

## 2018 年湖南省邵阳市邵阳县中考二模数学

一、选择题(本大题共有 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

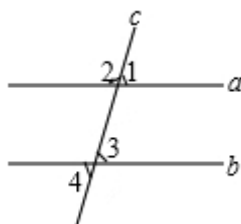
1.  $1-\sqrt{2}$  的相反数是( )

- A.  $1-\sqrt{2}$
- B.  $\sqrt{2}-1$
- C.  $\sqrt{2}$
- D.  $-1$

解析:  $1-\sqrt{2}$  的相反数是  $\sqrt{2}-1$ .

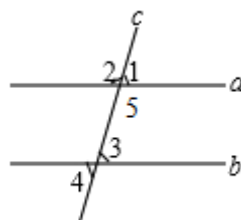
答案: B

2. 如图, 直线  $a, b$  被直线  $c$  所截, 下列条件不能判定直线  $a$  与  $b$  平行的是( )



- A.  $\angle 1 = \angle 3$
- B.  $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
- C.  $\angle 1 = \angle 4$
- D.  $\angle 3 = \angle 4$

解析: 由  $\angle 1 = \angle 3$ , 可得直线  $a$  与  $b$  平行, 故 A 能判定;



由  $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ ,  $\angle 2 = \angle 5$ ,  $\angle 4 = \angle 3$ , 可得  $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ , 故直线  $a$  与  $b$  平行, 故 B 能判定;

由  $\angle 1 = \angle 4$ ,  $\angle 4 = \angle 3$ , 可得  $\angle 1 = \angle 3$ , 故直线  $a$  与  $b$  平行, 故 C 能判定;

由  $\angle 3 = \angle 4$ , 不能判定直线  $a$  与  $b$  平行,

答案: D

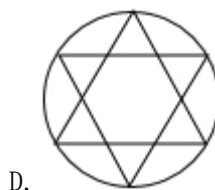
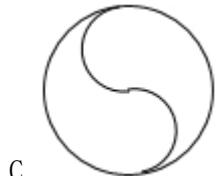
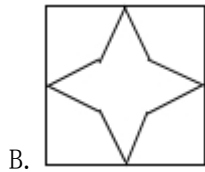
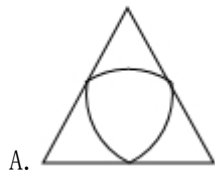
3. 目前, 世界上能制造出的最小晶体管的长度只有  $0.00000004\text{m}$ , 将  $0.00000004$  用科学记数法表示为( )

- A.  $4 \times 10^8$
- B.  $4 \times 10^{-8}$
- C.  $0.4 \times 10^8$
- D.  $-4 \times 10^8$

解析: 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数. 确定  $n$  的值时, 要看把原数变成  $a$  时, 小数点移动了多少位,  $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 1$  时,  $n$  是正数; 当原数的绝对值  $< 1$  时,  $n$  是负数.  $0.00000004 = 4 \times 10^{-8}$ .

答案: B

4. 下列图形中, 是轴对称图形但不是中心对称图形的是( )



解析：根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析：

A、是轴对称图形但不是中心对称图形，故本选项正确；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项错误；

C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项错误.

答案：A

5. 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  中自变量  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $x > 2$

B.  $x < 2$

C.  $x \neq 2$

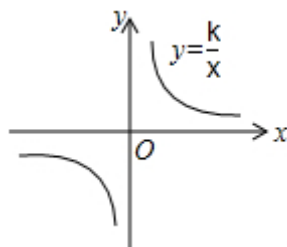
D.  $x \geq 2$

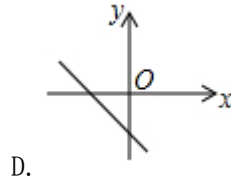
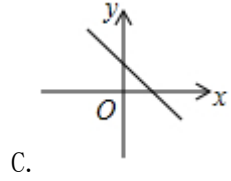
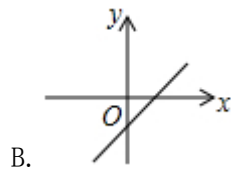
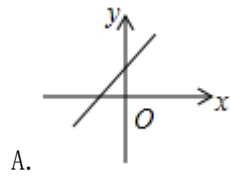
解析：根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0，得  $x-2 > 0$ ，

解得  $x > 2$ 。

答案：A

6. 如图是反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ) 的图象, 则一次函数  $y = kx - k$  的图象大致是 ( )





解析：根据图示知，反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象位于第一、三象限，

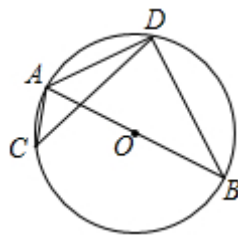
$\therefore k > 0$ ,

$\therefore$  一次函数  $y = kx - k$  的图象与  $y$  轴的交点在  $y$  轴的负半轴，且该一次函数在定义域内是增函数，

$\therefore$  一次函数  $y = kx - k$  的图象经过第一、三、四象限.

