2011 江苏高考数学试卷

注意事项：

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1.本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题-第 20 题，共 20 题）。本卷满分为 160 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

2.答题前请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3.请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

4.作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

5.如需作图，须用 2B 铅笔绘，写清楚，线条，符号等须加黑加粗。

参考公式：

（1）样本数据 x_1, x_2，…，x_n的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x^i-\overline{x})^2$，其中$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

（2）(2)直棱柱的侧面积 S=ch，其中 c 为底面积，h 为高.

（3）棱柱的体积 V= Sh，其中 S 为底面积，h 为高.

一.填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分，请把答案填写在答题卡的相应位置上。

1、已知集合 $A=\{-1,2,2,4\},B=\{-1,0,2\}$，则 $A\cap B=$ ________，

2、函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调增区间是__________

3、设复数 i 满足 $i(z+1)=-3+2i$（i 是虚数单位），则 z 的实部是_________

4、根据如图所示的伪代码，当输入 a,b 分别为 2，3 时，最后输出的 m 的值是________

Read　*a*，*b*

If　*a*>*b*　Then

　m←*a*

Else

　m←*b*

End　If

Print　m

5、从 1，2，3，4 这四个数中一次随机取两个数，则其中一个数是另一个的两倍的概率是______

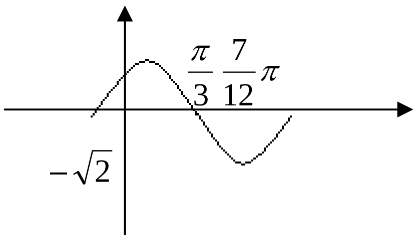
6、某老师从星期一到星期五收到信件数分别是 10，6，8，5，6，则该组数据的方差 $s^2=$ ___

7、已知 $\tan(x+\frac{\pi}{4})=2$，则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为__________

8、在平面直角坐标系 xOy 中，过坐标原点的一条直线与函数 $f(x)=\frac{2}{x}$ 的图象交于 P、Q 两点，则线段 PQ 长的最小值是________

9、函数 $f(x)=A\sin(wx+\varphi),(A,w,\varphi$ 是常数，$A>0,w>0)$ 的部分图象如图所示，则

$f(0)=$______



10、已知$\vec{e}_1,\vec{e}_2$是夹角为$\frac{2}{3}\pi$的两个单位向量，$\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2,\vec{b}=k\vec{e}_1+\vec{e}_2$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 k 的值为

11、已知实数$a\neq 0$，函数$f(x)=\begin{cases}2x+a,x<1\\-x-2a,x\geq 1\end{cases}$，若$f(1-a)=f(1+a)$，则 a 的值为________

12、在平面直角坐标系xOy中，已知点 P 是函数$f(x)=e^x(x>0)$的图象上的动点，该图象在 P 处的切线l交 y 轴于点 M，过点 P 作l的垂线交 y 轴于点 N，设线段 MN 的中点的纵坐标为 t，则 t 的最大值是______________

13、设$1\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_7$，其中$a_1,a_3,a_5,a_7$成公比为 q 的等比数列，$a_2,a_4,a_6$成公差为 1 的等差数列，则 q 的最小值是________

14、设集合$A=\{(x,y)\mid\frac{m}{2}\leq(x-2)^2+y^2\leq m^2,x,y\in R\}$，

$B=\{(x,y)\mid 2m\leq x+y\leq 2m+1,x,y\in R\}$，若$A\cap B\neq\phi$，则实数 m 的取值范围是

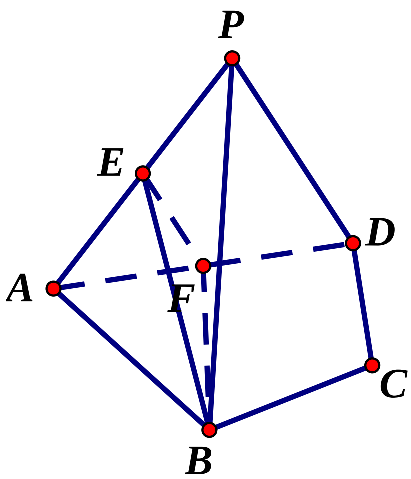
____

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程活盐酸步骤。

15、在△ABC 中，角 A、B、C 所对应的边为a,b,c

（1）若$\sin(A+\frac{\pi}{6})=2\cos A$，求 A 的值；

（2）若$\cos A=\frac{1}{3},b=3c$，求$\sin C$的值.



