

2016 年四川省南充市中考真题数学

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分

1. 如果向右走 5 步记为+5，那么向左走 3 步记为()

A. +3

B. -3

C. $+\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

解析：此题主要用正负数来表示具有意义相反的量：向右记为正，则向左就记为负，据此解答即可。

如果向右走 5 步记为+5，那么向左走 3 步记为-3.

答案：B.

2. 下列计算正确的是()

A. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{-x^3} = x\sqrt{-x}$

D. $\sqrt{x^2} = x$

解析：直接利用二次根式的性质分别化简求出答案.

A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，正确；

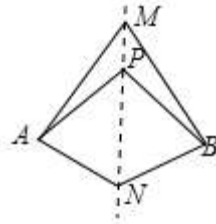
B、 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故此选项错误；

C、 $\sqrt{-x^3} = -x\sqrt{-x}$ ，故此选项错误；

D、 $\sqrt{x^2} = |x|$ ，故此选项错误.

答案：A.

3. 如图，直线 MN 是四边形 AMBN 的对称轴，点 P 是直线 MN 上的点，下列判断错误的是()



- A. $AM=BM$
- B. $AP=BN$
- C. $\angle MAP=\angle MBP$
- D. $\angle ANM=\angle BNM$

解析：∵直线 MN 是四边形 AMBN 的对称轴，

∴点 A 与点 B 对应，

∴ $AM=BM$ ， $AN=BN$ ， $\angle ANM=\angle BNM$ ，

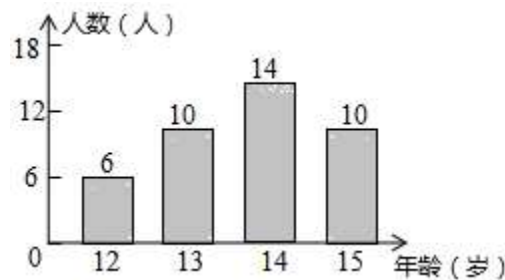
∴点 P 是直线 MN 上的点，

∴ $\angle MAP=\angle MBP$ ，

∴A，C，D 正确，B 错误.

答案：B.

4. 某校共有 40 名初中生参加足球兴趣小组，他们的年龄统计情况如图所示，则这 40 名学生年龄的中位数是()



- A. 12 岁
- B. 13 岁
- C. 14 岁
- D. 15 岁

解析：40 个数最中间的两个数为第 20 个数和第 21 个数，

而第 20 个数和第 21 个数都是 14(岁)，

所以这 40 名学生年龄的中位数是 14 岁.

答案：C.

5. 抛物线 $y=x^2+2x+3$ 的对称轴是()

- A. 直线 $x=1$
- B. 直线 $x=-1$
- C. 直线 $x=-2$
- D. 直线 $x=2$

解析：∵ $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ ，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-1$.

答案：B.

6. 某次列车平均提速 20km/h，用相同的时间，列车提速行驶 400km，提速后比提速前多行驶 100km，设提速前列车的平均速度为 x km/h，下列方程正确的是()

A. $\frac{400}{x} = \frac{400+100}{x+20}$

B. $\frac{400}{x} = \frac{400-100}{x-20}$

C. $\frac{400}{x} = \frac{400+100}{x-20}$

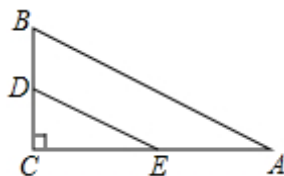
D. $\frac{400}{x} = \frac{400-100}{x+20}$

解析：设提速前列车的平均速度为 x km/h，根据题意可得：

$$\frac{400}{x} = \frac{400-100}{x-20}$$

答案：B.

7. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $BC=1$ ，点 D ， E 分别是直角边 BC ， AC 的中点，则 DE 的长为()



A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $1+\sqrt{3}$

解析：如图， \because 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，

$$\therefore AB=2BC=2.$$

又 \because 点 D 、 E 分别是 AC 、 BC 的中点，

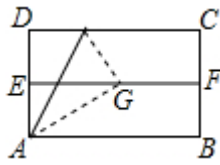
$\therefore DE$ 是 $\triangle ACB$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AB = 1.$$

答案：A.