答案：B

7. 如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $C, D$  是  $\odot O$  上位于  $AB$  异侧的两点. 下列四个角中，一定与  $\angle ACD$  互余的角是 ( )



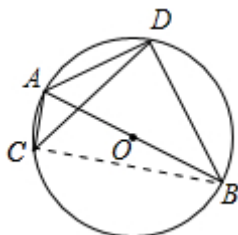
A.  $\angle ADC$

B.  $\angle ABD$

C.  $\angle BAC$

D.  $\angle BAD$

解析：连接  $BC$ ，如图所示：



$\because AB$  是  $\odot O$  的直径，

$\therefore \angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ，

∵  $\angle BCD = \angle BAD$ ,  
 ∴  $\angle ACD + \angle BAD = 90^\circ$ .

答案: D

8. 绿豆在相同条件下的发芽试验, 结果如下表所示:

每批粒数 $n$	100	300	400	600	1000	2000	3000
发芽的粒数 $m$	96	282	382	570	948	1904	2850
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.960	0.940	0.955	0.950	0.948	0.952	0.950

下面有三个推断:

①当  $n=400$  时, 绿豆发芽的频率为 0.955, 所以绿豆发芽的概率是 0.955;

②根据上表, 估计绿豆发芽的概率是 0.95;

③若  $n$  为 4000, 估计绿豆发芽的粒数大约为 3800 粒.

其中推断合理的是 ( )

- A. ①  
 B. ①②  
 C. ①③  
 D. ②③

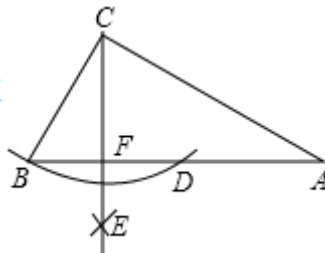
解析: ①当  $n=400$  时, 绿豆发芽的频率为 0.955, 所以绿豆发芽的概率大约是 0.955, 此推断错误;

②根据上表当每批粒数足够大时, 频率逐渐接近于 0.950, 所以估计绿豆发芽的概率是 0.95, 此推断正确;

③若  $n$  为 4000, 估计绿豆发芽的粒数大约为  $4000 \times 0.950 = 3800$  粒, 此结论正确.

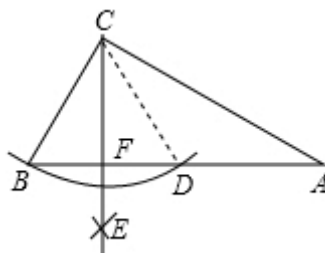
答案: D

9. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 4$ , 以点  $C$  为圆心,  $CB$  长为半径作弧, 交  $AB$  于点  $D$ ; 再分别以点  $B$  和点  $D$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2} BD$  的长为半径作弧, 两弧相交于点  $E$ , 作射线  $CE$  交  $AB$  于点  $F$ , 则  $AF$  的长为 ( )



- A. 5  
 B. 6  
 C. 7  
 D. 8

解析: 连接  $CD$ ,



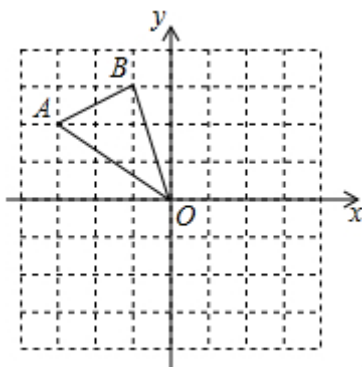
∵ 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 4$ ,

∴  $AB = 2BC = 8$ .

∵作法可知  $BC=CD=4$ ,  $CE$  是线段  $BD$  的垂直平分线,  
 ∴ $CD$  是斜边  $AB$  的中线,  
 ∴ $BD=AD=4$ ,  
 ∴ $BF=DF=2$ ,  
 ∴ $AF=AD+DF=4+2=6$ .

