

## 2018 年湖北省宜昌市中考真题数学

一、选择题(每题只有一个正确选项, 本题共 15 小题, 每题 3 分, 共 45 分)

1. -2018 的绝对值是( )

A. 2018

B. -2018

C.  $\frac{1}{2018}$

D.  $-\frac{1}{2018}$

解析: -2018 的绝对值是 2018.

答案: A

2. 如下字体的四个汉字中, 是轴对称图形的是( )

A. 书

B. 香

C. 宜

D. 昌

解析: A、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

B、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

C、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

D、是轴对称图形, 故本选项符合题意.

答案: D

3. 工信部发布《中国数字经济发展与就业白皮书(2018)》)显示, 2017 年湖北数字经济总量

1.21 万亿元, 列全国第七位、中部第一位. “1.21 万”用科学记数法表示为( )

A.  $1.21 \times 10^3$

B.  $12.1 \times 10^3$

C.  $1.21 \times 10^4$

D.  $0.121 \times 10^5$

解析：科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数. 确定  $n$  的值时，要看把原数变成  $a$  时，小数点移动了多少位， $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 1$  时， $n$  是正数；当原数的绝对值  $< 1$  时， $n$  是负数.

1.21 万  $= 1.21 \times 10^4$ .

答案：C

4. 计算  $4 + (-2)^2 \times 5 = ( \quad )$

A. -16

B. 16

C. 20

D. 24

解析： $4 + (-2)^2 \times 5 = 4 + 4 \times 5 = 4 + 20 = 24$ .

答案：D

5. 在“绿水青山就是金山银山”这句话中任选一个汉字，这个字是“绿”的概率为( )

A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{1}{10}$

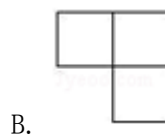
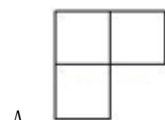
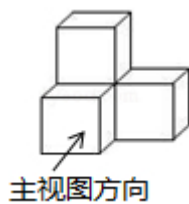
C.  $\frac{1}{9}$

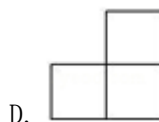
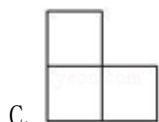
D.  $\frac{1}{8}$

解析：这句话中任选一个汉字，这个字是“绿”的概率  $= \frac{1}{10}$ .

答案：B

6. 如图，是由四个相同的小正方体组合而成的几何体，它的左视图是( )





解析：该几何体的主视图为 ；左视图为 ；俯视图为 。

答案：C

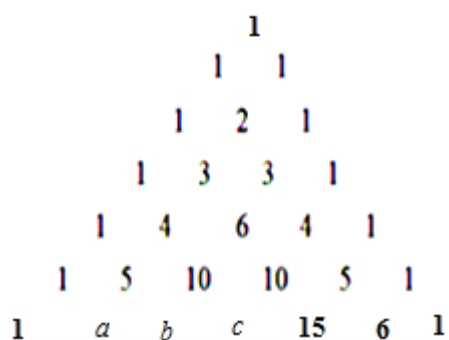
7. 下列运算正确的是( )

- A.  $x^2+x^2=x^4$
- B.  $x^3 \cdot x^2=x^6$
- C.  $2x^4 \div x^2=2x^2$
- D.  $(3x)^2=6x^2$

解析：A、 $x^2+x^2=2x^2$ ，选项 A 错误；  
 B、 $x^3 \cdot x^2=x^{3+2}=x^5$ ，选项 B 错误；  
 C、 $2x^4 \div x^2=2x^{4-2}=2x^2$ ，选项 C 正确；  
 D、 $(3x)^2=3^2 \cdot x^2=9x^2$ ，选项 D 错误。

答案：C

8. 1261 年，我国南宋数学家杨辉用图中的三角形解释二项和的乘方规律，比欧洲的同发现要早三百多年，我们把这个三角形称为“杨辉三角”，请观察图中的数字排列规律，则 a, b, c 的值分别为( )

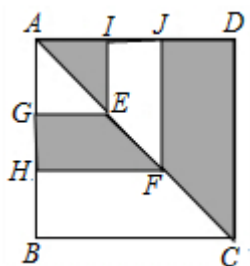


- A. a=1, b=6, c=15
- B. a=6, b=15, c=20
- C. a=15, b=20, c=15
- D. c=20, b=15, c=6

解析：根据图形得：每个数字等于上一行的左右两个数字之和，  
 $\therefore a=1+5=6, b=5+10=15, c=10+10=20$ .

