

一、选择题

1. $|\frac{1}{2}|$ 的值是 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

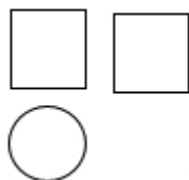
C. -2

D. 2

解析：根据负数的绝对值是它的相反数，得 $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

答案：B.

2. 某几何体的三视图如图所示，则此几何体是 ()



A. 圆锥

B. 圆柱

C. 长方体

D. 四棱柱

解析：∵主视图和左视图都是长方形，∴此几何体为柱体，

∵俯视图是一个圆，∴此几何体为圆柱.

答案：B

3. 2014 年德州市农村中小学校舍标准化工程开工学校项目 356 个，开工面积 56.2 万平方米，开式面积量创历年最高，56.2 万平方米用科学记数法表示正确的是 ()

A. $5.62 \times 10^4 \text{m}^2$

B. $56.2 \times 10^4 \text{m}^2$

C. $5.62 \times 10^5 \text{m}^2$

D. $0.562 \times 10^4 \text{m}^2$

解析：56.2 万 = 562000 = 5.62×10^5 .

答案：C

4. 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{8} - \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $b^2 \cdot b^3 = b^6$

C. $4a - 9a = -5$

D. $(ab^2)^2 = a^2b^4$

解析：∵ $\sqrt{8}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$ ，∴选项 A 错误；

∵ $b^2 \cdot b^3=b^5$ ，∴选项 B 错误；

∵ $4a-9a=-5a$ ，∴选项 C 错误；

∵ $(ab^2)^2=a^2b^4$ ，∴选项 D 正确.

答案：D

5. 一组数 1, 1, 2, x, 5, y... 满足“从第三个数起，每个数都等于它前面的两个数之和”，那么这组数中 y 表示的数为()

A. 8

B. 9

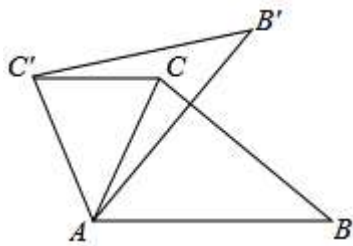
C. 13

D. 15

解析：∵每个数都等于它前面的两个数之和，∴ $x=1+2=3$ ，∴ $y=x+5=3+5=8$ ，即这组数中 y 表示的数为 8.

答案：A

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB=65^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 在平面内绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置，使 $CC' \parallel AB$ ，则旋转角的度数为()



A. 35°

B. 40°

C. 50°

D. 65°

解析：∵ $CC' \parallel AB$ ，∴ $\angle ACC' = \angle CAB = 65^\circ$ ，

∵ $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转得到 $\triangle AB'C'$ ，∴ $AC=AC'$ ，

∴ $\angle CAC' = 180^\circ - 2\angle ACC' = 180^\circ - 2 \times 65^\circ = 50^\circ$ ，∴ $\angle CAC' = \angle BAB' = 50^\circ$.

答案：C

7. 若一元二次方程 $x^2+2x+a=0$ 的有实数解，则 a 的取值范围是()

A. $a < 1$

B. $a \leq 4$

C. $a \leq 1$

D. $a \geq 1$

解析：因为关于 x 的一元二次方程有实根，所以 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4a \geq 0$ ，解之得 $a \leq 1$.

答案：C

8. 下列命题中，真命题的个数是()

- ①若 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ，则 $-2 < \frac{1}{x} < -1$ ；
 ②若 $-1 \leq x \leq 2$ ，则 $1 \leq x^2 \leq 4$ ；
 ③凸多边形的外角和为 360° ；
 ④三角形中，若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，则 $\sin A = \cos B$ 。

- A. 4
 B. 3
 C. 2
 D. 1

解析：若 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ， $-2 < \frac{1}{x} < -1$ ，所以①正确；

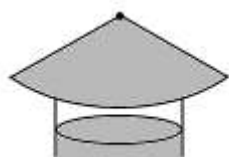
若 $-1 \leq x \leq 2$ ，则 $0 \leq x^2 \leq 4$ ，所以②错误；

凸多边形的外角和为 360° ，所以③正确；

三角形中，若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，则 $\sin A = \cos B$ ，所以④正确。

答案：B

9. 如图，要制作一个圆锥形的烟囱帽，使底面圆的半径与母线长的比是 4:5，那么所需扇形铁皮的圆心角应为()



- A. 288°
 B. 144°
 C. 216°
 D. 120°

解析：∵底面圆的半径与母线长的比是 4:5，∴设底面圆的半径为 $4x$ ，则母线长是 $5x$ ，

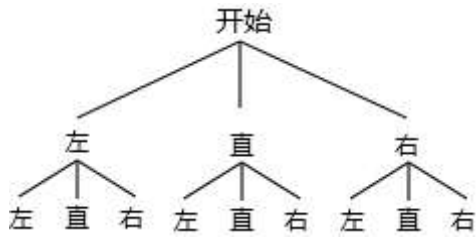
设圆心角为 n° ，则 $2\pi \times 4x = \frac{n\pi \times 5x}{180}$ ，解得： $n=288$ 。