答案: B

10. 如图所示, 若将  $\triangle ABO$  绕点  $O$  顺时针旋转  $180^\circ$  后得到  $\triangle A_1B_1O$ , 则  $A$  点的对应点  $A_1$  点的坐标是 ( )



- A. (3, -2)
- B. (3, 2)
- C. (2, 3)
- D. (2, -3)

解析: 将  $\triangle ABC$  绕点  $O$  顺时针旋转  $180^\circ$  就是把  $\triangle ABC$  上的每一个点绕点  $O$  顺时针旋转  $180^\circ$ , 就是作各点关于原点的对称点.

∵点  $A$  的坐标是  $(-3, 2)$ ,  
 ∴点  $A$  关于点  $O$  的对称点  $A'$  点的坐标是  $(3, -2)$ .

答案: A

二. 填空题(本大题共有 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 16 的算术平方根是\_\_\_\_\_.

解析: 根据算术平方根的定义,

$$\because 4^2=16,$$

$$\therefore \sqrt{16}=4.$$

答案: 4

12. 将多项式  $xy^2-4xy+4y$  因式分解: \_\_\_\_\_.

解析: 直接找出公因式提取公因式分解因式:

$$xy^2-4xy+4y$$

$$=y(xy-4x+4).$$

答案:  $y(xy-4x+4)$

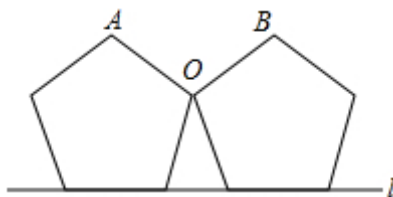
13. 化简  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$  结果是\_\_\_\_\_.

$$\text{解析: 原式} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x^2-1}$$

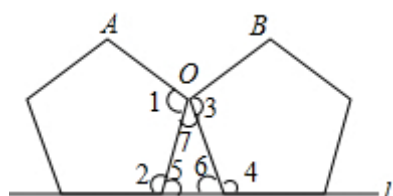
$$= \frac{1}{x-1}$$

答案:  $\frac{1}{x-1}$

14. 两个完全相同的正五边形都有一边在直线  $l$  上, 且有一个公共顶点  $O$ , 其摆放方式如图所示, 则  $\angle AOB$  等于\_\_\_\_\_度.



解析: 如图



由正五边形的内角和, 得  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 108^\circ$ ,

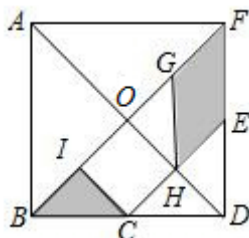
$\angle 5 = \angle 6 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ ,

$\angle 7 = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ .

$\angle AOB = 360^\circ - 108^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 108^\circ$ .

答案: 108

15. 七巧板是我们祖先的一项创造, 被誉为“东方魔板”, 如图所示是一副七巧板, 若已知  $S_{\triangle BIC} = 1$ , 据七巧板制作过程的认识, 求出平行四边形 EFGH\_\_\_\_\_.



解析: 由七巧板性质可知,  $BI = IC = CH = HE$ .

又  $\because S_{\triangle BIC} = 1, \angle BIC = 90^\circ$ ,

$$\therefore \frac{1}{2} BI \cdot IC = 1,$$

$$\therefore BI = IC = \sqrt{2},$$

$$\therefore BC = \sqrt{BI^2 + IC^2} = 2,$$

$$\therefore EF = BC = 2, FG = EH = BI = \sqrt{2},$$

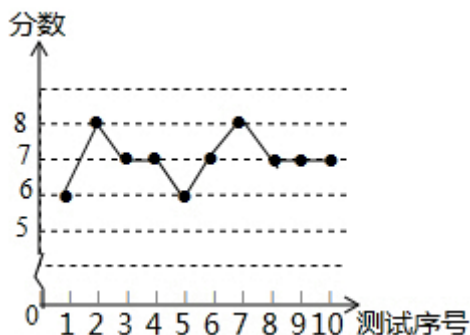
$$\therefore \text{点 } G \text{ 到 } EF \text{ 的距离为: } \sqrt{2} \sin 45^\circ,$$

$$\therefore \text{平行四边形 EFGH 的面积} = EF \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

答案: 2

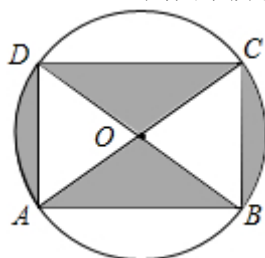
16. 垫球是排球队常规训练的重要项目之一. 如图所示的数据是运动员张华十次垫球测的成绩. 测试规则为每次连续接球 10 个, 每垫球到位 1 个记 1 分. 则运动员张华测试成绩的众数是\_\_\_\_\_.