16、如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面 PAD⊥平面 ABCD，AB=AD，∠BAD=60°，E、F 分别是 AP、AD 的中点

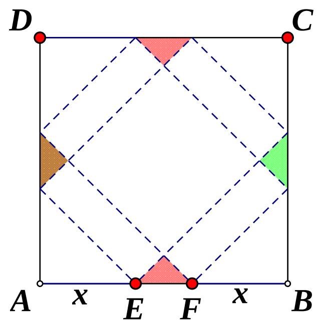
求证：（1）直线 EF∥平面 PCD；

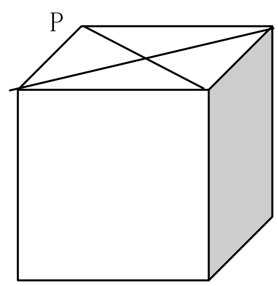
（2）平面 BEF⊥平面 PAD

17、请你设计一个包装盒，如图所示，ABCD 是边长为 60cm 的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形，再沿虚线折起，使得 *ABCD* 四个点重合于图中的点 P，正好形成一个正四棱柱形状的包装盒，E、F 在 AB 上是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点，设 AE=FB=xcm

（1）若广告商要求包装盒侧面积 S（cm^2）最大，试问 x 应取何值？

（2）若广告商要求包装盒容积 V（cm^3）最大，试问 x 应取何值？并求出此时包装盒的高与底面边长的比值。





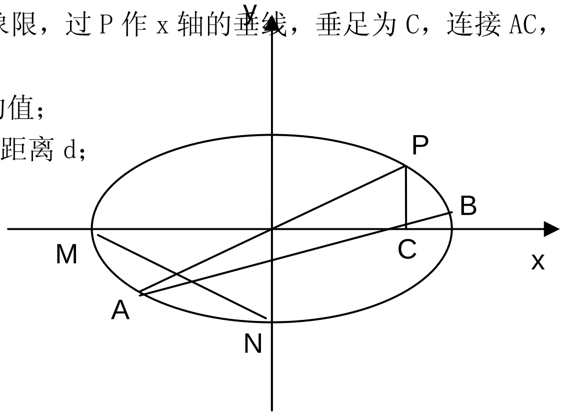
18、如图，在平面直角坐标系 xOy 中，M、N 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的顶点，过坐标原点的直线

交椭圆于 P、A 两点，其中 P 在第一象限，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 C，连接 AC，并延长交椭圆于点 B，设直线 PA 的斜率为 k

（1）当直线 PA 平分线段 MN，求 k 的值；

（2）当 k=2 时，求点 P 到直线 AB 的距离 d；

（3）对任意 k>0，求证：PA⊥PB



19、已知 a，b 是实数，函数 $f(x)=x^3+ax, g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的导函数，若 $f'(x)g'(x)\geq 0$ 在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致

（1）设 $a>0$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致，求实数 b 的取值范围；

（2）设 $a<0$，且 $a\neq b$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a，b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值

20、设 M 为部分正整数组成的集合，数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和为 S_n，已知对任意整数 k 属于 M，当 n>k 时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立

（1）设 M=｛1｝，$a_2=2$，求a_5的值；（2）设 M=｛3，4｝，求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2) 设 $a<0$ 且 $a\neq b$. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a、b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值.