答案：A

10. 经过某十字路口的汽车，可能直行，也可能左转或者右转，如果这三种可能性大小相同，则经过这个十字路口的两辆汽车一辆左转，一辆右转的概率是()

- A. $\frac{4}{7}$
 B. $\frac{4}{9}$
 C. $\frac{2}{9}$
 D. $\frac{1}{9}$

解析：(1)画“树形图”列举这两辆汽车行驶方向所有可能的结果如图所示：

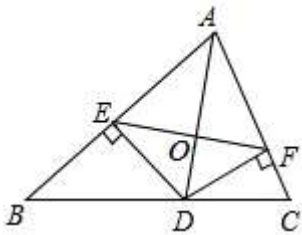


∴这两辆汽车行驶方向共有9种可能的结果.

(2)由(1)中“树形图”知,两辆汽车一辆左转,一辆右转的结果有2种,且所有结果的可能性相等, ∴ $P(\text{两辆汽车一辆左转, 一辆右转}) = \frac{2}{9}$.

答案: C

11. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE, DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高, 得到下列四个结论:



- ① $OA=OD$;
- ② $AD \perp EF$;
- ③当 $\angle A=90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 是正方形;
- ④ $AE+DF=AF+DE$.

其中正确的是()

- A. ②③
- B. ②④
- C. ①③④
- D. ②③④

解析: 如果 $OA=OD$, 则四边形 AEDF 是矩形, $\angle A=90^\circ$, 不符合题意, ∴①不正确;
∵AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, ∴ $\angle EAD = \angle FAD$,

$$\text{在 } \triangle AED \text{ 和 } \triangle AFD \text{ 中, } \begin{cases} \angle EAD = \angle FAD, \\ \angle AED = \angle AFD = 90^\circ, \therefore \triangle AED \cong \triangle AFD \text{ (AAS)}, \\ AD = AD, \end{cases}$$

∴ $AE=AF$, $DE=DF$, ∴ $AE+DF=AF+DE$, ∴④正确;

$$\text{在 } \triangle AEO \text{ 和 } \triangle AFO \text{ 中, } \begin{cases} AE = AF, \\ \angle EAO = \angle FAO, \therefore \triangle AEO \cong \triangle AFO \text{ (SAS)}, \therefore EO=FO, \\ AO = AO, \end{cases}$$

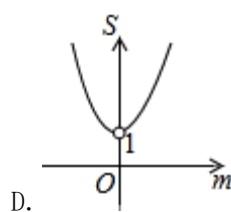
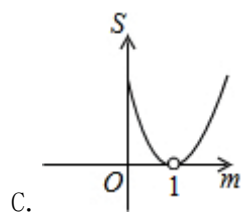
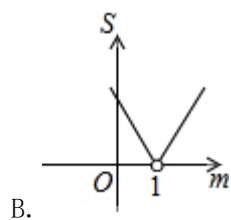
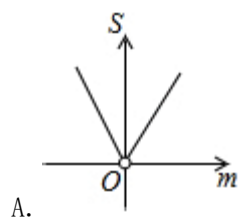
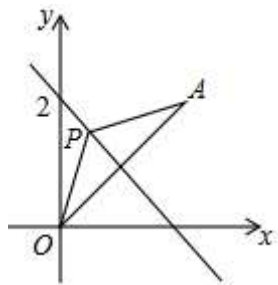
又∵ $AE=AF$, ∴AO 是 EF 的中垂线, ∴ $AD \perp EF$, ∴②正确;

∵当 $\angle A=90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 的四个角都是直角, ∴四边形 AEDF 是矩形,
又∵ $DE=DF$, ∴四边形 AEDF 是正方形, ∴③正确.

综上, 可得正确的是: ②③④.

答案: D.

12. 如图，平面直角坐标系中，A 点坐标为(2, 2)，点 P(m, n) 在直线 $y=-x+2$ 上运动，设 $\triangle APO$ 的面积为 S，则下面能够反映 S 与 m 的函数关系的图象是()



解析：∵点 P(m, n) 在直线 $y=-x+2$ 上运动，

∴当 $m=1$ 时， $n=1$ ，即 P 点在直线 AO 上，此时 $S=0$ ，

当 $0 < m < 1$ 时， $S_{\triangle APO}$ 不断减小，当 $m > 1$ 时， $S_{\triangle APO}$ 不断增大，且底边 AO 不变，故 S 与 m 是一次函数关系。

答案：B

二、填空题(每小题 4 分)

13. 计算 $2^{-2}+(\sqrt{3})^0=$ _____.

解析: $2^{-2}+(\sqrt{3})^0=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$.