解析：根据众数定义：一组数据中出现次数最多的数据叫做众数可知，运动员张华测试成绩的众数是 7.

答案：7

17. 如图是某商品的标志图案，AC 与 BD 是  $\odot O$  的两条直径，首尾顺次连接点 A、B、C、D，得到四边形 ABCD，若  $AC=10\text{cm}$ ， $\angle BAC=36^\circ$ ，则图中阴影部分的面积为\_\_\_\_\_.

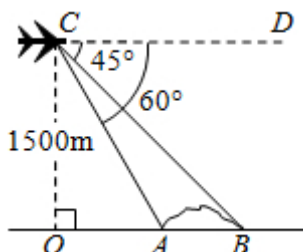


解析： $\because AC$  与  $BD$  是  $\odot O$  的两条直径，  
 $\therefore \angle ABC = \angle ADC = \angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ，  
 $\therefore$  四边形 ABCD 是矩形，  
 $\therefore \triangle ABO$  与  $\triangle CDO$  的面积的和 =  $\triangle AOD$  与  $\triangle BOC$  的面积的和，  
 $\therefore$  图中阴影部分的面积 =  $S_{\text{扇形} AOD} + S_{\text{扇形} BOC} = 2S_{\text{扇形} AOD}$ ，  
 $\because OA = OB$ ，  
 $\therefore \angle BAC = \angle ABO = 36^\circ$ ，  
 $\therefore \angle AOD = 72^\circ$ ，

$\therefore$  图中阴影部分的面积 =  $2 \times \frac{72\pi \times 5^2}{360} = 10\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

答案： $10\pi \text{ cm}^2$

18. 如图所示，某高速公路建设中需要确定隧道 AB 的长度. 已知在离地面 1500m 高度 C 处的飞机上，测量人员测得正前方 A、B 两点处的俯角分别为  $60^\circ$  和  $45^\circ$ . 则隧道 AB 的长为\_\_\_\_\_. (参考数据： $\sqrt{3} = 1.73$ )



解析：由题意得  $\angle CAO = 60^\circ$ ， $\angle CBO = 45^\circ$ ，  
 $\therefore OA = 1500 \times \tan 30^\circ = 1500 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 500\sqrt{3}$ ， $OB = OC = 1500$ ，  
 $\therefore AB = 1500 - 500\sqrt{3} \approx 635 \text{ (m)}$ .

答：隧道 AB 的长约为 635m.

答案：635

三、解答题(本大题共有 8 个小题, 第 19-25 题每小题 8 分, 第 26 题 10 分, 共 66 分. 解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程)

19. 计算:  $-(-2)^2 + |-3| - 2018^0 \times \sqrt[3]{27}$

解析: 原式利用乘方的意义, 绝对值的代数意义, 立方根定义, 以及零指数幂法则计算即可求出值.

答案: 原式 $=-4+3-1 \times 3=-4$ .

20. 先化简, 再求值:  $x(x+1)-(x+1)(x-1)$ , 其中  $x=2018$ .

解析: 原式第一项利用单项式乘以多项式法则计算, 第二项利用平方差公式化简, 去括号合并得到最简结果, 将  $x$  的值代入化简后的式子中计算, 即可求出值.

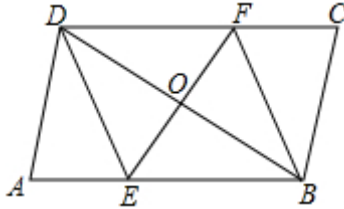
答案: 原式 $=x^2+x-(x^2-1)$

$=x^2+x-x^2+1$

$=x+1$ ,

当  $x=2018$  时, 原式 $=2019$ .

21. 如图所示, 平行四边形 ABCD 中, 过对角线 BD 中点 O 的直线分别交 AB, CD 边于点 E, F.



(1) 求证: 四边形 BEDF 是平行四边形;

(2) 请添加一个条件使四边形 BEDF 为菱形.

解析: (1) 根据平行四边形 ABCD 的性质, 判定  $\triangle BOE \cong \triangle DOF$  (ASA), 得出四边形 BEDF 的对角线互相平分, 进而得出结论;

(2) 根据菱形的性质作出判断: EF 与 BD 互相垂直平分;

答案: (1)  $\because$  四边形 ABCD 是平行四边形, O 是 BD 的中点,

$\therefore AB \parallel DC, OB=OD$ ,

$\therefore \angle OBE = \angle ODF$ ,

又  $\because \angle BOE = \angle DOF$ ,

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOF$  (ASA),

$\therefore EO=FO$ ,

$\therefore$  四边形 BEDF 是平行四边形;

(2)  $EF \perp BD$ .