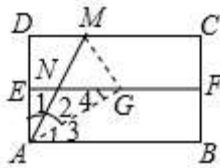
8. 如图，对折矩形纸片 $ABCD$ ，使 AB 与 DC 重合得到折痕 EF ，将纸片展平；再一次折叠，使

点D 落到 EF 上点 G 处，并使折痕经过点 A，展平纸片后 $\angle DAG$ 的大小为()



- A. 30°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 75°

解析：如图所示：



由题意可得： $\angle 1 = \angle 2$ ， $AN = MN$ ， $\angle MGA = 90^\circ$ ，

则 $NG = \frac{1}{2} AM$ ，故 $AN = NG$ ，

则 $\angle 2 = \angle 4$ ，

$\because EF \parallel AB$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle 3$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \frac{1}{3} \times 90^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DAG = 60^\circ$.

答案： C.

9. 不等式 $\frac{x+1}{2} > \frac{2x+2}{3} - 1$ 的正整数解的个数是()

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

解析：去分母得： $3(x+1) > 2(2x+2) - 6$ ，

去括号得： $3x+3 > 4x+4-6$ ，

移项得： $3x-4x > 4-6-3$ ，

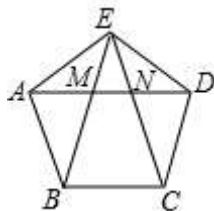
合并同类项得： $-x > -5$ ，

系数化为 1 得： $x < 5$ ，

故不等式的正整数解有 1、2、3、4 这 4 个.

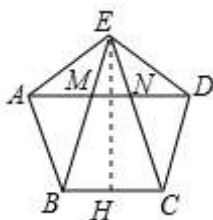
答案： D.

10. 如图，正五边形的边长为 2，连结对角线 AD，BE，CE，线段 AD 分别与 BE 和 CE 相交于点 M，N. 给出下列结论：① $\angle AME=108^\circ$ ；② $AN^2=AM \cdot AD$ ；③ $MN=3-\sqrt{5}$ ；④ $S_{\triangle EBC}=2\sqrt{5}-1$. 其中正确结论的个数是()



- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

解析：如图，



$\because \angle BAE = \angle AED = 108^\circ$,
 $\because AB = AE = DE$,
 $\therefore \angle ABE = \angle AEB = \angle EAD = 36^\circ$,
 $\therefore \angle AME = 180^\circ - \angle EAM - \angle AEM = 108^\circ$, 故①正确;
 $\because \angle AEN = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, $\angle ANE = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$,
 $\therefore \angle AEN = \angle ANE$,
 $\therefore AE = AN$,
 同理 $DE = DM$,
 $\therefore AE = DM$,
 $\because \angle EAD = \angle AEM = \angle ADE = 36^\circ$,
 $\therefore \triangle AEM \sim \triangle ADE$,

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AM}{AE} ,$$

$\therefore AE^2 = AM \cdot AD$;
 $\therefore AN^2 = AM \cdot AD$; 故②正确;
 $\because AE^2 = AM \cdot AD$,
 $\therefore 2^2 = (2-MN)(4-MN)$,

$\therefore MN = 3 - \sqrt{5}$; 故③正确;

在正五边形 ABCDE 中，

$$\because BE = CE = AD = 1 + \sqrt{5} ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} BC = 1,$$

$$\therefore EH = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 1^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

$$\therefore S_{\square EBC} = \frac{1}{2} BC \cdot EH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \text{ 故④错误.}$$

答案：C.

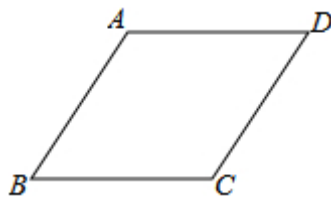
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分

11. 计算： $\frac{xy^2}{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：考察分式的约分， $\frac{xy^2}{xy} = \frac{xy \cdot y}{xy} = y$

答案：y.

12. 如图，菱形 ABCD 的周长是 8cm，AB 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm.