答案：B

9. 如图，正方形 ABCD 的边长为 1，点 E, F 分别是对角线 AC 上的两点，EG ⊥ AB, EI ⊥ AD, FH ⊥ AB, FJ ⊥ AD，垂足分别为 G, I, H, J. 则图中阴影部分的面积等于( )



- A. 1
- B.  $\frac{1}{2}$
- C.  $\frac{1}{3}$
- D.  $\frac{1}{4}$

解析：∵ 四边形 ABCD 是正方形，∴ 直线 AC 是正方形 ABCD 的对称轴，  
 ∵ EG ⊥ AB, EI ⊥ AD, FH ⊥ AB, FJ ⊥ AD，垂足分别为 G, I, H, J.

∴ 根据对称性可知：四边形 EFHG 的面积与四边形 EFJI 的面积相等，∴  $S_{\text{阴}} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形 ABCD}} = \frac{1}{2}$ .

答案：B

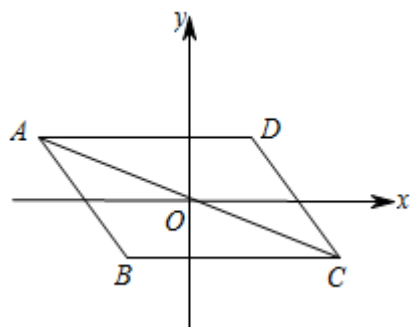
10. 为参加学校举办的“诗意校园-致远方”朗诵艺术大赛，八年级“屈原读书社”组织了五次选拔赛，这五次选拔赛中，小明五次成绩的平均数是 90，方差是 2；小强五次成绩的平均数也是 90，方差是 14.8. 下列说法正确的是( )

- A. 小明的成绩比小强稳定
- B. 小明、小强两人成绩一样稳定
- C. 小强的成绩比小明稳定
- D. 无法确定小明、小强的成绩谁更稳定

解析：∵ 小明五次成绩的平均数是 90，方差是 2；小强五次成绩的平均数也是 90，方差是 14.8. 平均成绩一样，小明的方差小，成绩稳定.

答案：A

11. 如图，在平面直角坐标系中，把△ABC 绕原点 O 旋转 180° 得到△CDA，点 A, B, C 的坐标分别为(-5, 2)，(-2, -2)，(5, -2)，则点 D 的坐标为( )

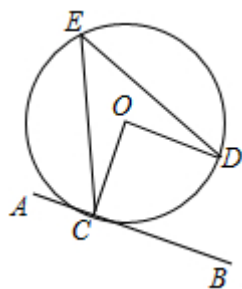


- A. (2, 2)
- B. (2, -2)
- C. (2, 5)
- D. (-2, 5)

解析：∵点 A, C 的坐标分别为(-5, 2), (5, -2), ∴点 O 是 AC 的中点,  
 ∵AB=CD, AD=BC, ∴四边形 ABCD 是平行四边形, ∴BD 经过点 O,  
 ∵B 的坐标为(-2, -2), ∴D 的坐标为(2, 2).

答案：A

12. 如图, 直线 AB 是⊙O 的切线, C 为切点, OD//AB 交⊙O 于点 D, 点 E 在⊙O 上, 连接 OC, EC, ED, 则∠CED 的度数为( )

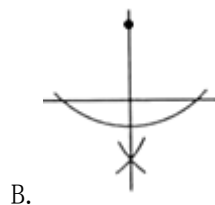
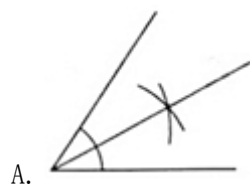


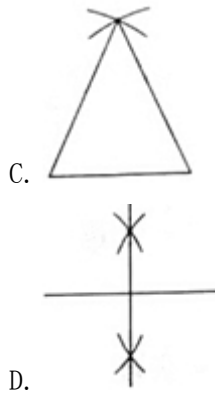
- A. 30°
- B. 35°
- C. 40°
- D. 45°

解析：∵直线 AB 是⊙O 的切线, C 为切点, ∴∠OCB=90° ,  
 ∵OD//AB, ∴∠COD=90° , ∴∠CED= $\frac{1}{2}$ ∠COD=45° .

答案：D

13. 尺规作图：经过已知直线外一点作这条直线的垂线, 下列作图中正确的是( )





解析：已知：直线 AB 和 AB 外一点 C.