$\because$  四边形 BEDF 是平行四边形,

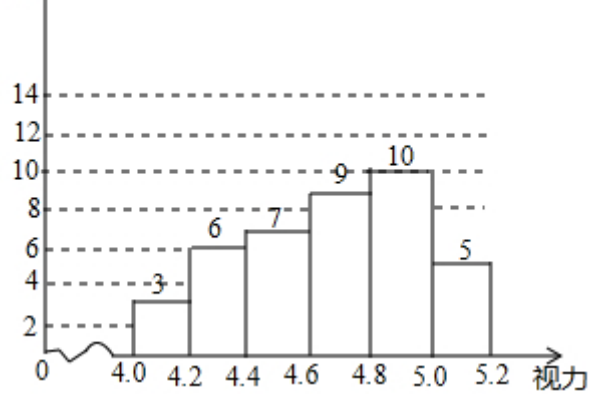
$\therefore EF \perp BD$ ,

$\therefore$  平行四边形 BEDF 是菱形.

22. 为了保护视力, 学校开展了全校性的视力保健活动, 活动前, 随机抽取部分学生, 检查他们的视力, 结果如图所示(数据包括左端点不包括右端点, 精确到 0.1); 活动后, 再次检查这部分学生的视力, 结果如表所示.



抽取的学生活动前视力频数分布直方图



分组	频数
$4.0 \leq x < 4.2$	2
$4.2 \leq x < 4.4$	3
$4.4 \leq x < 4.6$	5
$4.6 \leq x < 4.8$	8
$4.8 \leq x < 5.0$	17
$5.0 \leq x < 5.2$	5

- 求所抽取的学生人数；
- 若视力达到 4.8 及以上为达标，估计活动前该校学生的视力达标率；
- 请选择适当的统计量，从两个不同的角度分析活动前后相关数据，并评价视力保健活动的效果。

解析：(1) 求出频数之和即可。

(2) 根据合格率 =  $\frac{\text{合格人数}}{\text{总人数}} \times 100\%$  即可解决问题。

(3) 从两个不同的角度分析即可，答案不唯一。

答案：(1)  $\because$  频数之和 = 40，  
 $\therefore$  所抽取的学生人数 40 人。

(2) 活动前该校学生的视力达标率 =  $\frac{15}{40} = 37.5\%$ 。

(3) ① 视力  $4.2 \leq x < 4.4$  之间活动前有 6 人，活动后只有 3 人，人数明显减少。

② 活动前合格率 37.5%，活动后合格率 55%，  
 视力保健活动的效果比较好。

23. 某商场计划购进一批甲、乙两种玩具，已知一件甲种玩具的进价与一件乙种玩具的进价的和为 40 元，用 90 元购进甲种玩具的件数与用 150 元购进乙种玩具的件数相同。

(1) 求每件甲种、乙种玩具的进价分别是多少元？

(2) 商场计划购进甲、乙两种玩具共 48 件，其中甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数，商场决定此次进货的总资金不超过 1000 元，求商场共有几种进货方案？

解析：(1) 设甲种玩具进价  $x$  元/件，则乙种玩具进价为  $(40-x)$  元/件，根据已知一件甲种玩具的进价与一件乙种玩具的进价的和为 40 元，用 90 元购进甲种玩具的件数与用 150 元购进乙种玩具的件数相同可列方程求解。

(2) 设购进甲种玩具  $y$  件，则购进乙种玩具  $(48-y)$  件，根据甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数，商场决定此次进货的总资金不超过 1000 元，可列出不等式组求解。

答案：(1) 设甲种玩具进价  $x$  元/件，则乙种玩具进价为  $(40-x)$  元/件，

$$\frac{90}{x} = \frac{150}{40-x}$$

$x=15$ ，

经检验  $x=15$  是原方程的解。

$$\therefore 40 - x = 25.$$

甲、乙两种玩具分别是 15 元/件，25 元/件；

(2) 设购进甲种玩具  $y$  件，则购进乙种玩具  $(48 - y)$  件，

$$\begin{cases} y < 48 - y \\ 15y + 25(48 - y) \leq 1000 \end{cases},$$

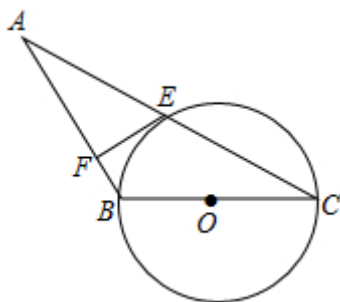
解得  $20 \leq y < 24$ .