20.（本小题满分 16 分）

设 M 为部分正整数组成的集合，数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项的和为 S_n. 已知对任意的整数 $k\in M$，当整数 $n>k$ 时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立.

(1) 设 $M=\{1\}$，$a_2=2$，求 a_5 的值；

(2) 设 $M=\{3,4\}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法．每小题 5 分，共计 70 分．

1. $\{-1,2\}$	**2.** $(-\frac{1}{2},+\infty)$	**3.** 1	**4.** 3
5. $\frac{1}{3}$	**6.** 3.2	**7.** $\frac{4}{9}$	**8.** 4
9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$	**10.** $\frac{5}{4}$	**11.** $-\frac{3}{4}$	**12.** $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$
13. $\sqrt[3]{3}$	**14.** $[\frac{1}{2},2+\sqrt{2}]$		

二、解答题

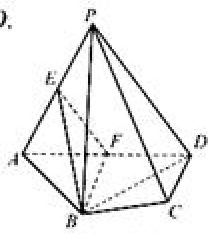
15. 本小题主要考查三角函数的基本关系式、两角和的正弦公式、解三角形，考查运算求解能力．满分 14 分．

解：(1) 由题设知 $\sin A\cos\frac{\pi}{6}+\cos A\sin\frac{\pi}{6}=2\cos A$. 从而 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，所以 $\cos A\neq 0$，$\tan A=\sqrt{3}$. 因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由 $\cos A=\frac{1}{2}$，$b=3c$ 及 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $a^2=b^2-c^2$.

故$\triangle ABC$是直角三角形，且$B=\dfrac{\pi}{2}$.　所以$\sin C=\cos A=\dfrac{1}{3}$.

16. 本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力. 满分14分.


(第16题)

证明：(1)在$\triangle PAD$中，因为E，F分别为AP，AD的中点，所以$EF/\!/PD$.
又因为$EF\not\subset$平面PCD，$PD\subset$平面PCD，
所以直线$EF/\!/$平面PCD.

(2)连结BD. 因为$AB=AD$，$\angle BAD=60°$，所以$\triangle ABD$为正三角形. 因为F是AD的中点，所以$BF\perp AD$.
因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$BF\subset$平面$ABCD$，
平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，所以$BF\perp$平面PAD.
又因为$BF\subset$平面BEF，所以平面$BEF\perp$平面PAD.

17. 本小题主要考查函数的概念、导数等基础知识，考查数学建模能力、空间想象能力、数学阅读能力及解决实际问题的能力. 满分14分.

解：设包装盒的高为h(cm)，底面边长为a(cm). 由已知得

$a=\sqrt{2}x$，$h=\dfrac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$.

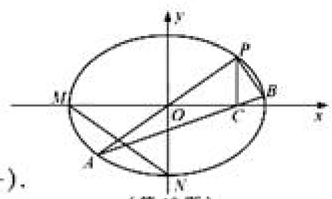
(1)$S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1800$，
所以当$x=15$时，S取得最大值.

(2)$V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$，$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$.
由$V'=0$得$x=0$(舍)或$x=20$.
当$x\in(0,20)$时，$V'>0$；当$x\in(20,30)$时，$V'<0$.
所以当$x=20$时，V取得极大值，也是最大值.

此时$\dfrac{h}{a}=\dfrac{1}{2}$. 即包装盒的高与底面边长的比值为$\dfrac{1}{2}$.

18. 本小题主要考查椭圆的标准方程及几何性质、直线方程、直线的垂直关系、点到直线的距离等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力. 满分16分.

解：(1)由题设知，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，故$M(-2,0)$，$N(0,-\sqrt{2})$，所以线段MN中点的坐标为$(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. 由于直线$PA$平分线段$MN$，故直线$PA$过线段$MN$的中点，又直线$PA$过坐标原点，所以$k=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



(第18题)

(2)直线PA的方程为$y=2x$，代入椭圆方程得
$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4x^2}{2}=1$，解得$x=\pm\dfrac{2}{3}$，因此$P(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$，$A(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3})$.