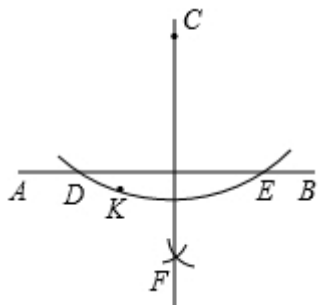
求作：AB 的垂线，使它经过点 C.

作法：(1)任意取一点 K，使 K 和 C 在 AB 的两旁.

(2)以 C 为圆心，CK 的长为半径作弧，交 AB 于点 D 和 E.

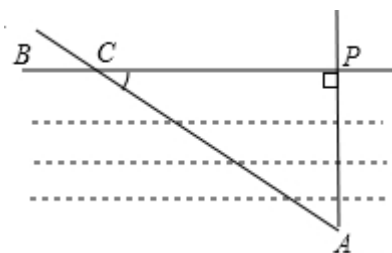
(3)分别以 D 和 E 为圆心，大于  $\frac{1}{2}DE$  的长为半径作弧，两弧交于点 F，

(4)作直线 CF. 直线 CF 就是所求的垂线.



答案：B

14. 如图，要测量小河两岸相对的两点 P, A 的距离，可以在小河边取 PA 的垂线 PB 上的一点 C，测得 PC=100 米， $\angle PCA=35^\circ$ ，则小河宽 PA 等于( )



A.  $100\sin 35^\circ$  米

B.  $100\sin 55^\circ$  米

C.  $100\tan 35^\circ$  米

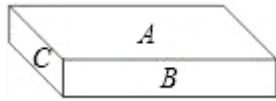
D.  $100\tan 55^\circ$  米

解析： $\because PA \perp PB$ , PC=100 米,  $\angle PCA=35^\circ$ ,  $\therefore$ 小河宽  $PA=PC \tan \angle PCA=100 \tan 35^\circ$  米.

答案：C

15. 如图，一块砖的 A, B, C 三个面的面积比是 4: 2: 1. 如果 A, B, C 面分别向下放在地上，

地面所受压强为  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , 压强的计算公式为  $p = \frac{F}{S}$ , 其中  $P$  是压强,  $F$  是压力,  $S$  是受力面积, 则  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , 的大小关系正确的是( )



- A.  $p_1 > p_2 > p_3$
- B.  $p_1 > p_3 > p_2$
- C.  $p_2 > p_1 > p_3$
- D.  $p_3 > p_2 > p_1$

解析:  $\because p = \frac{F}{S}$ ,  $F > 0$ ,  $\therefore p$  随  $S$  的增大而减小,

$\because A, B, C$  三个面的面积比是  $4: 2: 1$ ,  $\therefore p_1, p_2, p_3$ , 的大小关系是:  $p_3 > p_2 > p_1$ .

答案: D

## 二、解答题(本题共 9 题, 75 分)

16. 先化简, 再求值:  $x(x+1) + (2+x)(2-x)$ , 其中  $x = \sqrt{6} - 4$ .

解析: 根据单项式乘多项式、平方差公式可以化简题目中的式子, 然后将  $x$  的值代入化简后的式子即可解答本题.

答案:  $x(x+1) + (2+x)(2-x) = x^2 + x + 4 - x^2 = x + 4$ ,

当  $x = \sqrt{6} - 4$  时, 原式  $= \sqrt{6} - 4 + 4 = \sqrt{6}$ .

17. 解不等式组  $\begin{cases} \frac{10-x}{3} \leq 2x+1, \\ x-2 < 0, \end{cases}$  并把它的解集在数轴上表示出来.

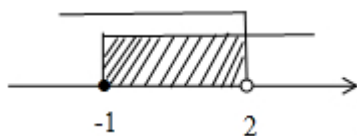
解析: 解一元一次不等式组的方法与步骤: ①求不等式组中每个不等式的解集; ②利用数轴求公共部分; 并把它的解集在数轴上表示出来即可.

答案:  $\begin{cases} \frac{10-x}{3} \leq 2x+1 \text{ ①,} \\ x-2 < 0 \text{ ②,} \end{cases}$

解不等式①, 得:  $x \geq 1$ ;

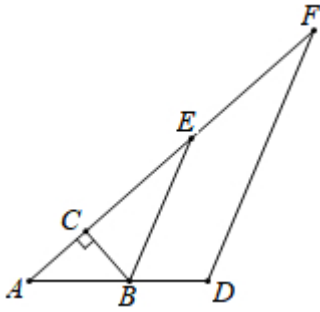
解不等式②, 得:  $x < 2$ ;

$\therefore$  原不等式组的解集是  $1 \leq x < 2$ .



18. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\triangle ABC$  的外角  $\angle CBD$  的平分线  $BE$  交  $AC$

的延长线于点 E.



(1) 求  $\angle CBE$  的度数;

(2) 过点 D 作  $DF \parallel BE$ , 交 AC 的延长线于点 F, 求  $\angle F$  的度数.

解析: (1) 先根据直角三角形两锐角互余求出  $\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 50^\circ$ , 由邻补角定义得出  $\angle CBD = 130^\circ$ . 再根据角平分线定义即可求出  $\angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBD = 65^\circ$ ;

(2) 先根据三角形外角的性质得出  $\angle CEB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ , 再根据平行线的性质即可求出  $\angle F = \angle CEB = 25^\circ$ .

答案: (1)  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 50^\circ$ ,  $\therefore \angle CBD = 130^\circ$ .

$\because BE$  是  $\angle CBD$  的平分线,  $\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBD = 65^\circ$ ;

(2)  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle CBE = 65^\circ$ ,  $\therefore \angle CEB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ .

$\because DF \parallel BE$ ,  $\therefore \angle F = \angle CEB = 25^\circ$ .

19. 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一题, 原文是: “今有大器五小器一容三斛, 大器一小器五容二斛, 问大小器各容几何.” 意思是: 有大小两种盛酒的桶, 已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛(斛, 是古代的一种容量单位), 1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛. 1 个大桶、1 个小桶分别可以盛酒多少斛? 请解答.

解析: 直接利用 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛, 1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛, 分别得出等式组成方程组求出答案.

答案: 设 1 个大桶可以盛酒  $x$  斛, 1 个小桶可以盛酒  $y$  斛,

$$\text{则} \begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 5y = 2, \end{cases} \text{解得:} \begin{cases} x = \frac{13}{24}, \\ y = \frac{7}{24}, \end{cases}$$

答: 1 个大桶可以盛酒  $\frac{13}{24}$  斛, 1 个小桶可以盛酒  $\frac{7}{24}$  斛.

20. 某校创建“环保示范学校”, 为了解全校学生参加环保类社团的意愿, 在全校随机抽取了 50 名学生进行问卷调查, 问卷给出了五个社团供学生选择(学生可根据自己的爱好选择一个社团, 也可以不选), 对选择了社团的学生的问卷情况进行了统计, 如表:



社团名称	A. 酵素制作 社团	B. 回收材料 小制作社团	C. 垃圾分类 社团	D. 环保义工 社团	E. 绿植养护 社团
人数	10	15	5	10	5

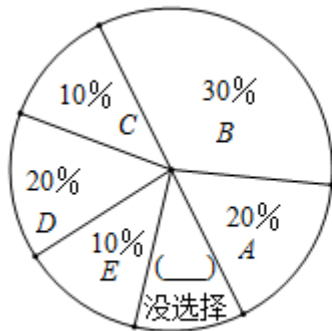


图1

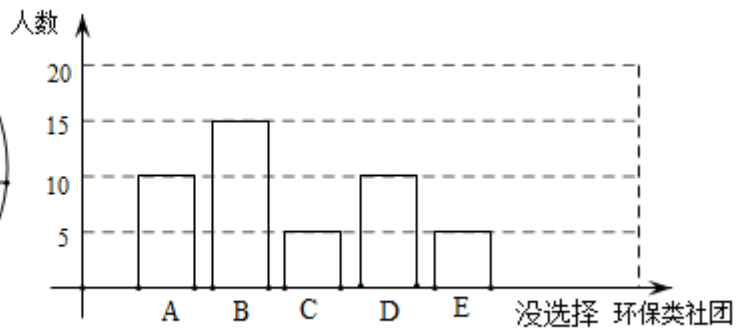


图2

- (1) 填空：在统计表中，这 5 个数的中位数是\_\_\_\_\_；
- (2) 根据以上信息，补全扇形图(图 1)和条形图(图 2)；
- (3) 该校有 1400 名学生，根据调查统计情况，请估计全校有多少学生愿意参加环保义工社团；
- (4) 若小诗和小雨两名同学在酵素制作社团或绿植养护社团中任意选择一个参加，请用树状图或列表法求出这两名同学同时选择绿植养护社团的概率.

解析：(1) 根据中位数的定义即可判断；

(2) 求出没有选择的百分比，高度和 E 相同，即可画出图形；

(3) 利用样本估计总体的思想解决问题即可；

(4) 画出树状图即可解决问题.