因为  $y$  是整数，甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数，

$\therefore y$  取 20, 21, 22, 23,

共有 4 种方案.

24. 如图所示，在  $\triangle ABC$  中， $AB = CB$ ，以  $BC$  为直径的  $\odot O$  交  $AC$  于点  $E$ ，过点  $E$  作  $\odot O$  的切线交  $AB$  于点  $F$ .



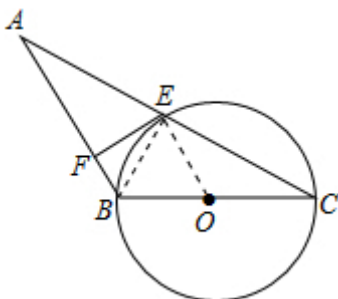
(1) 求证： $EF \perp AB$ ；

(2) 若  $AC = 16$ ， $\odot O$  的半径是 5，求  $EF$  的长.

解析：(1) 连接  $EO$ ，由  $OE = OC$ 、 $AB = CB$  知  $\angle A = \angle OEC$ ，从而得  $AB \parallel EO$ ，根据  $EF \perp OE$  得  $EF \perp AB$ ，即可得证；

(2) 连结  $BE$ ，根据圆的直径和直角三角形的性质解答即可.

答案：(1) 证明：连结  $OE$ .



$$\because OE = OC,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle OCA,$$

$$\because AB = CB,$$

$$\therefore \angle A = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle A = \angle OEC,$$

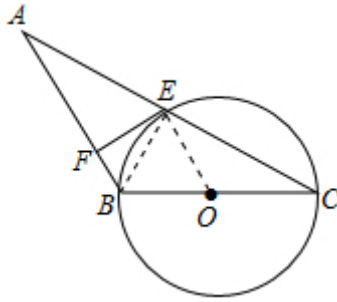
$$\therefore OE \parallel AB,$$

$\because EF$  是  $\odot O$  的切线，

$$\therefore EF \perp OE,$$

$$\therefore EF \perp AB.$$

(2) 连结  $BE$ .



$\because BC$  是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle BEC = 90^\circ$ ,  
 又  $AB = CB$ ,  $AC = 16$ ,  
 $\therefore AE = EC = \frac{1}{2} AC = 8$ ,  
 $\because AB = CB = 2BO = 10$ ,  
 $\therefore BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ ,  
 又  $\triangle ABE$  的面积 =  $\triangle BEC$  的面积, 即  $8 \times 6 = 10 \times EF$ ,  
 $\therefore EF = 4.8$

25. 如图所示, 点  $C$  为线段  $OB$  的中点,  $D$  为线段  $OA$  上一点. 连结  $AC$ 、 $BD$  交于点  $P$ .

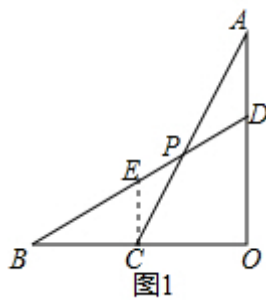


图1

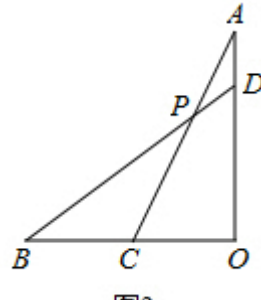


图2

【问题引入】(1) 如图 1, 若点  $P$  为  $AC$  的中点, 求  $\frac{AD}{DO}$  的值.

温馨提示: 过点  $C$  作  $CE \parallel AO$  交  $BD$  于点  $E$ .

【探索研究】(2) 如图 2, 点  $D$  为  $OA$  上的任意一点 (不与点  $A$ 、 $O$  重合), 求证:  $\frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AO}$ .

【问题解决】(3) 如图 2, 若  $AO = BO$ ,  $AO \perp BO$ ,  $\frac{AD}{AO} = \frac{1}{4}$ , 求  $\tan \angle BPC$  的值.