于是$C(\dfrac{2}{3},0)$，直线AC的斜率为$\dfrac{0+\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=1$，故直线$AB$的方程为$x-y-\dfrac{2}{3}=0$.

因此，$d=\dfrac{\left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(3)解法一：

将直线PA的方程$y=kx$代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，解得$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$. 记$\mu=\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，

则$P(\mu,\mu k)$，$A(-\mu,-\mu k)$. 于是$C(\mu,0)$. 故直线AB的斜率为$\dfrac{0+\mu k}{\mu+\mu}=\dfrac{k}{2}$，

其方程为$y=\dfrac{k}{2}(x-\mu)$，代入椭圆方程得$(2+k^2)x^2-2\mu k^2x-\mu^2(3k^2+2)=0$，

其方程为$y=\frac{k}{2}(x-\mu)$，代入椭圆方程得$(2+k^2)x^2-2\mu k^2x-\mu^2(3k^2+2)=0$，

解得$x=\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}$或$x=-\mu$. 因此$B(\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}, \frac{\mu k^3}{2+k^2})$.

于是直线PB的斜率$k_1=\frac{\frac{\mu k^3}{2+k^2}-\mu k}{\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}-\mu}=\frac{k^3-k(2+k^2)}{3k^2+2-(2+k^2)}=-\frac{1}{k}$.

因此$k_1k=-1$，所以$PA\perp PB$.

解法二：

设$P(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$x_1>0$，$x_2>0$，$x_1\neq x_2$，$A(-x_1, -y_1)$，$C(x_1, 0)$. 设直线PB，AB的斜率分别为k_1，k_2. 因为C在直线AB上，所以$k_2=\frac{0-(-y_1)}{x_1-(-x_1)}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{k}{2}$. 从而

$$k_1k+1=2k_1k_2+1=2\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2-(-y_1)}{x_2-(-x_1)}+1$$
$$=\frac{2y_2^2-2y_1^2}{x_2^2-x_1^2}+1=\frac{(x_2^2+2y_2^2)-(x_1^2+2y_1^2)}{x_2^2-x_1^2}=\frac{4-4}{x_2^2-x_1^2}=0.$$

因此$k_1k=-1$，所以$PA\perp PB$.

19. 本小题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识，考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力. 满分16分.

解：$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$.

(1)由题意知$f'(x)g'(x)\geqslant 0$在$[-1, +\infty)$上恒成立. 因为$a>0$，故$3x^2+a>0$，

进而$2x+b\geqslant 0$，即$b\geqslant -2x$在区间$[-1, +\infty)$上恒成立，所以$b\geqslant 2$. 因此b的取值范围是$[2, +\infty)$.

(2)令$f'(x)=0$，解得$x=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$.

若$b>0$，由$a<0$得$0\in(a, b)$. 又因为$f'(0)g'(0)=ab<0$，所以函数$f(x)$和$g(x)$在(a, b)上不是单调性一致的. 因此$b\leqslant 0$.

现设$b\leqslant 0$. 当$x\in(-\infty, 0)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$时，$f'(x)>0$. 因此，

当$x\in(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$时，$f'(x)g'(x)<0$. 故由题设得$a\geqslant-\sqrt{-\frac{a}{3}}$且$b\geqslant-\sqrt{-\frac{a}{3}}$，

从而$-\frac{1}{3}\leqslant a<0$，于是$-\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant 0$. 因此$|a-b|\leqslant\frac{1}{3}$，且当$a=-\frac{1}{3}$，$b=0$时等号成立.

又当$a=-\frac{1}{3}$，$b=0$时，$f'(x)g'(x)=6x(x^2-\frac{1}{9})$，从而当$x\in(-\frac{1}{3}, 0)$时$f'(x)g'(x)>0$，

故函数$f(x)$和$g(x)$在$(-\frac{1}{3}, 0)$上单调性一致. 因此$|a-b|$的最大值为$\frac{1}{3}$.