答案：(1) 这 5 个数从小到大排列：5，5，10，10，15，故中位数为 10.

(2) 没有选择的占  $1-10\%-30\%-20\%-10\%-20\%=10\%$ ，条形图的高度和 E 相同；如图所示.

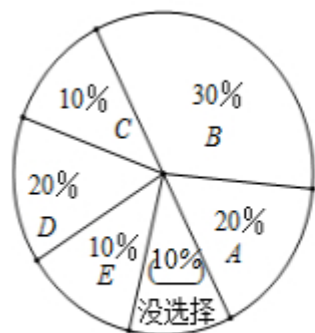


图1

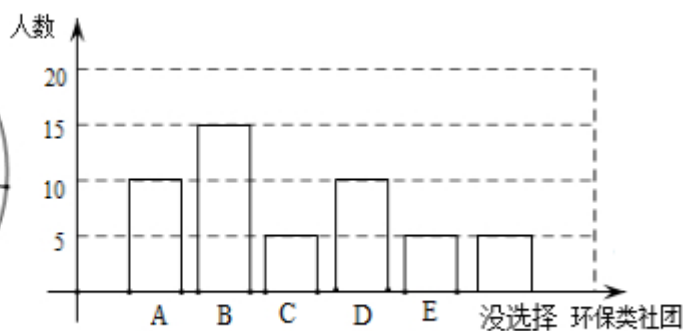
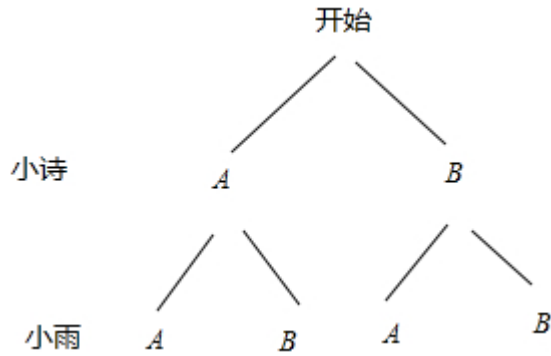


图2

(3)  $1400 \times 20\% = 280$  (名)

答：估计全校有多少学生愿意参加环保义工社团有 280 名；

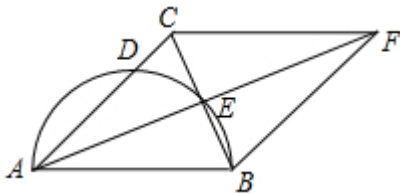
(4) 酵素制作社团、绿植养护社团分别用 A、B 表示：树状图如图所示，



共有 4 种可能，两人同时选择绿植养护社团只有一种情形，

$\therefore$  这两名同学同时选择绿植养护社团的概率  $= \frac{1}{4}$ .

21. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ，以  $AB$  为直径的圆交  $AC$  于点  $D$ ，交  $BC$  于点  $E$ ，延长  $AE$  至点  $F$ ，使  $EF=AE$ ，连接  $FB$ ， $FC$ 。



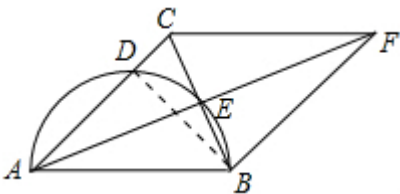
(1) 求证：四边形  $ABFC$  是菱形；

(2) 若  $AD=7$ ， $BE=2$ ，求半圆和菱形  $ABFC$  的面积。

解析：(1) 根据对角线相互平分的四边形是平行四边形，证明是平行四边形，再根据邻边相等的平行四边形是菱形即可证明；

(2) 设  $CD=x$ ，连接  $BD$ 。利用勾股定理构建方程即可解决问题；

答案：(1)  $\because AB$  是直径， $\therefore \angle AEB=90^\circ$ ， $\therefore AE \perp BC$ ，



$\because AB=AC$ ， $\therefore BE=CE$ ， $\because AE=EF$ ， $\therefore$  四边形  $ABFC$  是平行四边形，

$\because AC=AB$ ， $\therefore$  四边形  $ABFC$  是菱形。

(2) 设  $CD=x$ 。连接  $BD$ 。

$\because AB$  是直径， $\therefore \angle ADB=\angle BDC=90^\circ$ ， $\therefore AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$ ，

$\therefore (7+x)^2-7^2=4^2-x^2$ ，解得  $x=1$  或  $-8$  (舍弃)， $\therefore AC=8$ ， $BD=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$ ， $\therefore S_{\text{菱形} ABFC}=8\sqrt{15}$ 。