解析: (1) 过点  $C$  作  $CE \parallel OA$  交  $BD$  于点  $E$ , 得出  $\triangle BCE \sim \triangle BOD$ , 那么  $\frac{CE}{OD} = \frac{BC}{BO}$ , 由点  $C$  为线段  $OB$  的中点得出  $BC = \frac{1}{2} BO$ , 那么  $CE = \frac{1}{2} DO$ . 再根据 ASA 证明  $\triangle ECP \cong \triangle DAP$ , 得出  $AD = CE = \frac{1}{2}$

$DO$ , 即  $\frac{AD}{DO} = \frac{1}{2}$ ;

(2) 过点  $D$  作  $DF \parallel BO$  交  $AC$  于点  $F$ , 根据平行线分线段成比例定理, 得出  $\frac{PD}{PB} = \frac{DF}{BC}$ ,  $\frac{AD}{AO} = \frac{DF}{OC}$ . 由点  $C$  为  $OB$  的中点, 得出  $BC = OC$ , 那么  $\frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AO}$ ;

(3) 过点  $D$  作  $DF \parallel BO$  交  $AC$  于点  $F$ , 由 (2) 可知  $\frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AO} = \frac{1}{4}$ . 设  $AD = t$ , 则  $BO = AO = 4t$ ,  $OD = 3t$ , 在  $\triangle AOB$  中利用勾股定理求出  $BD = 5t$ , 那么  $PD = t$ ,  $PB = 4t$ , 由  $PD = AD$ , 得出  $\angle A = \angle APD = \angle BPC$ , 那么  $\tan \angle BPC = \tan \angle A = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ .

答案: (1) 如图 1, 过点  $C$  作  $CE \parallel OA$  交  $BD$  于点  $E$ ,

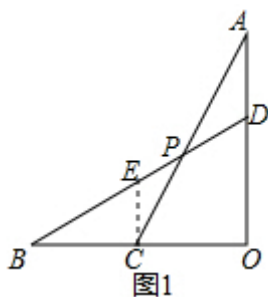


图1

$\therefore \triangle BCE \sim \triangle BOD$ ,

$$\therefore \frac{CE}{OD} = \frac{BC}{BO},$$

又  $BC = \frac{1}{2} BO$ ,  $\therefore CE = \frac{1}{2} DO$ .

$\because CE \parallel OA$ ,  $\therefore \angle ECP = \angle DAP$ ,

又  $\angle EPC = \angle DPA$ ,  $PA = PC$ ,

$\therefore \triangle ECP \cong \triangle DAP$ ,

$$\therefore AD = CE = \frac{1}{2} DO,$$

$$\text{即 } \frac{AD}{DO} = \frac{1}{2};$$

(2) 如图 2, 过点 D 作  $DF \parallel BO$  交 AC 于点 F,

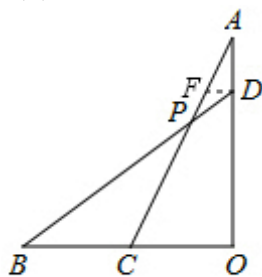


图2

$$\text{则 } \frac{PD}{PB} = \frac{DF}{BC}, \frac{AD}{AO} = \frac{DF}{OC}.$$

$\because$  点 C 为 OB 的中点,

$\therefore BC = OC$ ,

$$\therefore \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AO};$$

(3) 如图 2,  $\because \frac{AD}{AO} = \frac{1}{4}$ ,

$$\text{由 (2) 可知 } \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AO} = \frac{1}{4}.$$

设  $AD = t$ , 则  $BO = AO = 4t$ ,  $OD = 3t$ ,

$\because AO \perp BO$ , 即  $\angle AOB = 90^\circ$ ,

$$\therefore BD = \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} = 5t,$$

$$\therefore PD = t, PB = 4t,$$

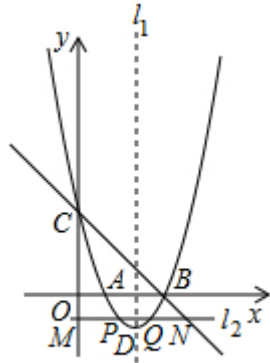
$$\therefore PD = AD,$$

$\therefore \angle A = \angle APD = \angle BPC$ ,

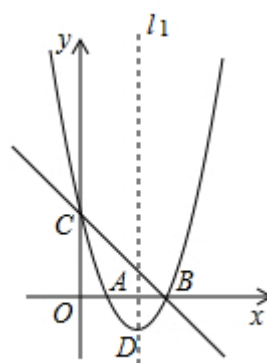
$$\text{则 } \tan \angle BPC = \tan \angle A = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}.$$

26. 如图, 直线  $y = -x + 3$  分别与 x 轴、y 轴交于点 B、C; 抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过点 B、C, 与 x

轴的另一个交点为点A(点A在点B的左侧), 对称轴为  $l_1$ , 顶点为D.



