案:  $2\sqrt{2}$

16. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $AB=BC=\sqrt{2}$ , 将  $\triangle ABC$  绕点 C 逆时针旋转  $60^\circ$ , 得到  $\triangle MNC$ , 连接 BM, 则 BM 的长是\_\_\_\_\_.



解析：如图，连接 AM，



由题意得：CA=CM， $\angle ACM=60^\circ$ ，  
 $\therefore \triangle ACM$  为等边三角形，  
 $\therefore AM=CM$ ， $\angle MAC=\angle MCA=\angle AMC=60^\circ$ ；  
 $\because \angle ABC=90^\circ$ ， $AB=BC=\sqrt{2}$ ，  
 $\therefore AC=2=CM=2$ ，  
 $\because AB=BC$ ， $CM=AM$ ，  
 $\therefore BM$  垂直平分  $AC$ ，  
 $\therefore BO=\frac{1}{2}AC=1$ ， $OM=CM \cdot \sin 60^\circ =\sqrt{3}$ ，  
 $\therefore BM=BO+OM=1+\sqrt{3}$ ，

答案： $1+\sqrt{3}$

### 三、解答题（共 10 小题，满分 96 分）

17. 计算： $(-1)^{2015} + \sin 30^\circ + (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$  .

解析：运用-1 的奇次方等于-1， $30^\circ$  角的正弦等于  $\frac{1}{2}$ ，结合平方差公式进行计算.

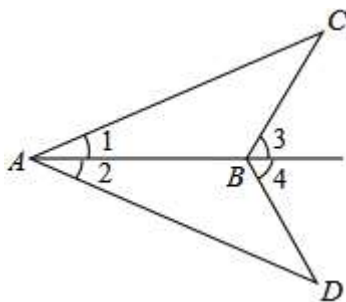
答案：原式 $=-1+\frac{1}{2}+4-3$   
 $=\frac{1}{2}$

18. 化简： $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}$  .

解析：根据同分母分式的减法法则计算，再根据完全平方公式展开，合并同类项后约分计算即可求解.

答案: 
$$\begin{aligned} & \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

19. 如图,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , 求证:  $AC = AD$ .



解析: 先证出  $\angle ABC = \angle ABD$ , 再由 ASA 证明  $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ , 得出对应边相等即可.

答案:  $\because \angle 3 = \angle 4$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle ABD$ ,

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  中, 
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AB = AB \\ \angle ABC = \angle ABD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$  (ASA),

$\therefore AC = AD$ .

20. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$  有两个相等的实数根, 求  $m$  的值.

解析: 先根据一元二次方程有两个相等的实数根得出  $\Delta = 0$  即可得到关于  $m$  的方程, 解方程求出  $m$  的值即可.

答案:  $\because x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$  有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2m-1)^2 - 4 \times 4 = 0,$$

解得  $m = -\frac{3}{2}$  或  $m = \frac{5}{2}$ .

21. 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛, 其中每支篮球队 10 人, 每支排球队 12 人, 每名运动员只能参加一项比赛. 问: 篮球、排球队各有多少支?

解析: 设篮球队有  $x$  支, 排球队有  $y$  支, 根据共有 48 支队, 520 名运动员建立方程组求出其解即可.

答案: 设篮球队有  $x$  支, 排球队有  $y$  支, 由题意, 得

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ 10x + 12y = 520 \end{cases},$$



解得：  $\begin{cases} x=28 \\ y=20 \end{cases}$ .

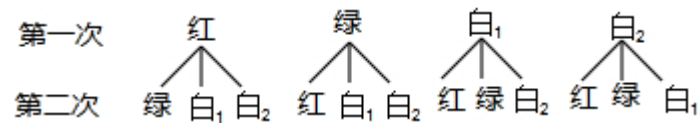
答：篮球队有 28 支，排球队有 20 支.

22. 一个不透明袋子中有 1 个红球，1 个绿球和  $n$  个白球，这些球除颜色外无其他差别.