解析：∵ 四边形 ABCD 是菱形，

$$\therefore AB = BC = CD = DA,$$

$$\therefore AB + BC + CD + DA = 8\text{cm},$$

$$\therefore AB = 2\text{cm},$$

$$\therefore AB \text{ 的长为 } 2\text{cm}.$$

答案：2.

13. 计算 22, 24, 26, 28, 30 这组数据的方差是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析：22, 24, 26, 28, 30 的平均数是 $(22 + 24 + 26 + 28 + 30) \div 5 = 26$;

$$S^2 = \frac{1}{5} [(22 - 26)^2 + (24 - 26)^2 + (26 - 26)^2 + (28 - 26)^2 + (30 - 26)^2] = 8.$$

答案：8.

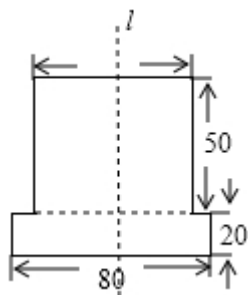
14. 如果 $x^2 + mx + 1 = (x + n)^2$ ，且 $m > 0$ ，则 n 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析：∵ $x^2 + mx + 1 = (x \pm 1)^2 = (x + n)^2$,

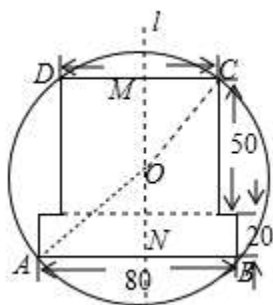
$$\therefore m = \pm 2, n = \pm 1,$$

$\because m > 0,$
 $\therefore m = 2,$
 $\therefore n = 1.$
 答案: 1.

15. 如图是由两个长方形组成的工件平面图(单位: mm), 直线 l 是它的对称轴, 能完全覆盖这个平面图形的圆面的最小半径是_____mm.



解析: 如图, 设圆心为 O , 连接 AO , CO ,



\because 直线 l 是它的对称轴,
 $\therefore CM = 30, AN = 40,$
 $\because CM^2 + OM^2 = AN^2 + ON^2,$
 $\therefore 30^2 + OM^2 = 40^2 + (70 - OM)^2,$
 解得: $OM = 40,$

$$\therefore OC = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50.$$

\therefore 能完全覆盖这个平面图形的圆面的最小半径是 50mm.

答案: 50.

16. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上且经过点 $(1, 1)$, 双曲线 $y = \frac{1}{2x}$ 经过点 (a, bc) , 给出

下列结论: ① $bc > 0$; ② $b + c > 0$; ③ b, c 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a - 1)x + \frac{1}{2a} = 0$ 的

两个实数根; ④ $a - b - c \geq 3$. 其中正确结论是_____ (填写序号)

解析: \because 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上且经过点 $(1, 1)$, 双曲线 $y = \frac{1}{2x}$ 经过点 (a, bc) ,

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ a + b + c = 1 \\ bc = \frac{1}{2a} \end{cases}$$

$\therefore bc > 0$, 故①正确;

$\therefore a > 1$ 时, 则 b, c 均小于 0, 此时 $b+c < 0$,

当 $a=1$ 时, $b+c=0$, 则与题意矛盾,

当 $0 < a < 1$ 时, 则 b, c 均大于 0, 此时 $b+c > 0$,

故②错误;

$\therefore x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2a} = 0$ 可以转化为: $x^2 + (b+c)x + bc = 0$, 得 $x=b$ 或 $x=c$, 故③正确;

$\therefore b, c$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2a} = 0$ 的两个实数根,

$\therefore a-b-c = a - (b+c) = a + (a-1) = 2a-1$,

当 $a > 1$ 时, $2a-1 > 3$,

当 $0 < a < 1$ 时, $-1 < 2a-1 < 3$,

故④错误.

综上所述, 正确的有①③.

答案: ①③.

三、解答题: 本大题共 9 小题, 共 72 分

17. 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{18} + (\pi+1)^0 - \sin 45^\circ + |\sqrt{2}-2|$

解析: 原式利用二次根式性质, 零指数幂法则, 特殊角的三角函数值, 以及绝对值的代数意义化简, 计算即可得到结果.