答案: $\frac{5}{4}$

14. 方程 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}=1$ 的解是_____.

解析: 去分母得: $x^2-2x+2=x^2-x$, 解得: $x=2$, 经检验 $x=2$ 是分式方程的解.

答案: $x=2$

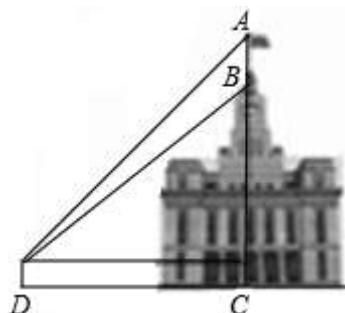
15. 在射击比赛中, 某运动员的6次射击成绩(单位: 环)为: 7, 8, 10, 8, 9, 6, 计算这组数据的方差为_____.

解析: 平均数 $=\frac{1}{6}(7+8+10+8+9+6)=8$,

所以方差 $S^2=\frac{1}{6}[(7-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(6-8)^2]=\frac{5}{3}$.

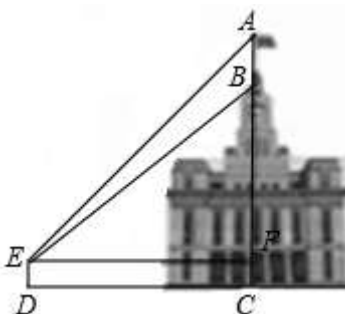
答案: $\frac{5}{3}$.

16. 如图, 某建筑物BC上有一旗杆AB, 从与BC相距38m的D处观测旗杆顶部A的仰角为 50° , 观测旗杆底部B的仰角为 45° , 则旗杆的高度约为_____m.



(结果精确到0.1m, 参考数据: $\sin 50^\circ \approx 0.77$, $\cos 50^\circ \approx 0.64$, $\tan 50^\circ \approx 1.19$)

解析: 根据题意得: $EF \perp AC$, $CD \parallel FE$,



\therefore 四边形CDEF是矩形,

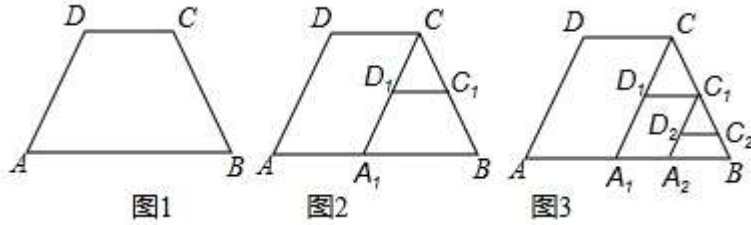
已知底部B的仰角为 45° 即 $\angle BEF=45^\circ$, $\therefore \angle EBF=45^\circ$, $\therefore CD=EF=FB=38$,

在 $Rt\triangle AEF$ 中, $AF=EF \cdot \tan 50^\circ =38 \times 1.19 \approx 45.22$,

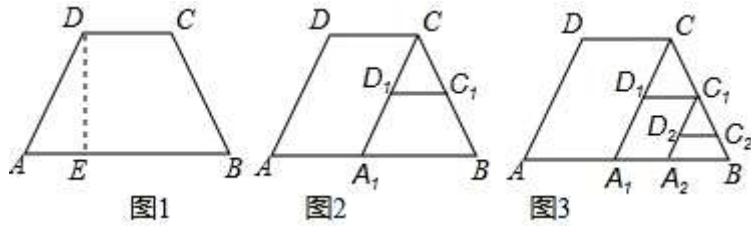
$\therefore AB=AF-BF=45.22-38 \approx 7.2$, \therefore 旗杆的高约为7米.

答案: 7.2

17. 如图 1, 四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AD=DC=CB=a$, $\angle A=60^\circ$. 取 AB 的中点 A_1 , 连接 A_1C , 再分别取 A_1C , BC 的中点 D_1, C_1 , 连接 D_1C_1 , 得到四边形 $A_1BC_1D_1$. 如图 2, 同样方法操作得到四边形 $A_2BC_2D_2$, 如图 3, \dots , 如此进行下去, 则四边形 $A_nBC_nD_n$ 的面积为_____.



解析: 作 $DE \perp AB$ 于点 E.



在直角 $\triangle ADE$ 中, $DE=AD \cdot \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$,

则 $AB=2AD=2a$, $S_{\text{梯形} ABCD} = \frac{1}{2}(AB+CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(2a+a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

如图 2, $\because D_1, C_1$ 是 A_1C 和 BC 的中点, $\therefore D_1C_1 \parallel A_1B$, 且 $C_1D_1 = \frac{1}{2}A_1B$,

$\because AA_1=CD$, $AA_1 \parallel CD$, \therefore 四边形 AA_1CD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel A_1C$, $AD=A_1C=a$, $\therefore \angle A = \angle CA_1B$,

又 $\because \angle B = \angle B$, $\therefore \angle D = \angle A_1D_1C_1$, $\angle DCB = \angle D_1C_1B$, $\frac{D_1C_1}{DC} = \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1B}{AB} = \frac{1}{2}$,

\therefore 梯形 $A_1BC_1D_1 \sim$ 梯形 $ABCD$, 且相似比是 $\frac{1}{2}$.