20. 本小题考查数列的通项与前n项和的关系、等差数列的基本性质等基础知识，考查考生分析探究及逻辑推理的能力. 满分16分.

解：(1)由题设知，当$n\geqslant 2$时，$S_{n+1}+S_{n-1}=2(S_n+S_1)$，即$(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=2S_1$.

从而$a_{n+1}-a_n=2a_1=2$. 又$a_2=2$，故当$n\geqslant 2$时，$a_n=a_2+2(n-2)=2n-2$.

所以a_5的值为8.

(2)由题设知，当$k\in M=\{3, 4\}$且$n>k$时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2S_n+2S_k$且$S_{n+1+k}+S_{n+1-k}=2S_{n+1}+2S_k$，两式相减得$a_{n+1+k}+a_{n+1-k}=2a_{n+1}$，即$a_{n+1+k}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_{n+1-k}$. 所以当$n\geqslant 8$时，$a_{n-6}$，$a_{n-3}$，$a_n$，$a_{n+3}$，$a_{n+6}$成等差数列，且$a_{n-6}$，$a_{n-2}$，$a_{n+2}$，$a_{n+6}$也成等差数列.

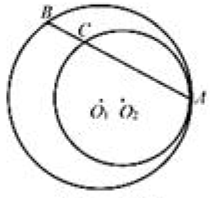
从而当$n\geqslant 8$时，$2a_n=a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+6}+a_{n-6}$， (＊)

且$a_{n+6}+a_{n-6}=a_{n+2}+a_{n-2}$. 所以当$n\geqslant 8$时，$2a_n=a_{n+2}+a_{n-2}$，即$a_{n+2}-a_n=a_n-a_{n-2}$. 于是当$n\geqslant 9$时，$a_{n-3}$，$a_{n-1}$，$a_{n+1}$，$a_{n+3}$成等差数列，从而$a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+1}+a_{n-1}$，故由(＊)式知$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$，即$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$. 当$n\geqslant 9$时，设$d=a_n-a_{n-1}$.

当 $2\leqslant m\leqslant 8$ 时，$m+6\geqslant 8$，从而由（$*$）式知 $2a_{m+6}=a_m+a_{m+12}$，故 $2a_{m+7}=a_{m+1}+a_{m+13}$.
从而 $2(a_{m+7}-a_{m+6})=a_{m+1}-a_m+(a_{m+13}-a_{m+12})$，于是 $a_{m+1}-a_m=2d-d=d$.
因此，$a_{n+1}-a_n=d$ 对任意 $n\geqslant 2$ 都成立. 又由 $S_{n+k}+S_{n-k}-2S_n=2S_k(k\in\{3,4\})$ 可知 $(S_{n+k}-S_n)-(S_n-S_{n-k})=2S_k$，故 $9d=2S_3$ 且 $16d=2S_4$. 解得 $a_4=\dfrac{7}{2}d$，从而 $a_2=\dfrac{3}{2}d$，$a_1=\dfrac{d}{2}$. 因此，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. 由 $a_1=1$ 知 $d=2$.
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

数学Ⅱ（附加题）

21.【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答. 若多做，则按作答的前两题评分.
解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.



（第 21-A 题）

A. 选修 4-1：几何证明选讲
（本小题满分 10 分）
如图，圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A，其半径分别为 r_1 与 $r_2(r_1>r_2)$. 圆 O_1 的弦 AB 交圆 O_2 于点 C（O_1 不在 AB 上）. 求证：$AB:AC$ 为定值.