22. 某市创建“绿色发展模范城市”，针对境内长江段两种主要污染源：生活污水和沿江工厂污染物排放，分别用“生活污水集中处理”（下称甲方案）和“沿江工厂转型升级”（下称乙方案）进行治理，若江水污染指数记为  $Q$ ，沿江工厂用乙方案进行一次性治理（当年完工），从当年开始，所治理的每家工厂一年降低的  $Q$  值都以平均值  $n$  计算。第一年有 40 家工厂用乙方案治理，共使  $Q$  值降低了 12。经过三年治理，境内长江水质明显改善。

(1) 求  $n$  的值；

(2) 从第二年起，每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数  $m$ ，三年来用乙方案治理的工厂数量共 190 家，求  $m$  的值，并计算第二年用乙方案新治理的工厂数量；  
 (3) 该市生活污水用甲方案治理，从第二年起，每年因此降低的  $Q$  值比上一年都增加个相同的数值  $a$ 。在 (2) 的情况下，第二年，用乙方案所治理的工厂合计降低的  $Q$  值与当年因甲方案治理降低的  $Q$  值相等，第三年，用甲方案使  $Q$  值降低了 39.5。求第一年用甲方案治理降低的  $Q$  值及  $a$  的值。

解析：(1) 直接利用第一年有 40 家工厂用乙方案治理，共使  $Q$  值降低了 12，得出等式求出答案；

(2) 利用从第二年起，每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数  $m$ ，三年来用乙方案治理的工厂数量共 190 家得出等式求出答案；

(3) 利用  $n$  的值即可得出关于  $a$  的等式求出答案。

答案：(1) 由题意可得： $40n=12$ ，解得： $n=0.3$ ；

(2) 由题意可得： $40+40(1+m)+40(1+m)^2=190$ ，解得： $m_1 = \frac{1}{2}$ ， $m_2 = -\frac{7}{2}$  (舍去)，

$\therefore$  第二年用乙方案新治理的工厂数量为： $40(1+m)=40(1+50\%)=60$  (家)。

(3) 设第一年用乙方案治理降低了  $100n=100 \times 0.3=30$ ，

则  $(30-a)+2a=39.5$ ，解得： $a=9.5$ ，则  $Q=20.5$ 。

设第一年用甲方案整理降低的  $Q$  值为  $x$ ，

第二年  $Q$  值因乙方案治理降低了  $100n=100 \times 0.3=30$ ，

解法一：(30-a)+2a=39.5，a=9.5，x=20.5。

解法二：
$$\begin{cases} x+a=30, \\ x+2a=39.5, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x=20.5, \\ a=9.5. \end{cases}$$

23. 在矩形 ABCD 中，AB=12，P 是边 AB 上一点，把  $\triangle PBC$  沿直线 PC 折叠，顶点 B 的对应点是点 G，过点 B 作  $BE \perp CG$ ，垂足为 E 且在 AD 上，BE 交 PC 于点 F。

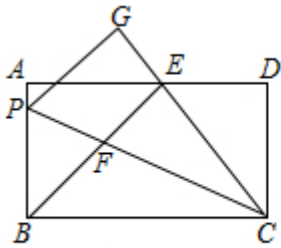


图1

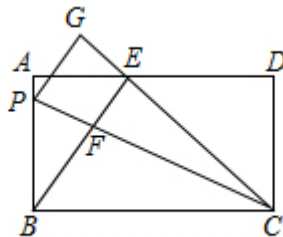


图2

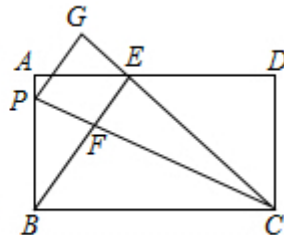


图2备用图

(1) 如图 1，若点 E 是 AD 的中点，求证： $\triangle AEB \cong \triangle DEC$ ；

(2) 如图 2，①求证： $BP=BF$ ；

②当  $AD=25$ ，且  $AE < DE$  时，求  $\cos \angle PCB$  的值；

③当  $BP=9$  时，求  $BE \cdot EF$  的值。

解析：(1) 先判断出  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $AB=DC$  再判断出  $AE=DE$ ，即可得出结论；

(2) ①利用折叠的性质，得出  $\angle PGC = \angle PBC = 90^\circ$ ， $\angle BPC = \angle GPC$ ，进而判断出  $\angle GPF = \angle PFB$  即可得出结论；