同理, 梯形 $A_nBC_nD_n \sim$ 梯形 $A_{n-1}BC_{n-1}D_{n-1}$, 相似比是 $\frac{1}{2}$, 则四边形 $A_nBC_nD_n$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4^{n+1}}a^2$.

答案: $\frac{3\sqrt{3}}{4^{n+1}}a^2$.

三、解答题

18. 先化简, 再求值: $\frac{a^2-b^2}{a} \div (a - \frac{2ab-b^2}{a})$, 其中 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$.

解析：原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则计算，约分得到最简结果，把 a 与 b 的值代入计算即可求出值.

答案：原式 = $\frac{(a+b)(a-b)}{a} \div \frac{a^2-2ab+b^2}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a} \cdot \frac{a}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$,

当 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$ 时, 原式 = $\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

19. 2014 年 1 月, 国家发改委出台指导意见, 要求 2015 年底前, 所有城市原则上全面实行居民阶梯水价制度, 小明为了解市政府调整水价方案的社会反响, 随机访问了自己居住小区的部分居民, 就“每月每户的用水量”和“调价对用水行为改变”两个问题进行调查, 并把调查结果整理成下面的图 1, 图 2.

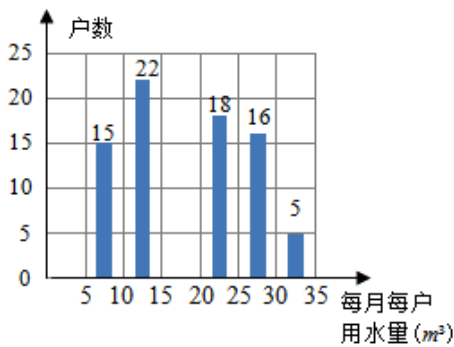


图1

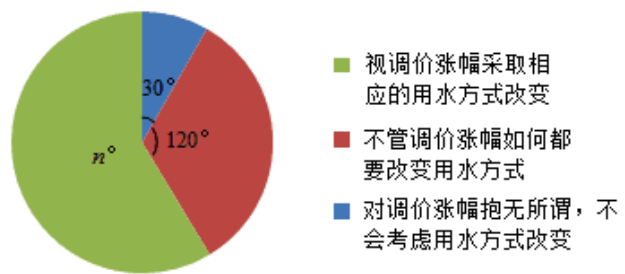


图2

小明发现每月每户的用水量在 5m^3 – 35m^3 之间, 有 8 户居民对用水价格调价涨幅抱无所谓, 不会考虑用水方式的改变, 根据小明绘制的图表和发现的信息, 完成下列问题:

- (1) $n=$ _____, 小明调查了 _____ 户居民, 并补全图 1;
- (2) 每月每户用水量的中位数和众数分别落在什么范围?
- (3) 如果小明所在小区有 1800 户居民, 请你估计“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有多少.

解析：(1) 首先根据圆周角等于 360° , 求出的值是多少即可; 然后用“视水价格调价涨幅抱无所谓态度”的居民的户数除以它占被调查的居民户数的分率, 求出小明调查了多少户居民; 最后求出每月每户的用水量在 15m^3 – 20m^3 之间的居民的户数, 补全图 1 即可.

(2) 根据中位数和众数的含义分别进行解答即可.

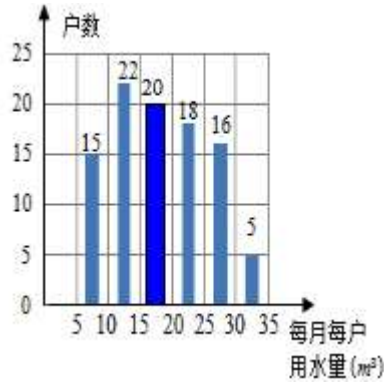
(3) 根据分数乘法的意义, 用小明所在小区居民的户数乘以“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数占被调查的居民户数的分率, 求出“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有多少即可.

答案：(1) $n=360-30-120=210$,

$\therefore 8 \div \frac{30}{360} = 8 \div \frac{1}{12} = 96$ (户), \therefore 小明调查了 96 户居民.

每月每户的用水量在 15m^3 – 20m^3 之间的居民的户数是:

$96 - (15+22+18+16+5) = 96 - 76 = 20$ (户).