答案: 原式 = $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 - \sqrt{2} = 3$.

18. 在校园文化艺术节中, 九年级一班有 1 名男生和 2 名女生获得美术奖, 另有 2 名男生和 2 名女生获得音乐奖.

(1) 从获得美术奖和音乐奖的 7 名学生中选取 1 名参加颁奖大会, 求刚好是男生的概率.

解析: (1) 直接根据概率公式求解.

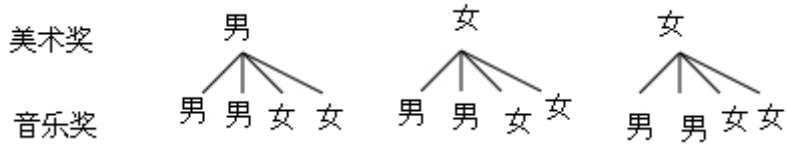
答案: (1) 从获得美术奖和音乐奖的 7 名学生中选取 1 名参加颁奖大会, 刚好是男生的概率

$$= \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}.$$

(2) 分别从获得美术奖、音乐奖的学生中各选取 1 名参加颁奖大会，用列表或树状图求刚好是一男生一女生的概率。

解析：(2) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，再找出刚好是一男生一女生的结果数，然后根据概率公式求解。

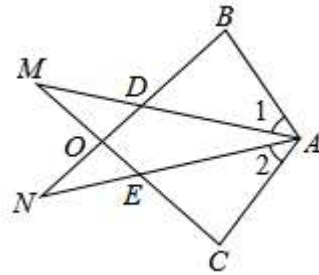
答案：(2) 画树状图为：



共有 12 种等可能的结果数，其中刚好是一男生一女生的结果数为 6，

所以刚好是一男生一女生的概率 = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

19. 已知 $\triangle ABN$ 和 $\triangle ACM$ 位置如图所示， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle 1=\angle 2$ 。



(1) 求证： $BD=CE$ 。

解析：(1) 由 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，得出对应边相等即可。

答案：(1) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle 1=\angle 2 \\ AD=AE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，

$\therefore BD=CE$ 。

(2) 求证： $\angle M=\angle N$ 。

解析：(2) 证出 $\angle BAN=\angle CAM$ ，由全等三角形的性质得出 $\angle B=\angle C$ ，由 AAS 证明 $\triangle ACM \cong \triangle ABN$ ，得出对应角相等即可。

答案：(2) $\because \angle 1=\angle 2$ ，

$\therefore \angle 1+\angle DAE=\angle 2+\angle DAE$ ，

即 $\angle BAN=\angle CAM$ ，

由 (1) 得： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，

$\therefore \angle B=\angle C$ ，

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle ABN$ 中，

$$\begin{cases} \angle C = \angle B \\ AC = AB \\ \angle CAM = \angle BAN \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$ (ASA),

$\therefore \angle M = \angle N$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + (2m+1) = 0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围.

解析: (1) 根据判别式的意义得到 $\Delta = (-6)^2 - 4(2m+1) \geq 0$, 然后解不等式即可.

答案: (1) 根据题意得 $\Delta = (-6)^2 - 4(2m+1) \geq 0$,

解得 $m \leq 4$.

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $2x_1x_2 + x_1 + x_2 \geq 20$, 求 m 的取值范围.

解析: (2) 根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 2m+1$, 再利用 $2x_1x_2 + x_1 + x_2 \geq 20$ 得到 $2(2m+1) + 6 \geq 20$, 然后解不等式和利用 (1) 中的结论可确定满足条件的 m 的取值范围.

答案: (2) 根据题意得 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 2m+1$,

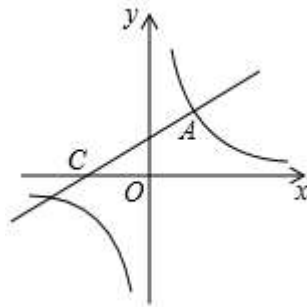
而 $2x_1x_2 + x_1 + x_2 \geq 20$,

所以 $2(2m+1) + 6 \geq 20$, 解得 $m \geq 3$,

而 $m \leq 4$.