(1) 当  $n=1$  时，从袋中随机摸出 1 个球，摸到红球和摸到白球的可能性是否相同？（在答题卡相应位置填“相同”或“不相同”）；

(2) 从袋中随机摸出一个球，记录其颜色，然后放回，大量重复该实验，发现摸到绿球的频率稳定于 0.25，则  $n$  的值是\_\_\_\_\_；

(3) 在一个摸球游戏中，所有可能出现的结果如下：



根据树状图呈现的结果，求两次摸出的球颜色不同的概率.

解析：(1) 因为红球和白球的个数一样，所以被摸到的可能性相同；

(2) 根据摸到绿球的频率稳定于 0.25，即可求出  $n$  的值；

(3) 根据树状图即可求出两次摸出的球颜色不同的概率.

答案：(1) 当  $n=1$  时，红球和白球的个数一样，所以被摸到的可能性相同，

答案：相同；

(2)  $\because$  摸到绿球的频率稳定于 0.25，

$$\therefore \frac{1}{1+1+n} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore n=2,$$

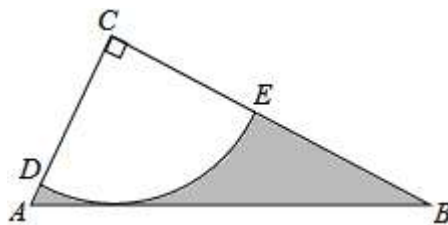
答案：2

(3) 由树状图可知，共有 12 种结果，其中两次摸出的球颜色不同的 10 种，

$$\text{所以其概率} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

23. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=\sqrt{5}$ ， $\tan B=\frac{1}{2}$ ，半径为 2 的  $\odot C$ ，分别交  $AC$ ， $BC$  于

点  $D$ ， $E$ ，得到  $\widehat{DE}$ .



(1) 求证：AB 为  $\odot C$  的切线；

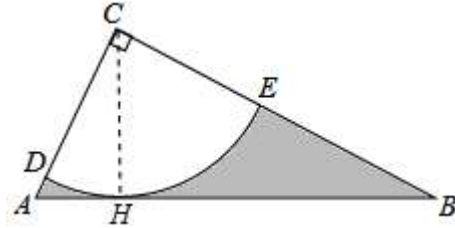
(2) 求图中阴影部分的面积.

解析：(1) 过点  $C$  作  $CH\perp AB$  于  $H$ ，如图，先在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，利用正切的定义计算出  $BC=2AC=2$

$\sqrt{5}$ ，再利用勾股定理计算出  $AB=5$ ，接着利用面积法计算出  $CH=2$ ，则可判断  $CH$  为  $\odot C$  的半径，然后根据切线的判定定理即可得到  $AB$  为  $\odot C$  的切线；

(2) 根据三角形面积公式和扇形的面积公式，利用  $S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ACB}-S_{\text{扇形 CDE}}$  进行计算即可。

答案：(1) 证明：过点  $C$  作  $CH \perp AB$  于  $H$ ，如图，



在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\because \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore BC = 2AC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5,$$

$$\because \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot BC,$$

$$\therefore CH = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2,$$

$\because \odot C$  的半径为 2，

$\therefore CH$  为  $\odot C$  的半径，

而  $CH \perp AB$ ，

$\therefore AB$  为  $\odot C$  的切线；

(2) 解：  $S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ACB} - S_{\text{扇形 CDE}}$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 - \frac{90 \cdot \pi \cdot 2^2}{360}$$

$$= 5 - \pi.$$

24. 定义：长宽比为  $\sqrt{n} : 1$  ( $n$  为正整数) 的矩形称为  $\sqrt{n}$  矩形。

下面，我们通过折叠的方式折出一个  $\sqrt{2}$  矩形，如图①所示。

操作 1：将正方形  $ABCD$  沿过点  $B$  的直线折叠，使折叠后的点  $C$  落在对角线  $BD$  上的点  $G$  处，折痕为  $BH$ 。

操作 2：将  $AD$  沿过点  $G$  的直线折叠，使点  $A$ ，点  $D$  分别落在边  $AB$ ， $CD$  上，折痕为  $EF$ 。

则四边形  $BCEF$  为  $\sqrt{2}$  矩形。

证明：设正方形  $ABCD$  的边长为 1，则  $BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 。

由折叠性质可知  $BG = BC = 1$ ， $\angle AFE = \angle BFE = 90^\circ$ ，则四边形  $BCEF$  为矩形。

$$\therefore \angle A = \angle BFE.$$

$$\therefore EF \parallel AD.$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{BF}{AB}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BF}{1}.$$

$$\therefore BF = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore BC : BF = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1.$$

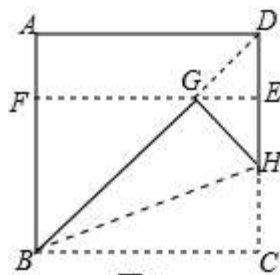
$\therefore$  四边形 BCEF 为  $\sqrt{2}$  矩形.