(2) $96 \div 2 = 48$ (户), $15 + 12 = 37$ (户), $15 + 22 + 20 = 57$ (户),

\therefore 每月每户的用水量在 $5\text{m}^3 - 15\text{m}^3$ 之间的有 37 户, 每月每户的用水量在 $5\text{m}^3 - 20\text{m}^3$ 之间的有 57 户,

\therefore 把每月每户用水量这组数据从小到大排列后, 第 48 个、第 49 个数在 15-20 之间,

\therefore 第 48 个、第 49 个数的平均数也在 15-20 之间,

\therefore 每月每户用水量的中位数落在 15-20 之间;

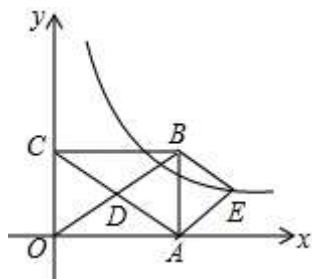
\therefore 在这组数据中, 10-15 之间的数出现的次数最多, 出现了 22 次,

\therefore 每月每户用水量的众数落在 10-15 之间.

(3) $\therefore 1800 \times \frac{210}{360} = 1050$ (户),

\therefore “视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有 1050 户.

20. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 OABC 的对角线 OB, AC 相交于点 D, 且 $BE \parallel AC$, $AE \parallel OB$,



(1) 求证: 四边形 AEBD 是菱形;

(2) 如果 $OA=3$, $OC=2$, 求出经过点 E 的反比例函数解析式.

解析: (1) 先证明四边形 AEBD 是平行四边形, 再由矩形的性质得出 $DA=DB$, 即可证出四边形 AEBD 是菱形;

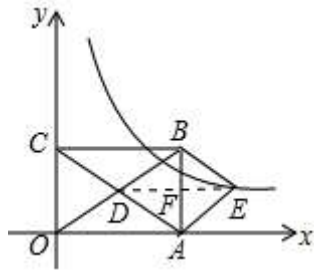
(2) 连接 DE, 交 AB 于 F, 由菱形的性质得出 AB 与 DE 互相垂直平分, 求出 EF、AF, 得出点 E 的坐标; 设经过点 E 的反比例函数解析式为: $y = \frac{k}{x}$, 把点 E 坐标代入求出 k 的值即可.

答案: (1) $\because BE \parallel AC$, $AE \parallel OB$, \therefore 四边形 AEBD 是平行四边形,

\therefore 四边形 OABC 是矩形,

$\therefore DA = \frac{1}{2} AC$, $DB = \frac{1}{2} OB$, $AC = OB$, $AB = OC = 2$, $\therefore DA = DB$, \therefore 四边形 AEBD 是菱形.

(2) 连接 DE, 交 AB 于 F, 如图所示:



∵ 四边形 AEBD 是菱形，∴ AB 与 DE 互相垂直平分，

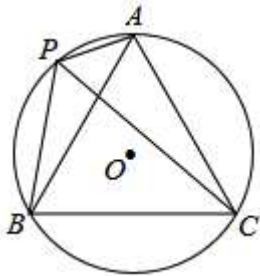
∵ OA=3, OC=2,

∴ $EF=DF=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}$, $AF=\frac{1}{2}AB=1$, $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, ∴ 点 E 坐标为: $(\frac{9}{2}, 1)$,

设经过点 E 的反比例函数解析式为: $y=\frac{k}{x}$,

把点 E $(\frac{9}{2}, 1)$ 代入得: $k=\frac{9}{2}$, ∴ 经过点 E 的反比例函数解析式为: $y=\frac{9}{2x}$.

21. 如图, $\odot O$ 的半径为 1, A, P, B, C 是 $\odot O$ 上的四个点, $\angle APC=\angle CPB=60^\circ$.



(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状: _____;

(2) 试探究线段 PA, PB, PC 之间的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 当点 P 位于弧 AB 的什么位置时, 四边形 APBC 的面积最大? 求出最大面积.

解析: (1) 利用圆周角定理可得 $\angle BAC=\angle CPB$, $\angle ABC=\angle APC$, 而 $\angle APC=\angle CPB=60^\circ$, 所以 $\angle BAC=\angle ABC=60^\circ$, 从而可判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 在 PC 上截取 $PD=AP$, 则 $\triangle APD$ 是等边三角形, 然后证明 $\triangle APB \cong \triangle ADC$, 证明 $BP=CD$, 即可证得;

(3) 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E, 过点 C 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F, 把四边形的面积转化为两个三角形的面积进行计算, 当点 P 为弧 AB 的中点时, $PE+CF=PC$ 从而得出最大面积.

答案: (1) $\triangle ABC$ 是等边三角形.

证明如下: 在 $\odot O$ 中,

∵ $\angle BAC$ 与 $\angle CPB$ 是弧 BC 所对的圆周角, $\angle ABC$ 与 $\angle APC$ 是弧 AC 所对的圆周角,

∴ $\angle BAC=\angle CPB$, $\angle ABC=\angle APC$,

又 ∵ $\angle APC=\angle CPB=60^\circ$, ∴ $\angle ABC=\angle BAC=60^\circ$, ∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形.