图①



图②(备用图)

(1) 求抛物线  $y=x^2+bx+c$  的解析式.

(2) 点  $M(0, m)$  为  $y$  轴上一动点, 过点  $M$  作直线  $l_2$  平行于  $x$  轴, 与抛物线交于点  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ , 与直线  $BC$  交于点  $N(x_3, y_3)$ , 且  $x_2 > x_1 > 0$ .

①结合函数的图象, 求  $x_3$  的取值范围;

②若三个点  $P$ 、 $Q$ 、 $N$  中恰好有一点是其他两点所连线段的中点, 求  $m$  的值.

解析: (1) 先求出点  $B$ 、 $C$  坐标, 再利用待定系数法即可得出结论;

(2) ①先求出分界点  $l_2$  过点  $D$  和  $C$  时的  $m$  的值, 进而求出  $-1 < y_3 < 3$ , 即可得出结论;

②分直线  $l_2$  在  $x$  轴上方和下方两种情况: 点  $P$ 、 $Q$  关于抛物线的对称轴  $l_1$  对称, 即可得出结论.

答案: (1) 在  $y=-x+3$  中, 令  $x=0$ , 则  $y=3$ ;

令  $y=0$ , 则  $x=3$ ; 得  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 3)$ ,

将点  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 3)$  的坐标代入  $y=x^2+bx+c$

$$\text{得: } \begin{cases} 9+3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\therefore y=x^2-4x+3;$$

(2)  $\because$  直线  $l_2$  平行于  $x$  轴,

$$\therefore y_1=y_2=y_3=m,$$

①如图①,  $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ ,

$\therefore$  顶点为  $D(2, -1)$ ,

当直线  $l_2$  经过点  $D$  时,  $m=-1$ ;

当直线  $l_2$  经过点  $C$  时,  $m=3$

$$\therefore x_2 > x_1 > 0,$$

$$\therefore -1 < y_3 < 3,$$

$$\text{即 } -1 < -x_3+3 < 3,$$

$$\text{得 } 0 < x_3 < 4,$$

②如图①, 当直线  $l_2$  在  $x$  轴的下方时, 点  $Q$  在点  $P$ 、 $N$  之间,

若三个点  $P$ 、 $Q$ 、 $N$  中恰好有一点是其他两点所连线段的中点, 则得  $PQ=QN$ .

$$\therefore x_2 > x_1 > 0,$$

$$\therefore x_3-x_2=x_2-x_1,$$

$$\text{即 } x_3=2x_2-x_1,$$

$\because l_2 \parallel x$  轴, 即  $PQ \parallel x$  轴,

$\therefore$  点  $P$ 、 $Q$  关于抛物线的对称轴  $l_1$  对称,

又抛物线的对称轴  $l_1$  为  $x=2$ ,

$$\therefore 2-x_1=x_2-2,$$

$$\text{即 } x_1=4-x_2,$$

$$\therefore x_3=3x_2-4,$$

将点  $Q(x_2, y_2)$  的坐标代入  $y=x^2-4x+3$

得  $y_2 = x_2^2 - 4x_2 + 3$ , 又  $y_2 = y_3 = -x_3 + 3$

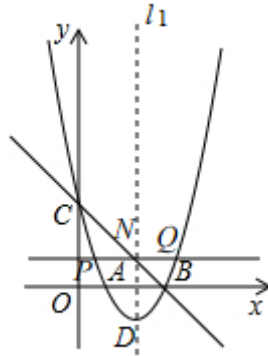
$$\therefore x_2^2 - 4x_2 + 3 = -x_3 + 3,$$

$$\therefore x_2^2 - 4x_2 = -(3x_2 - 4)$$

即  $x_2^2 - x_2 - 4 = 0$ , 解得  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ , (负值已舍去),

$$\therefore m = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + 3 =$$

如图②, 当直线  $l_2$  在  $x$  轴的上方时, 点  $N$  在点  $P$ 、 $Q$  之间,



图②

若三个点  $P$ 、 $Q$ 、 $N$  中恰好有一点是其他两点所连线段的中点, 则得  $PN = NQ$ .

由上可得点  $P$ 、 $Q$  关于直线  $l_1$  对称,

$\therefore$  点  $N$  在抛物线的对称轴  $l_1: x = 2$ ,

又点  $N$  在直线  $y = -x + 3$  上,

$\therefore y_3 = -2 + 3 = 1$ , 即  $m = 1$ .

故  $m$  的值为  $\frac{11 - 3\sqrt{17}}{2}$  或  $1$ .