阅读以上内容, 回答下列问题:

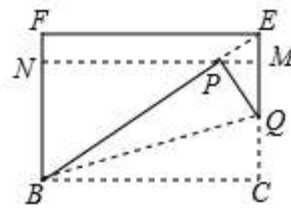
(1) 在图①中, 所有与 CH 相等的线段是 \_\_\_\_\_,  $\tan \angle HBC$  的值是 \_\_\_\_\_;

(2) 已知四边形 BCEF 为  $\sqrt{2}$  矩形, 模仿上述操作, 得到四边形 BCMN, 如图②, 求证: 四边形 BCMN 是  $\sqrt{3}$  矩形;

(3) 将图②中的  $\sqrt{3}$  矩形 BCMN 沿用 (2) 中的方式操作 3 次后, 得到一个 “ $\sqrt{n}$  矩形”, 则 n 的值是 \_\_\_\_\_.



图①



图②

解析: (1) 由折叠即可得到  $DG=GH=CH$ , 设  $HC=x$ , 则有  $DG=GH=x$ ,  $DH=\sqrt{2}x$ , 根据  $DC=DH+CH=1$ , 就可求出  $HC$ , 然后运用三角函数的定义即可求出  $\tan \angle HBC$  的值;

(2) 只需借鉴阅读中证明 “四边形 BCEF 为  $\sqrt{2}$  矩形” 的方法就可解决问题;

(3) 同 (2) 中的证明可得: 将  $\sqrt{3}$  矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个 “ $\sqrt{4}$  矩形”, 将  $\sqrt{4}$  矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个 “ $\sqrt{5}$  矩形”, 将  $\sqrt{5}$  矩形沿用

(2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个 “ $\sqrt{6}$  矩形”, 由此就可得到 n 的值.

答案: : (1) 由折叠可得:

$$DG=HG, GH=CH,$$

$$\therefore DG=GH=CH.$$

设  $HC=x$ , 则  $DG=GH=x$ .

$$\because \angle DGH=90^\circ, \therefore DH=\sqrt{2}x,$$

$$\therefore DC=DH+CH=\sqrt{2}x+x=1,$$

解得  $x = \sqrt{2} - 1$ .

$$\therefore \tan \angle HBC = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1.$$

答案: GH、DG、 $\sqrt{2}-1$ ;

$$(2) \because BC=1, EC=BF=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{EC^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

由折叠可得  $BP=BC=1$ ,  $\angle FNM = \angle BNM = 90^\circ$ ,  $\angle EMN = \angle CMN = 90^\circ$ .

$\therefore$  四边形 BCEF 是矩形,

$$\therefore \angle F = \angle FEC = \angle C = \angle FBC = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形 BCMN 是矩形,  $\angle BNM = \angle F = 90^\circ$ ,

$\therefore MN \parallel EF$ ,

$$\therefore \frac{BP}{BE} = \frac{BN}{BF}, \text{ 即 } BP \cdot BF = BE \cdot BN,$$

$$\therefore 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} BN,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore BC : BN = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 1,$$

$\therefore$  四边形 BCMN 是  $\sqrt{3}$  的矩形;

(3) 同理可得:

将  $\sqrt{3}$  矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{4}$  矩形”,

将  $\sqrt{4}$  矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{5}$  矩形”,

将  $\sqrt{5}$  矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{6}$  矩形”,

所以将图②中的  $\sqrt{3}$  矩形 BCMN 沿用 (2) 中的方式操作 3 次后, 得到一个“ $\sqrt{6}$  矩形”,

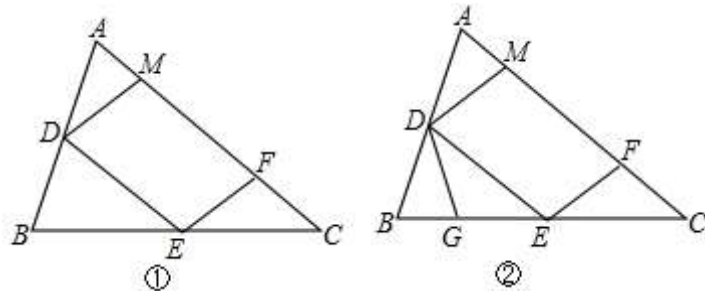
故答案为 6.

25. 如图①, 在锐角  $\triangle ABC$  中, D, E 分别为 AB, BC 中点, F 为 AC 上一点, 且  $\angle AFE = \angle A$ ,  $DM \parallel EF$  交 AC 于点 M.

(1) 求证:  $DM = DA$ ;

(2) 点 G 在 BE 上, 且  $\angle BDG = \angle C$ , 如图②, 求证:  $\triangle DEG \sim \triangle ECF$ ;

(3) 在图②中, 取 CE 上一点 H, 使  $\angle CFH = \angle B$ , 若  $BG = 1$ , 求 EH 的长.

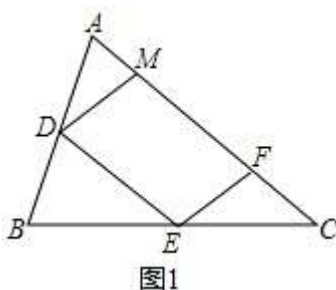


解析：（1）证明 $\angle A = \angle DMA$ ，用等角对等边即可证明结论；

（2）由D、E分别是AB、BC的中点，可知 $DE \parallel AC$ ，于是 $\angle BDE = \angle A$ ， $\angle DEG = \angle C$ ，又 $\angle A = \angle AFE$ ， $\angle AFE = \angle C + \angle FEC$ ，根据等式性质得 $\angle FEC = \angle GDE$ ，根据有两对对应角相等的两三角形相似可证；

（3）通过证明 $\triangle BDG \sim \triangle BED$ 和 $\triangle EFH \sim \triangle ECF$ ，可得 $BG \cdot BE = EH \cdot EC$ ，又 $BE = EC$ ，所以 $EH = BG = 1$ 。

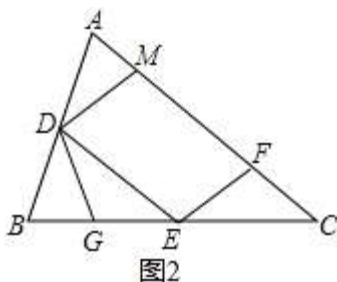
答案：（1）证明：如图1所示，



$\because DM \parallel EF$ ，  
 $\therefore \angle AMD = \angle AFE$ ，  
 $\because \angle AFE = \angle A$ ，  
 $\therefore \angle AMD = \angle A$ ，  
 $\therefore DM = DA$ ；

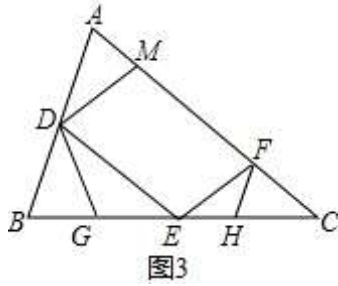
（2）证明：如图2所示，

$\because$  D、E分别是AB、BC的中点，



$\therefore DE \parallel AC$ ，  
 $\therefore \angle BDE = \angle A$ ， $\angle DEG = \angle C$ ，  
 $\because \angle AFE = \angle A$ ，  
 $\therefore \angle BDE = \angle AFE$ ，  
 $\therefore \angle BDG + \angle GDE = \angle C + \angle FEC$ ，  
 $\because \angle BDG = \angle C$ ，  
 $\therefore \angle DGE = \angle FEC$ ，  
 $\therefore \triangle DEG \sim \triangle ECF$ ；

（3）解：如图3所示，



$\because \angle BDG = \angle C = \angle DEB, \angle B = \angle B,$

$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BED,$

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BG}{BD},$$

$$\therefore BD^2 = BG \cdot BE,$$

$\because \angle AFE = \angle A, \angle CFH = \angle B,$

$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \angle AFE - \angle CFH = \angle FEH,$