所以 m 的范围为 $3 \leq m \leq 4$.

21. 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与双曲线相交于点 $A(m, 3)$, 与 x 轴交于点 C .



(1) 求双曲线解析式.

解析: (1) 把 A 坐标代入直线解析式求出 m 的值, 确定出 A 坐标, 即可确定出双曲线解析式.

答案: (1) 把 $A(m, 3)$ 代入直线解析式得: $3 = \frac{1}{2}m + 2$, 即 $m = 2$,

$\therefore A(2, 3)$,

把 A 坐标代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $k = 6$,

则双曲线解析式为 $y = \frac{6}{x}$.

(2) 点 P 在 x 轴上, 如果 $\triangle ACP$ 的面积为 3, 求点 P 的坐标.

解析: (2) 设 $P(x, 0)$, 表示出 PC 的长, 高为 A 纵坐标, 根据三角形 ACP 面积求出 x 的值, 确定出 P 坐标即可.

答案: (2) 对于直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$, 令 $y = 0$, 得到 $x = -4$, 即 $C(-4, 0)$,

设 $P(x, 0)$, 可得 $PC = |x + 4|$,

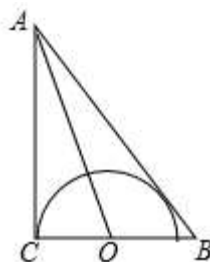
$\because \triangle ACP$ 面积为 3,

$\therefore \frac{1}{2} |x + 4| \cdot 3 = 3$, 即 $|x + 4| = 2$,

解得: $x = -2$ 或 $x = -6$,

则 P 坐标为 $(-2, 0)$ 或 $(-6, 0)$.

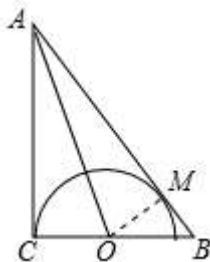
22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 O, $OC = 1$, 以点 O 为圆心 OC 为半径作半圆.



(1) 求证: AB 为 $\odot O$ 的切线.

解析: (1) 如图作 $OM \perp AB$ 于 M, 根据角平分线性质的定理, 可以证明 $OM = OC$, 由此即可证明.

答案: (1) 如图, 作 $OM \perp AB$ 于 M,



$\because OA$ 平分 $\angle CAB$, $OC \perp AC$, $OM \perp AB$,

$\therefore OC = OM$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 如果 $\tan \angle CAO = \frac{1}{3}$, 求 $\cos B$ 的值.

解析：(2) 设 $BM=x$, $OB=y$, 列方程组即可解决问题.

答案：(2) 设 $BM=x$, $OB=y$, 则 $y^2-x^2=1$ ①,

$$\because \cos B = \frac{BM}{OB} = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{y+1}{x+3},$$

$$\therefore x^2+3x=y^2+y \quad \text{②},$$

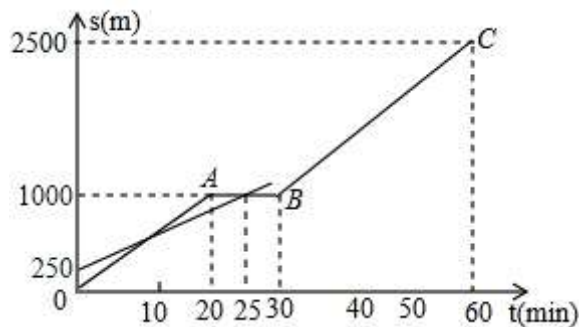
由①②可以得到: $y=3x-1$,

$$\therefore (3x-1)^2-x^2=1,$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \cos B = \frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$$

23. 小明和爸爸从家步行去公园, 爸爸先出发一直匀速前行, 小明后出发. 家到公园的距离为 2500m, 如图是小明和爸爸所走的路程 s (m) 与步行时间 t (min) 的函数图象.



(1) 直接写出小明所走路程 s 与时间 t 的函数关系式.