(2) 在 PC 上截取 $PD=AP$, 如图 1,

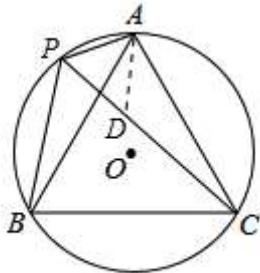


图1

又 $\because \angle APC=60^\circ$ ， $\therefore \triangle APD$ 是等边三角形， $\therefore AD=AP=PD$ ， $\angle ADP=60^\circ$ ，即 $\angle ADC=120^\circ$ 。

又 $\because \angle APB=\angle APC+\angle BPC=120^\circ$ ， $\therefore \angle ADC=\angle APB$ ，

$$\text{在 } \triangle APB \text{ 和 } \triangle ADC \text{ 中, } \begin{cases} \angle APD = \angle ADC, \\ \angle ABP = \angle ACP, \\ AP = AD, \end{cases} \therefore \triangle APB \cong \triangle ADC \text{ (AAS), } \therefore BP=CD,$$

又 $\because PD=AP$ ， $\therefore CP=BP+AP$ ；

(3) 当点 P 为弧 AB 的中点时，四边形 APBC 的面积最大。

理由如下，如图 2，过点 P 作 $PE \perp AB$ ，垂足为 E。

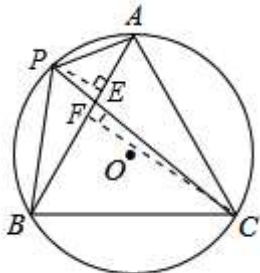


图2

过点 C 作 $CF \perp AB$ ，垂足为 F。

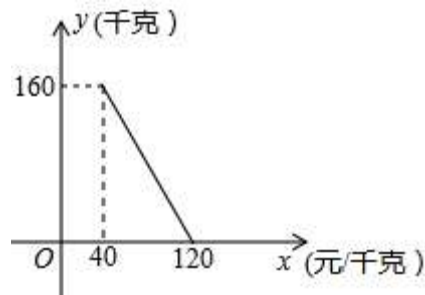
$$\because S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AB \cdot PE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF, \therefore S_{\text{四边形 APBC}} = \frac{1}{2} AB \cdot (PE+CF),$$

当点 P 为弧 AB 的中点时， $PE+CF=PC$ ，PC 为 $\odot O$ 的直径，

\therefore 此时四边形 APBC 的面积最大。

$$\text{又 } \because \odot O \text{ 的半径为 } 1, \therefore \text{其内接正三角形的边长 } AB = \sqrt{3}, \therefore S_{\text{四边形 APBC}} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

22. 某商店以 40 元/千克的单价新进一批茶叶，经调查发现，在一段时间内，销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 之间的函数关系如图所示。



(1) 根据图象求 y 与 x 的函数关系式；

(2) 商店想在销售成本不超过 3000 元的情况下，使销售利润达到 2400 元，销售单价应定为多少？

解析：(1) 根据图象可设 $y=kx+b$ ，将 $(40, 160)$ ， $(120, 0)$ 代入，得到关于 k 、 b 的二元一次方程组，解方程组即可；

(2) 根据每千克的利润 \times 销售量 = 2400 元列出方程，解方程求出销售单价，从而计算销售量，进而求出销售成本，与 3000 元比较即可得出结论.

答案：(1) 设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$ ，

将 $(40, 160)$ ， $(120, 0)$ 代入，

$$\text{得} \begin{cases} 40k + b = 160, \\ 120k + b = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = -2, \\ b = 240, \end{cases}$$

所以 y 与 x 的函数关系式为 $y=-2x+240 (40 \leq x \leq 120)$ ；

(2) 由题意得 $(x-40)(-2x+240)=2400$ ，

整理得， $x^2-160x+6000=0$ ，

解得 $x_1=60$ ， $x_2=100$.

当 $x=60$ 时，销售单价为 60 元，销售量为 120 千克，则成本价为 $40 \times 120=4800$ (元)，超过了 3000 元，不合题意，舍去；

当 $x=100$ 时，销售单价为 100 元，销售量为 40 千克，则成本价为 $40 \times 40=1600$ (元)，低于 3000 元，符合题意.

所以销售单价为 100 元.

答：销售单价应定为 100 元.

23.