B. 选修 4-2：矩阵与变换
（本小题满分 10 分）
已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

C. 选修 4-4：坐标系与参数方程
（本小题满分 10 分）
在平面直角坐标系 xOy 中，求过椭圆 $\begin{cases}x=5\cos\varphi,\\y=3\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的右焦点，且与直线

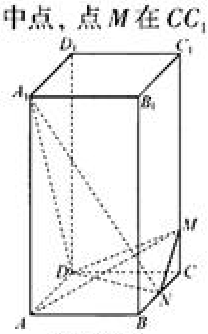
C. 选修 4-4：坐标系与参数方程
（本小题满分 10 分）
在平面直角坐标系 xOy 中，求过椭圆 $\begin{cases}x=5\cos\varphi,\\y=3\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的右焦点，且与直线

$\begin{cases}x=4-2t,\\y=3-t\end{cases}$（$t$ 为参数）平行的直线的普通方程.

D. 选修 4-5：不等式选讲
（本小题满分 10 分）
解不等式 $x+|2x-1|<3$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分 10 分）
如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=1$，点 N 是 BC 的中点，点 M 在 CC_1 上. 设二面角 A_1-DN-M 的大小为 θ.
（1）当 $\theta=90°$ 时，求 AM 的长；
（2）当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求 CM 的长.



（第 22 题）

23.（本小题满分 10 分）
设整数 $n\geqslant 4$，$P(a,b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，其中 $a,b\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，$a>b$.
（1）记 A_n 为满足 $a-b=3$ 的点 P 的个数，求 A_n；
（2）记 B_n 为满足 $\dfrac{1}{3}(a-b)$ 是整数的点 P 的个数，求 B_n.

数学Ⅱ（附加题）参考答案

21.【选做题】
A. 选修 4-1：几何证明选讲

21.【选做题】

A. 选修 4-1:几何证明选讲

本小题主要考查两圆内切、相似比等基础知识,考查推理论证能力. 满分 10 分.

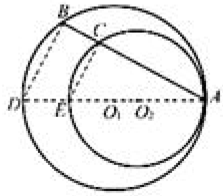
证明:连结 AO_1,并延长分别交两圆于点 E 和点 D. 连结 BD,CE.

因为圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A,所以点 O_2 在 AD 上. 故 AD,AE 分别为圆 O_1,圆 O_2 的直径.

从而 $\angle ABD=\angle ACE=\dfrac{\pi}{2}$. 所以 $BD\parallel CE$,

于是 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{2r_1}{2r_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

所以 $AB:AC$ 为定值.



（第 21-A 题）

B. 选修 4-2:矩阵与变换

本小题主要考查矩阵运算等基础知识,考查运算求解能力. 满分 10 分.

解:$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. 由 $A^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,得 $\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$,从而 $\begin{cases}3x+2y=1,\\4x+3y=2.\end{cases}$

解得 $x=-1$,$y=2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.

C. 选修 4-4:坐标系与参数方程

本小题主要考查椭圆及直线的参数方程等基础知识,考查转化问题的能力. 满分 10 分.

解:由题设知,椭圆的长半轴长 $a=5$,短半轴长 $b=3$,从而 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$,所以右焦点为 $(4,0)$. 将已知直线的参数方程化为普通方程:$x-2y+2=0$.

故所求直线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$,因此其方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-4)$,即 $x-2y-4=0$.

D. 选修 4-5:不等式选讲

本小题主要考查解绝对值不等式的基础知识,考查分类讨论、运算求解能力. 满分 10 分.

解:原不等式可化为 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\x+(2x-1)<3;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<0,\\x-(2x-1)<3.\end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{4}{3}$ 或 $-2<x<\dfrac{1}{2}$.

所以原不等式的解集是 $\left\{x\mid -2<x<\dfrac{4}{3}\right\}$.

22.【必做题】**本小题主要考查空间向量的基础知识,考查运用空间向量解决问题的能力. 满分 10 分.**

解:建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$. 设 $CM=t$ $(0\leqslant t\leqslant 2)$,则各点的坐标为 $A(1,0,0)$,$A_1(1,0,2)$,$N(\dfrac{1}{2},1,0)$,$M(0,1,t)$. 所以 $\overrightarrow{DN}=(\dfrac{1}{2},1,0)$,$\overrightarrow{DM}=(0,1,t)$,$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,2)$.