又  $\because \angle FEH = \angle CEF,$

$\therefore \triangle EFH \sim \triangle ECF,$

$$\therefore \frac{EH}{EF} = \frac{EF}{EC},$$

$$EF^2 = EH \cdot EC,$$

$\because DE \parallel AC, DM \parallel EF,$

$\therefore$  四边形 DEFM 是平行四边形,

$\therefore EF = DM = DA = BD,$

$\therefore BG \cdot BE = EH \cdot EC,$

$\because BE = EC,$

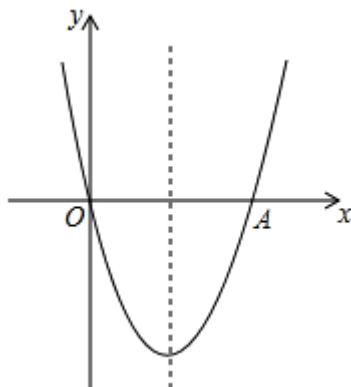
$\therefore EH = BG = 1.$

26. 如图, 抛物线  $y = x^2 - 4x$  与  $x$  轴交于  $O, A$  两点,  $P$  为抛物线上一点, 过点  $P$  的直线  $y = x + m$  与对称轴交于点  $Q$ .

(1) 这条抛物线的对称轴是 \_\_\_\_\_, 直线  $PQ$  与  $x$  轴所夹锐角的度数是 \_\_\_\_\_;

(2) 若两个三角形面积满足  $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAQ}$ , 求  $m$  的值;

(3) 当点  $P$  在  $x$  轴下方的抛物线上时, 过点  $C(2, 2)$  的直线  $AC$  与直线  $PQ$  交于点  $D$ , 求:  
①  $PD + DQ$  的最大值; ②  $PD \cdot DQ$  的最大值.



解析：

(1) 把抛物线的解析式化成顶点式即可求得对称轴；求得直线与坐标轴的交点坐标，即可证得直线和坐标轴围成的图形是等腰直角三角形，从而求得直线PQ与x轴所夹锐角的度数；

(2) 分三种情况分别讨论根据已知条件，通过 $\triangle OBE \sim \triangle ABF$ 对应边成比例即可求得；

(3) ①过点C作 $CH \parallel x$ 轴交直线PQ于点H，可得 $\triangle CHQ$ 是等腰三角形，进而得出 $AD \perp PH$ ，得出 $DQ=DH$ ，从而得出 $PD+DQ=PH$ ，过P点作 $PM \perp CH$ 于点M，则 $\triangle PMH$ 是等腰直角三角形，得出 $PH = \sqrt{2} PM$ ，因为当PM最大时，PH最大，通过求得PM的最大值，从而求得PH的最大值；

由①可知： $PD+PH \leq 6\sqrt{2}$ ，设 $PD=a$ ，则 $DQ \leq 6\sqrt{2} - a$ ，得出 $PD \cdot DQ \leq a(6\sqrt{2} - a) = -a^2 + 6\sqrt{2}a$

$a = -(a - 3\sqrt{2})^2 + 18$ ，当点P在抛物线的顶点时， $a = 3\sqrt{2}$ ，得出 $PD \cdot DQ \leq 18$ 。

答案：(1)  $\because y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ ，

$\therefore$  抛物线的对称轴是  $x=2$ ，

$\because$  直线  $y = x + m$ ，

$\therefore$  直线与坐标轴的交点坐标为  $(-m, 0)$ ， $(0, m)$ ，

$\therefore$  交点到原点的距离相等，

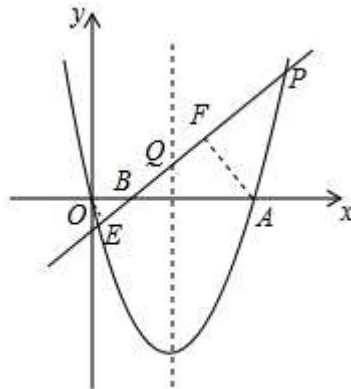
$\therefore$  直线与坐标轴围成的三角形是等腰直角三角形，

$\therefore$  直线PQ与x轴所夹锐角的度数是  $45^\circ$ ，

故答案为  $x=2$ 、 $45^\circ$ 。

(2) 设直线PQ交x轴于点B，分别过O点，A点作PQ的垂线，垂足分别是E、F，显然当点B在OA的延长线时， $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAQ}$  不成立；