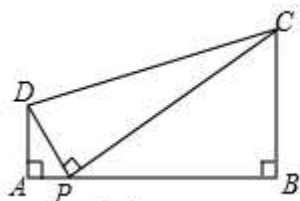


图1

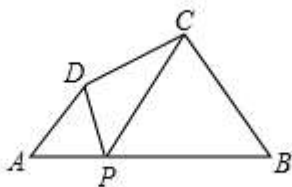


图2

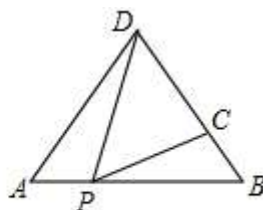


图3

(1) 问题

如图 1，在四边形 ABCD 中，点 P 为 AB 上一点， $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$ ，求证： $AD \cdot BC = AP \cdot BP$.

(2) 探究

如图 2，在四边形 ABCD 中，点 P 为 AB 上一点，当 $\angle DPC = \angle A = \angle B = \theta$ 时，上述结论是否依然成立？说明理由.

(3) 应用

请利用 (1) (2) 获得的经验解决问题：

如图 3，在 $\triangle ABD$ 中， $AB=6$ ， $AD=BD=5$ ，点 P 以每秒 1 个单位长度的速度，由点 A 出了，沿边 AB 向点 B 运动，且满足 $\angle DPC = \angle A$ ，设点 P 的运动时间为 t (秒)，当以 D 为圆心，以 DC 为半径的圆与 AB 相切时，求 t 的值.

解析：(1) 如图 1，由 $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$ 可得 $\angle ADP = \angle BPC$ ，即可证到 $\triangle ADP \sim \triangle BPC$ ，然后运用相似三角形的性质即可解决问题；

(2) 如图 2，由 $\angle DPC = \angle A = \angle B = \theta$ 可得 $\angle ADP = \angle BPC$ ，即可证到 $\triangle ADP \sim \triangle BPC$ ，然后运用相似

三角形的性质即可解决问题；

(3)如图 3，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E，根据等腰三角形的性质可得 $AE=BE=3$ ，根据勾股定理可得 $DE=4$ ，由题可得 $DC=DE=4$ ，则有 $BC=5-4=1$ 。易证 $\angle DPC=\angle A=\angle B$ 。根据 $AD \cdot BC=AP \cdot BP$ ，就可求出 t 的值。

答案：(1)如图 1，

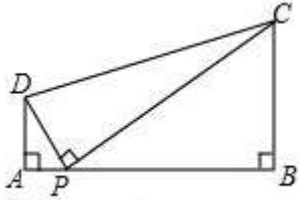


图1

$\because \angle DPC=\angle A=\angle B=90^\circ$, $\therefore \angle ADP+\angle APD=90^\circ$, $\angle BPC+\angle APD=90^\circ$,
 $\therefore \angle ADP=\angle BPC$, $\therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC$, $\therefore \frac{AD}{BP} = \frac{AP}{BC}$, $\therefore AD \cdot BC=AP \cdot BP$.

(2)结论 $AD \cdot BC=AP \cdot BP$ 仍然成立。

理由：如图 2，

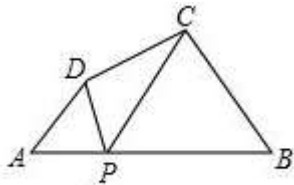


图2

$\because \angle BPD=\angle DPC+\angle BPC$, $\angle BPD=\angle A+\angle ADP$, $\therefore \angle DPC+\angle BPC=\angle A+\angle ADP$.
 $\because \angle DPC=\angle A=\angle B=\theta$,
 $\therefore \angle BPC=\angle ADP$, $\therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC$, $\therefore \frac{AD}{BP} = \frac{AP}{BC}$, $\therefore AD \cdot BC=AP \cdot BP$.

(3)如图 3，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E。

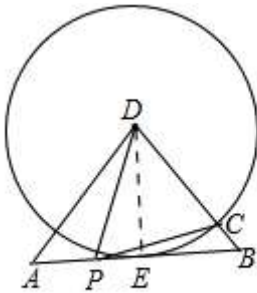


图3

$\because AD=BD=5$, $AB=6$, $\therefore AE=BE=3$.

由勾股定理可得 $DE=4$ 。

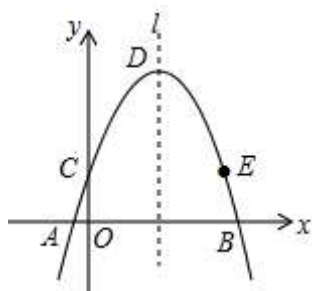
\because 以点 D 为圆心，DC 为半径的圆与 AB 相切， $\therefore DC=DE=4$ ， $\therefore BC=5-4=1$ 。

又 $\because AD=BD$ ， $\therefore \angle A=\angle B$ ， $\therefore \angle DPC=\angle A=\angle B$ 。

由(1)、(2)的经验可知 $AD \cdot BC=AP \cdot BP$ ，

$\therefore 5 \times 1=t(6-t)$ ，解得： $t_1=1$ ， $t_2=5$ ， $\therefore t$ 的值为 1 秒或 5 秒。

24. 已知抛物线 $y = -mx^2 + 4x + 2m$ 与 x 轴交于点 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, 且 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2$,



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 抛物线的对称轴为 l , 与 y 轴的交点为 C , 顶点为 D , 点 C 关于 l 的对称点为 E , 是否存在 x 轴上的点 M , y 轴上的点 N , 使四边形 $DNME$ 的周长最小? 若存在, 请画出图形(保留作图痕迹), 并求出周长的最小值; 若不存在, 请说明理由.