设平面 DMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则

$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DN}=0$,$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DM}=0$. 即 $x_1+2y_1=0$,$y_1+tz_1=0$.

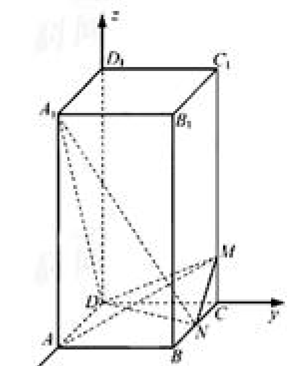
令 $z_1=1$,则 $y_1=-t$,$x_1=2t$. 所以 $\boldsymbol{n}_1=(2t,-t,1)$ 是平面 DMN 的一个法向量.

设平面 A_1DN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则

$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$,$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DN}=0$. 即 $x_2+2z_2=0$,$x_2+2y_2=0$.

令 $z_2=1$,则 $x_2=-2$,$y_2=1$. 所以 $\boldsymbol{n}_2=(-2,1,1)$ 是平面 A_1DN 的一个法向量. 从而 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5t+1$.

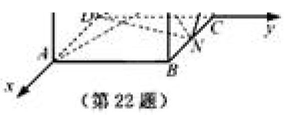
(1)因为 $\theta=90^\circ$,所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5t+1=0$,解得 $t=\dfrac{1}{5}$. 从而 $M(0,1,\dfrac{1}{5})$.



（第 22 题）

所以 $AM=\sqrt{1^2+1^2+(\dfrac{1}{5})^2}=\dfrac{\sqrt{51}}{5}$.

(1)因为 $\theta=90^\circ$，所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5t+1=0$，解得 $t=\frac{1}{5}$. 从而



(第 22 题)

$M(0,1,\frac{1}{5})$.

所以 $AM=\sqrt{1^2+1^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{51}}{5}$.

(2)因为 $|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{5t^2+1}$，$|\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{6}$，所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-5t+1}{\sqrt{6}\sqrt{5t^2+1}}$.

因为 $<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\theta$ 或 $\pi-\theta$，所以 $\left|\frac{-5t+1}{\sqrt{6}\sqrt{5t^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}$，解得 $t=0$ 或 $t=\frac{1}{2}$.

根据图形和(1)的结论可知 $t=\frac{1}{2}$，从而 CM 的长为 $\frac{1}{2}$.

23.**【必做题】本小题主要考查计数原理，考查探究能力. 满分 10 分.**

解：(1)点 P 的坐标满足条件：$1\leqslant b=a-3\leqslant n-3$，所以 $A_n=n-3$.

(2)设 k 为正整数，记 $f_n(k)$ 为满足题设条件以及 $a-b=3k$ 的点 P 的个数. 只要讨论 $f_n(k)\geqslant 1$ 的情形. 由 $1\leqslant b=a-3k\leqslant n-3k$ 知 $f_n(k)=n-3k$，且 $k\leqslant\frac{n-1}{3}$.

设 $n-1=3m+r$，其中 $m\in\mathbf{N}^*$，$r\in\{0,1,2\}$，则 $k\leqslant m$. 所以

$$B_n=\sum_{k=1}^{m}f_n(k)=\sum_{k=1}^{m}(n-3k)=mn-\frac{3m(m+1)}{2}=\frac{m(2n-3m-3)}{2}.$$

将 $m=\frac{n-1-r}{3}$ 代入上式，化简得 $B_n=\frac{(n-1)(n-2)}{6}-\frac{r(r-1)}{6}$.

$$\text{所以 } B_n=\begin{cases}\frac{n(n-3)}{6},\ \frac{n}{3}\text{是整数},\\ \frac{(n-1)(n-2)}{6},\ \frac{n}{3}\text{不是整数}.\end{cases}$$