②判断出  $\triangle ABE \sim \triangle DEC$ ，得出比例式建立方程求解即可得出  $AE=9$ ， $DE=16$ ，再判断出  $\triangle ECF \sim \triangle GCP$ ，进而求出  $PC$ ，即可得出结论；

③判断出  $\triangle GEF \sim \triangle EAB$ ，即可得出结论。

答案：(1)在矩形 ABCD 中， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = DC$ ，

$\because E$  是 AD 中点， $\therefore AE = DE$ ，

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle DCE \text{ 中，} \begin{cases} AB = DC, \\ \angle A = \angle D = 90^\circ, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE \text{ (SAS)}; \\ AE = DE, \end{cases}$$

(2)①在矩形 ABCD， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\because \triangle BPC$  沿 PC 折叠得到  $\triangle GPC$ ， $\therefore \angle PGC = \angle PBC = 90^\circ$ ， $\angle BPC = \angle GPC$ ，

$\because BE \perp CG$ ， $\therefore BE \parallel PG$ ， $\therefore \angle GPF = \angle PFB$ ， $\therefore \angle BPF = \angle BFP$ ， $\therefore BP = BF$ ；

②当 AD=25 时，

$\because \angle BEC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AEB + \angle CED = 90^\circ$ ，

$\because \angle AEB + \angle ABE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CED = \angle ABE$ ，

$\because \angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC$ ， $\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{DE}{CD}$ ，

设  $AE = x$ ， $\therefore DE = 25 - x$ ， $\therefore \frac{12}{x} = \frac{25 - x}{12}$ ， $\therefore x = 9$  或  $x = 16$ ，

$\because AE < DE$ ， $\therefore AE = 9$ ， $DE = 16$ ， $\therefore CE = 20$ ， $BE = 15$ ，

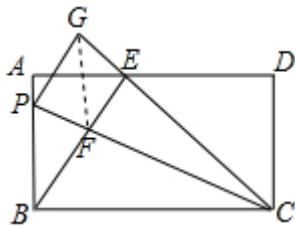
由折叠得， $BP = PG$ ， $\therefore BP = BF = PG$ ，

$\because BE \parallel PG$ ， $\therefore \triangle ECF \sim \triangle GCP$ ， $\therefore \frac{EF}{PG} = \frac{CE}{CG}$ ，

设  $BP = BF = PG = y$ ， $\therefore \frac{15 - y}{y} = \frac{20}{25}$ ， $\therefore y = \frac{25}{3}$ ， $\therefore BP = \frac{25}{3}$ ，

在  $\text{Rt}\triangle PBC$  中， $PC = \frac{25\sqrt{10}}{3}$ ， $\cos \angle PCB = \frac{BC}{PC} = \frac{3\sqrt{10}}{3}$ ；

③如图，连接 FG，



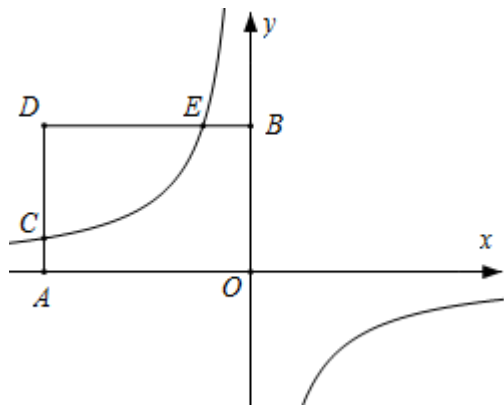
$\because \angle GEF = \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\because BF \parallel PG$ ， $BF = PG$ ， $\therefore$  平行四边形 BPGF 是菱形，

$\therefore BP \parallel GF$ ， $\therefore \angle GFE = \angle ABE$ ， $\therefore \triangle GEF \sim \triangle EAB$ ， $\therefore \frac{EF}{GF} = \frac{AB}{BE}$ ， $\therefore BE \cdot EF = AB \cdot GF = 12 \times 9 = 108$ 。

24. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 OADB 的顶点 A，B 的坐标分别为 A(-6, 0)，B(0, 4)。

过点 C(-6, 1) 的双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 与矩形 OADB 的边 BD 交于点 E



(1) 填空:  $OA=$  \_\_\_\_\_,  $k=$  \_\_\_\_\_, 点 E 的坐标为 \_\_\_\_\_;

(2) 当  $1 \leq t \leq 6$  时, 经过点  $M(t-1, -\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{3}{2})$  与点  $N(-t-3, -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2})$  的直线交  $y$  轴于点 F, 点 P 是过 M, N 两点的抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  的顶点.