解析：(1) 根据函数图形得到 $0 \leq t \leq 20$ 、 $20 < t \leq 30$ 、 $30 < t \leq 60$ 时, 小明所走路程 s 与时间 t 的函数关系式.

$$\text{答案：(1) } s = \begin{cases} 50t & (0 \leq t \leq 20) \\ 1000 & (20 < t \leq 30) \\ 50t - 500 & (30 < t \leq 60) \end{cases}.$$

(2) 小明出发多少时间与爸爸第三次相遇?

解析：(2) 利用待定系数法求出小明的爸爸所走的路程 s 与步行时间 t 的函数关系式, 列出二元一次方程组解答即可.

答案：(2) 设小明的爸爸所走的路程 s 与步行时间 t 的函数关系式为: $s=kt+b$,

$$\text{则} \begin{cases} 25k + b = 1000 \\ b = 250 \end{cases},$$

$$\text{解得,} \begin{cases} k = 30 \\ b = 250 \end{cases},$$

则小明和爸爸所走的路程与步行时间的关系式为： $s = 30t + 250$ ，
当 $50t - 500 = 30t + 250$ ，即 $t = 37.5\text{min}$ 时，小明与爸爸第三次相遇。

(3) 在速度都不变的情况下，小明希望比爸爸早 20min 到达公园，则小明在步行过程中停留的时间需作怎样的调整？

解析：(3) 分别计算出小明的爸爸到达公园需要的时间、小明到达公园需要的时间，计算即可。

答案：(3) $30t + 250 = 2500$ ，

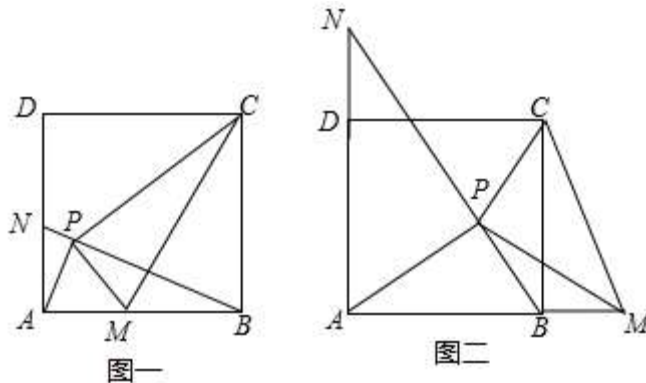
解得， $t = 75$ ，

则小明的爸爸到达公园需要 75min，

\because 小明到达公园需要的时间是 60min，

\therefore 小明希望比爸爸早 20min 到达公园，则小明在步行过程中停留的时间需减少 5min。

24. 已知正方形 ABCD 的边长为 1，点 P 为正方形内一动点，若点 M 在 AB 上，且满足 $\triangle PBC \sim \triangle PAM$ ，延长 BP 交 AD 于点 N，连结 CM。



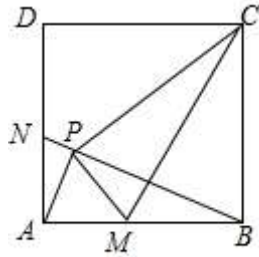
(1) 如图一，若点 M 在线段 AB 上，求证： $AP \perp BN$ ； $AM = AN$ 。

解析：(1) 由 $\triangle PBC \sim \triangle PAM$ ，推出 $\angle PAM = \angle PBC$ ，由 $\angle PBC + \angle PBA = 90^\circ$ ，推出 $\angle PAM + \angle PBA = 90^\circ$

即可证明 $AP \perp BN$ ，由 $\triangle PBC \sim \triangle PAM$ ，推出 $\frac{PM}{PC} = \frac{AM}{BC} = \frac{PA}{PB}$ ，由 $\triangle BAP \sim \triangle BNA$ ，推出

$\frac{PA}{PB} = \frac{AN}{BC}$ ，得到 $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{BC}$ ，由此即可证明。

答案：(1) 如图一中，



图一

∵ 四边形 ABCD 是正方形,
 ∴ $AB=BC=CD=AD$, $\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90^\circ$,
 ∴ $\triangle PBC \sim \triangle PAM$,

$$\therefore \angle PAM = \angle PBC, \quad \frac{PM}{PC} = \frac{AM}{BC} = \frac{PA}{PB},$$

$$\therefore \angle PBC + \angle PBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAM + \angle PBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore AP \perp BN,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle ABN, \quad \angle APB = \angle BAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAP \sim \triangle BNA,$$