①当点B落在线段OA上时，如图①



图①

$$\frac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle PAQ}} = \frac{OE}{AF} = \frac{1}{3},$$

由 $\triangle OBE \sim \triangle ABF$ 得， $\frac{OB}{AB} = \frac{OE}{AF} = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore AB=3OB,$$

$$\therefore OB=\frac{1}{4}OA,$$

由  $y=x^2-4x$  得点  $A(4, 0)$ ,

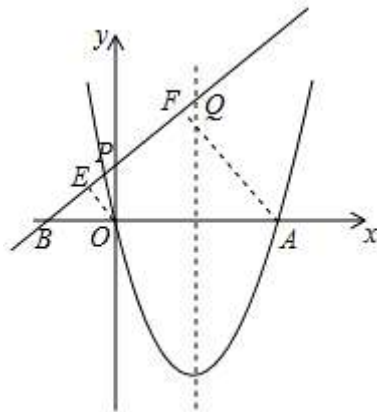
$$\therefore OB=1,$$

$$\therefore B(1, 0),$$

$$\therefore 1+m=0,$$

$$\therefore m=-1;$$

②当点  $B$  落在线段  $AO$  的延长线上时, 如图②, 同理可得  $OB=\frac{1}{2}OA=2$ ,



图②

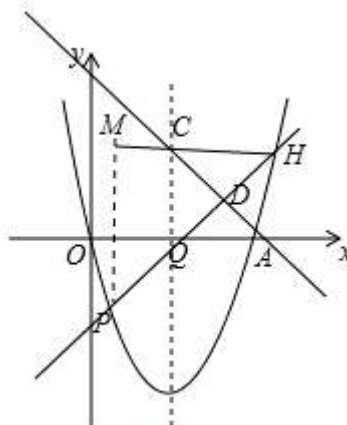
$$\therefore B(-2, 0),$$

$$\therefore -2+m=0,$$

$$\therefore m=2,$$

综上, 当  $m=-1$  或  $2$  时,  $S_{\triangle POQ}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAQ}$ ;

(3) ①过点  $C$  作  $CH \parallel x$  轴交直线  $PQ$  于点  $H$ , 如图③, 可得  $\triangle CHQ$  是等腰三角形,



图③

$$\therefore \angle CDQ=45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

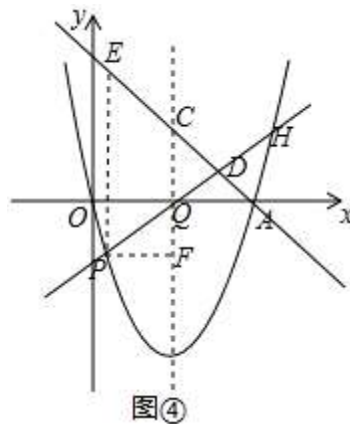
$$\therefore AD \perp PH,$$

$$\therefore DQ=DH,$$



∴ PD+DQ=PH,

过 P 点作 PM⊥CH 于点 M, 如图④, 则△PMH 是等腰直角三角形,



∴ PH=√2 PM,

∴ 当 PM 最大时, PH 最大,

∴ 当点 P 在抛物线顶点出时, PM 最大, 此时 PM=6,

∴ PH 的最大值为  $6\sqrt{2}$ ,

即 PD+DQ 的最大值为  $6\sqrt{2}$ .

②由①可知: PD+PH≤ $6\sqrt{2}$ ,

设 PD=a, 则 DQ≤ $6\sqrt{2}-a$ ,

∴ PD·DQ≤ $a(6\sqrt{2}-a)=-a^2+6\sqrt{2}a=-(a-3\sqrt{2})^2+18$ ,

∴ 当点 P 在抛物线的顶点时,  $a=3\sqrt{2}$ ,

∴ PD·DQ≤18.

∴ PD·DQ 的最大值为 18.