2006年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷（理工农医类）

考生注意：

1．答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚．

2．本试卷共有22道试题，满分150分，考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

一．填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．已知集合A＝{－1，3，$2m-1$}，集合B＝{3，m^2}．若B⊆A，则实数m＝______．

2．已知圆$x^2-4x-4+y^2=0$的圆心是点P，则点P到直线$x-y-1=0$的距离是_____．

3．若函数$f(x)=a^x$（$a>0$，且$a\neq1$）的反函数的图像过点（2，－1），则a＝_____．

4．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^3}{n^3+1}=$ ______________．

5．若复数z同时满足$z-\bar{z}=2i$，$\bar{z}=iz$（i为虚数单位），则$z=$ ____________．

6．如果$\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，且α是第四象限的角，那么$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})=$ ________________．

7．已知椭圆中心在原点，一个焦点为F（$-2\sqrt{3}$，0），且长轴长是短轴长的2倍，则该椭圆的标准方程是__________________________．

8．在极坐标系中，O是极点，设点A（4，$\dfrac{\pi}{3}$），B（5，$-\dfrac{5\pi}{6}$），则△OAB的面积是________．

9．两部不同的长篇小说各由第一、二、三、四卷组成，每卷1本，共8本．将它们任意地排成一排，左边4本恰好都属于同一部小说的概率是____________（结果用分数表示）．

10．如果一条直线与一个平面垂直，那么，称此直线与平面构成一个“正交线面对”．在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是______________．

11．若曲线$y^2=|x|+1$与直线$y=kx+b$没有公共点，则k、b分别应满足的条件是________________．

12．三个同学对问题“关于x的不等式$x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$在[1，12]上恒成立，求实数$a$的取值范围”提出各自的解题思路．

甲说：“只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”．

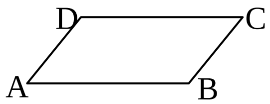
乙说：“把不等式变形为左边含变量x的函数，右边仅含常数，求函数的最值”．

丙说：“把不等式两边看成关于x的函数，作出函数图像”．

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，即 a 的取值范围是 ________ .

二．**选择题**（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必本大题满分 16 分）须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13．如图，在平行四边形 ABCD 中，下列结论中错误的是　　　　[答]（　　　）



（A）$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；（B）$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$；

（C）$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$；（D）$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

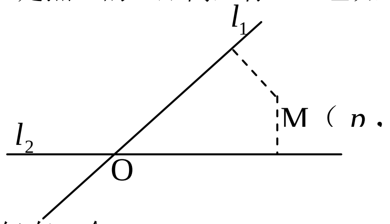
14．若空间中有四个点，则“这四个点中有三点在同一直线上”是“这四个点在同一平面上”的　　　　[答]（　　　）

（A）充分非必要条件；（B）必要非充分条件；（C）充要条件；（D）非充分非必要条件.

15．若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实常数 k，总有[答]（　　　）

（A）2∈M，0∈M；（B）2∉M，0∉M；（C）2∈M，0∉M；（D）2∉M，0∈M.

16．如图，平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若 p、q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离，则称有序非负实数对（p，q）是点 M 的“距离坐标”．已知常数 $p\geqslant0$，$q\geqslant0$，给出下列命题：



①若 $p=q=0$，则“距离坐标”为（0，0）的点有且仅有 1 个；

②若 $pq=0$，且 $p+q\neq0$，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 2 个；

③若 $pq\neq0$，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 4 个.

上述命题中，正确命题的个数是　　　　[答]（　　　）

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

三．**解答题**（本大题满分 86 分）本大题共有 6 题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

17．（本题满分 12 分）

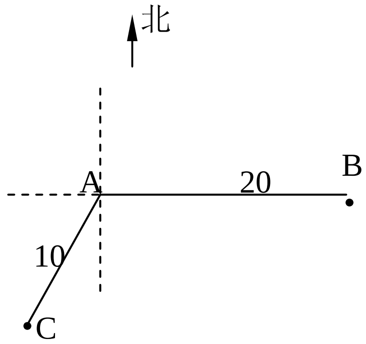
求函数 $y=2\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(x-\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域和最小正周期.

[解]

18．（本题满分 12 分）

如图，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救．甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°，相距 10 海里 C 处的乙船，试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援（角度精确到 1°）？

[解]

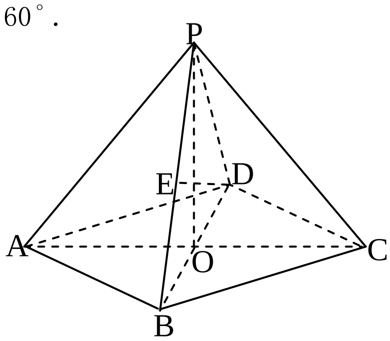


19．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

在四棱锥 P－ABCD 中，底面是边长为 2 的菱形，∠DAB＝60°，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，PO⊥平面 ABCD，PB 与平面 ABCD 所成的角为 60°．

（1）求四棱锥 P－ABCD 的体积；

（2）若 E 是 PB 的中点，求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）．



[解]（1）

（2）

20．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

在平面直角坐标系 $x0y$ 中，直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点．

（1）求证：“如果直线 l 过点 T（3，0），那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$”是真命题；

（2）写出（1）中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由．

[解]（1）

（2）

21．（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分）

已知有穷数列$\{a_n\}$共有 $2k$ 项（整数 $k\geqslant 2$），首项 $a_1=2$．设该数列的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=(a-1)S_n+2$（$n=1，2，\cdots，2k-1$），其中常数 $a>1$．

（1）求证：数列{ a_n }是等比数列；

（2）若$a=2^{\frac{2}{2k-1}}$，数列{ b_n }满足$b_n=\frac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$（$n=1$，2，---，$2k$），求数列{ b_n }的通项公式；

（3）若（2）中的数列{ b_n }满足不等式$|b_1-\frac{3}{2}|+|b_2-\frac{3}{2}|+\cdots+|b_{2k-1}-\frac{3}{2}|+|b_{2k}-\frac{3}{2}|\leqslant 4$，求$k$的值.

[解]（1）

（2）

（3）

22．（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分）

已知函数$y=x+\frac{a}{x}$有如下性质：如果常数$a>0$，那么该函数在$(0,\sqrt{a}]$上是减函数，在$[\sqrt{a},+\infty)$上是增函数.

（1）如果函数$y=x+\frac{2^b}{x}$（$x>0$）的值域为$[6,+\infty)$，求b的值；

（2）研究函数$y=x^2+\frac{c}{x^2}$（常数$c>0$）在定义域内的单调性，并说明理由；

（3）对函数$y=x+\frac{a}{x}$和$y=x^2+\frac{a}{x^2}$（常数$a>0$）作出推广，使它们都是你所推广的函数的特例．研究推广后的函数的单调性（只须写出结论，不必证明），并求函数$F(x)=(x^2+\frac{1}{x})^n+(\frac{1}{x^2}+x)^n$（$n$是正整数）在区间$[\frac{1}{2},2]$上的最大值和最小值（可利用你的研究结论）．

[解]（1）

（2）

（3）