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{AN}{BC},$$

$$\therefore \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{BC},$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore AN = AM.$$

(2) ①如图二, 在点 P 运动过程中, 满足 $\triangle PBC \sim \triangle PAM$ 的点 M 在 AB 的延长线上时, $AP \perp BN$ 和 $AM=AN$ 是否成立? (不需说明理由)

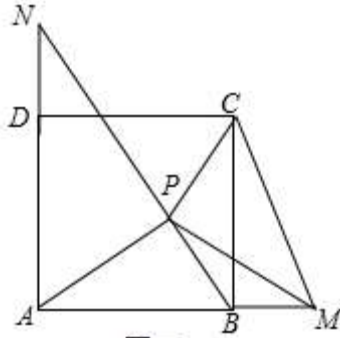
②是否存在满足条件的点 P, 使得 $PC = \frac{1}{2}$? 请说明理由.

解析: (2) ①结论仍然成立, 证明方法类似(1). ②这样的点 P 不存在. 利用反证法证明. 假设

$PC = \frac{1}{2}$, 推出矛盾即可.

答案: (2) ①仍然成立, $AP \perp BN$ 和 $AM=AN$.

理由如图二中,



图二

∵ 四边形 ABCD 是正方形,
 ∴ $AB=BC=CD=AD$, $\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90^\circ$,
 ∴ $\triangle PBC \sim \triangle PAM$,

$$\therefore \angle PAM = \angle PBC, \quad \frac{PM}{PC} = \frac{AM}{BC} = \frac{PA}{PB},$$

$$\therefore \angle PBC + \angle PBA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle PAM + \angle PBA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ ,$$

$$\therefore AP \perp BN,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle ABN, \quad \angle APB = \angle BAN = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle BAP \sim \triangle BNA,$$

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{AN}{BC},$$

$$\therefore \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{BC},$$

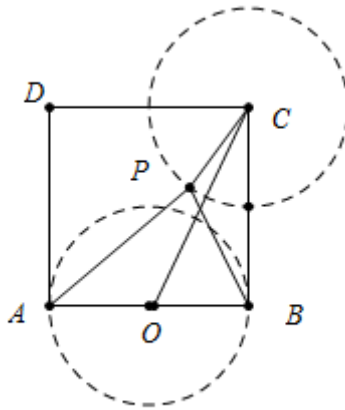
$$\therefore AB=BC,$$

$$\therefore AN=AM.$$

② 这样的点 P 不存在.

理由: 假设 $PC = \frac{1}{2}$,

如图三中,



图三

以点 C 为圆心 $\frac{1}{2}$ 为半径画圆，以 AB 为直径画圆，

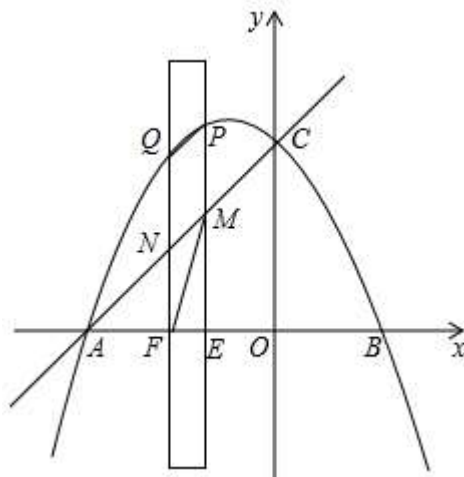
$$CO = \sqrt{BC^2 + BO^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 + \frac{1}{2},$$

\therefore 两个圆外离， $\therefore \angle APB < 90^\circ$ ，这与 $AP \perp PB$ 矛盾，

\therefore 假设不可能成立，

\therefore 满足 $PC = \frac{1}{2}$ 的点 P 不存在.