① 当点 P 在双曲线  $y = \frac{k}{x}$  上时, 求证: 直线 MN 与双曲线  $y = \frac{k}{x}$  没有公共点;

② 当抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与矩形 OADB 有且只有三个公共点, 求  $t$  的值;

③ 当点 F 和点 P 随着  $t$  的变化同时向上运动时, 求  $t$  的取值范围, 并求在运动过程中直线 MN 在四边形 OADB 中扫过的面积.

解析: (1) 根据题意将先关数据带入

(2) ① 用  $t$  表示直线 MN 解析式, 及  $b, c$ , 得到 P 点坐标带入双曲线  $y = \frac{k}{x}$  解析式, 证明关于  $x$

$t$  的方程无解即可;

② 根据抛物线开口和对称轴, 分别讨论抛物线过点 B 和在 BD 上时的情况;

③ 由②中部分结果, 用  $t$  表示 F、P 点的纵坐标, 求出  $t$  的取值范围及直线 MN 在四边形 OADB 中所过的面积.

答案: (1)  $\because$  A 点坐标为  $(-6, 0)$ ,  $\therefore OA=6$ ,

$\because$  过点  $C(-6, 1)$  的双曲线  $y = \frac{k}{x}$ ,  $\therefore k = -6$ ,  $y=4$  时,  $x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  点 E 的坐标为  $(-\frac{3}{2}, 4)$ , 故答案为:  $6, -6, (-\frac{3}{2}, 4)$

(2) ① 设直线 MN 解析式为:  $y_1 = k_1x + b_1$ ,

$$\text{由题意得: } \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{3}{2} = k_1(t-1) + b_1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2} = k_1(-t-3) + b_1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = 1, \\ b = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - \frac{1}{2}, \end{cases} \because \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \text{ 过点 M、N,}$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + b(t-1) + c, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(-t-3)^2 + b(-t-3) + c, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -1, \\ c = 5t - 2, \end{cases} \therefore \text{抛物线解析式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5t - 2,$$

$$\therefore \text{顶点 P 坐标为 } (-1, 5t - \frac{3}{2})$$

$$\because \text{P 在双曲线 } y = -\frac{6}{x} \text{ 上, } \therefore (5t - \frac{3}{2}) \times (-1) = -6, \therefore t = \frac{3}{2},$$

$$\text{此时直线 MN 解析式为: } y = x + \frac{35}{8},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + \frac{35}{8}, \\ y = -\frac{6}{x}, \end{cases} \therefore 8x^2 + 35x + 49 = 0,$$

$$\because \Delta = 35^2 - 4 \times 8 \times 49 = 1225 - 1536 < 0, \therefore \text{直线 MN 与双曲线 } y = -\frac{6}{x} \text{ 没有公共点.}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当抛物线过点 B, 此时抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \text{ 与矩形 OADB 有且只有三个公共点, } \therefore 4 = 5t - 2,$$

$$\text{得 } t = \frac{6}{5},$$

当抛物线在线段 DB 上, 此时抛物线与矩形 OADB 有且只有三个公共点,

$$\therefore \frac{10t - 3}{2} = 4, \text{ 得 } t = \frac{11}{10}, \therefore t = \frac{6}{5} \text{ 或 } t = \frac{11}{10},$$

$$\textcircled{3} \because \text{点 P 的坐标为 } (-1, 5t - \frac{3}{2}), \therefore y_P = 5t - \frac{3}{2},$$

当  $1 \leq t \leq 6$  时,  $y_P$  随  $t$  的增大而增大,

此时, 点 P 在直线  $x = -1$  上向上运动,

$$\because \text{点 F 的坐标为 } (0, -\frac{1}{2}t^2 + 4t - \frac{1}{2}), \therefore y_F = -\frac{1}{2}(t-4)^2 + \frac{15}{2},$$

$\therefore$  当  $1 \leq t \leq 4$  时, 随着  $y_F$  随  $t$  的增大而增大,

此时, 随着  $t$  的增大, 点 F 在  $y$  轴上向上运动,  $\therefore 1 \leq t \leq 4$ .

当  $t = 1$  时, 直线 MN:  $y = x + 3$  与  $x$  轴交于点 G(-3, 0), 与  $y$  轴交于点 H(0, 3),

当  $t = 4 - \sqrt{3}$  时, 直线 MN 过点 A.

$$\text{当 } 1 \leq t \leq 4 \text{ 时, 直线 MN 在四边形 AEBO 中扫过的面积为 } S = \frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{2} + 6 \right) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{21}{2}.$$