(3) 若点 P 在抛物线上, 点 Q 在 x 轴上, 当以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.

解析: (1) 利用根与系数的关系得出 $\alpha + \beta = \frac{4}{m}$, $\alpha\beta = -2$, 进而代入求出 m 的值即可得出

答案:

(2) 利用轴对称求最短路线的方法, 作点 D 关于 y 轴的对称点 D' , 点 E 关于 x 轴的对称点 E' , 得出四边形 $DNME$ 的周长最小为: $D'E' + DE$, 进而利用勾股定理求出即可;

(3) 利用平行四边形的判定与性质结合 P 点纵坐标为 ± 4 , 进而分别求出即可.

答案: (1) 由题意可得: α , β 是方程 $-mx^2 + 4x + 2m = 0$ 的两根, 由根与系数的关系可得,

$$\alpha + \beta = \frac{4}{m}, \quad \alpha\beta = -2,$$

$$\because \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2, \therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -2, \text{ 即 } \frac{\frac{4}{m}}{-2} = -2, \text{ 解得: } m = 1, \text{ 故抛物线解析式为: } y = -x^2 + 4x + 2.$$

(2) 存在 x 轴上的点 M , y 轴上的点 N , 使得四边形 $DNME$ 的周长最小,

$$\because y = -x^2 + 4x + 2 = -(x-2)^2 + 6,$$

\therefore 抛物线的对称轴 l 为 $x = 2$, 顶点 D 的坐标为: $(2, 6)$,

又 \because 抛物线与 y 轴交点 C 的坐标为: $(0, 2)$, 点 E 与点 C 关于 l 对称,

$\therefore E$ 点坐标为: $(4, 2)$,

作点 D 关于 y 轴的对称点 D' , 点 E 关于 x 轴的对称点 E' ,

则 D' 的坐标为: $(-2, 6)$, E' 坐标为: $(4, -2)$,

连接 $D'E'$, 交 x 轴于 M , 交 y 轴于 N ,

此时, 四边形 $DNME$ 的周长最小为: $D'E' + DE$, 如图 1 所示:

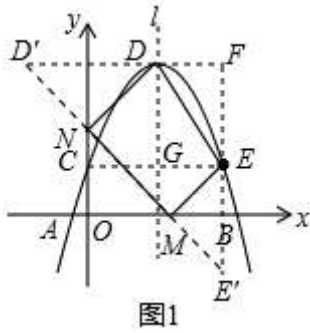


图1

延长 $E'E$, $D'D$ 交于一点 F , 在 $\text{Rt}\triangle D'E'F$ 中, $D'F=6$, $E'F=8$,

$$\text{则 } D'E' = \sqrt{D'F^2 + E'F^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

设对称轴 l 与 CE 交于点 G , 在 $\text{Rt}\triangle DGE$ 中, $DG=4$, $EG=2$,

$$\therefore DE = \sqrt{DG^2 + EG^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \therefore \text{四边形 } DNME \text{ 的周长最小值为: } 10 + 2\sqrt{5}.$$

(3) 如图 2, P 为抛物线上的点, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H ,

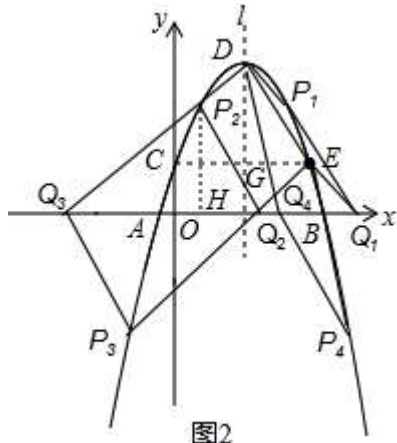


图2

若以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形, 则 $\triangle PHQ \cong \triangle DGE$,

$$\therefore PH=DG=4, \therefore |y|=4, \therefore \text{当 } y=4 \text{ 时, } -x^2+4x+2=4, \text{ 解得: } x_1=2+\sqrt{2}, x_2=2-\sqrt{2},$$

$$\text{当 } y=-4 \text{ 时, } -x^2+4x+2=-4, \text{ 解得: } x_3=2+\sqrt{10}, x_4=2-\sqrt{10},$$

故 P 点的坐标为: $(2-\sqrt{2}, 4)$, $(2+\sqrt{2}, 4)$, $(2-\sqrt{10}, -4)$, $(2+\sqrt{10}, -4)$.