25. 如图，抛物线与 x 轴交于点 A(-5, 0) 和点 B(3, 0). 与 y 轴交于点 C(0, 5). 有一宽度为 1，长度足够的矩形 (阴影部分) 沿 x 轴方向平移，与 y 轴平行的一组对边交抛物线于点 P 和 Q，交直线 AC 于点 M 和 N. 交 x 轴于点 E 和 F.



(1) 求抛物线的解析式.

解析: (1) 设抛物线为 $y = a(x+5)(x-3)$, 把点 (0, 5) 代入即可解决问题.

答案: (1) \because 抛物线与 x 轴交于点 A(-5, 0), B(3, 0),

∴可以假设抛物线为 $y=a(x+5)(x-3)$ ，把点 $(0, 5)$ 代入得到 $a = -\frac{1}{3}$ ，

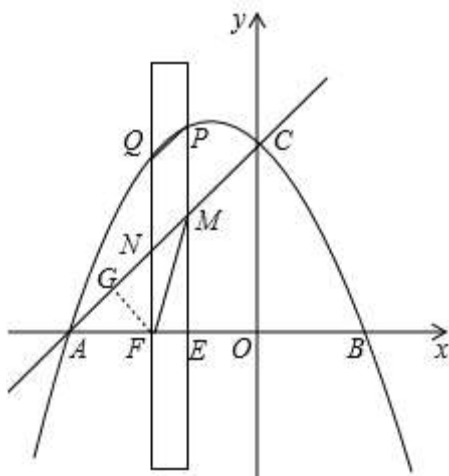
∴抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 5$ 。

(2) 当点 M 和 N 都在线段 AC 上时，连接 MF ，如果 $\sin\angle AMF = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求点 Q 的坐标。

解析：(2) 作 $FG \perp AC$ 于 G ，设点 F 坐标 $(m, 0)$ ，根据 $\sin\angle AMF = \frac{FG}{FM} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，列出方程

即可解决问题。

答案：(2) 作 $FG \perp AC$ 于 G ，设点 F 坐标 $(m, 0)$ ，



则 $AF=m+5$ ， $AE=EM=m+6$ ， $FG = \frac{\sqrt{2}}{2}(m+5)$ ， $FM = \sqrt{EF^2 + EM^2} = \sqrt{1+(m+6)^2}$ ，

$$\because \sin\angle AMF = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \frac{FG}{FM} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(m+5)}{\sqrt{1+(m+6)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 整理得到 } 2m^2+19m+44=0,$$

$$\therefore (m+4)(2m+11)=0,$$

$$\therefore m=-4 \text{ 或 } -5.5(\text{舍弃}),$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 坐标 } \left(-4, \frac{7}{3}\right).$$

(3) 在矩形的平移过程中, 当以点 P, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 M 的坐标.

解析: (3) ①当 MN 是对角线时, 设点 F(m, 0), 由 QN=PM, 列出方程即可解决问题. ②当 MN

为边时, $MN=PQ=\sqrt{2}$, 设点 Q(m, $-\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 5$) 则点 P(m+1, $-\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 6$), 代入

抛物线解析式, 解方程即可.

答案: (3) ①当 MN 是对角线时, 设点 F(m, 0).

∵ 直线 AC 解析式为 $y=x+5$,

∴ 点 N(m, m+5), 点 M(m+1, m+6),

∵ QN=PM,

$$\therefore -\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 5 - m - 5 = m + 6 - [-\frac{1}{3}(m+1)^2 - \frac{2}{3}(m+1) + 5],$$

解得 $m = -3 \pm \sqrt{6}$,

∴ 点 M 坐标 $(-2 + \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6})$ 或 $(-2 - \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6})$.

②当 MN 为边时, $MN=PQ=\sqrt{2}$, 设点 Q(m, $-\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 5$) 则点 P(m+1, $-\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 6$),

$$\therefore -\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 6 = -\frac{1}{3}(m+1)^2 - \frac{2}{3}(m+1) + 5,$$

解得 $m = -3$.

∴ 点 M 坐标 $(-2, 3)$,

综上所述以点 P, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形时, 点 M 的坐标为 $(-2, 3)$ 或 $(-2 + \sqrt{6},$

$3 + \sqrt{6})$ 或 $(-2 - \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6})$.