2016年普通高等学校招生全国统一考试（新课标III）数学理

一、选择题:本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 S={x|(x-2)(x-3)≥0}，T={x|x>0}，则 S∩T=(　　)

A.[2，3]

B.(-∞，2]∪[3，+∞)

C.[3，+∞)

D.(0，2]∪[3，+∞)

解析：由 S 中不等式解得：x≤2 或 x≥3，即 S=(-∞，2]∪[3，+∞)，

∵T=(0，+∞)，

∴S∩T=(0，2]∪[3，+∞).

答案：D.

2. 若 z=1+2i，则 $\frac{4i}{z\bar{z}-1}$=(　　)

A.1

B.-1

C.i

D.-i

解析：z=1+2i，则 $\frac{4i}{z\bar{z}-1}=\frac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=\frac{4i}{5-1}=i$.

答案：C.

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，则∠ABC=(　　)

A.30°

B.45°

C.60°

D.120°

解析：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|=1$；

∴cos∠ABC=$\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

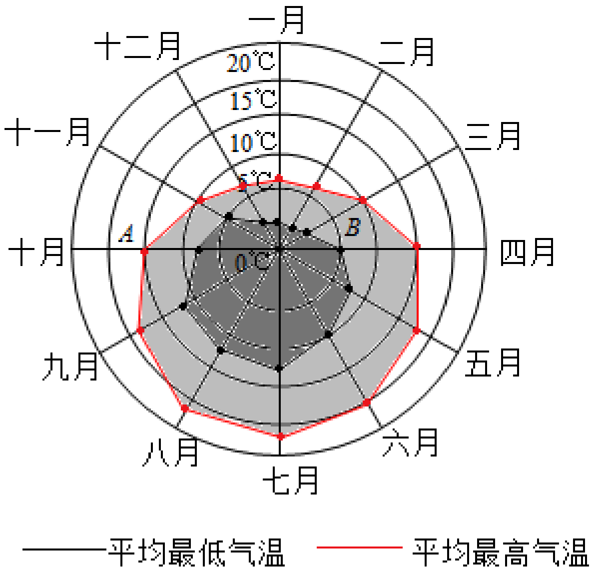
又 0≤∠ABC≤180°；

∴∠ABC=30°.

答案：A.

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图，图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15℃，B 点表示四月的平均最低气温

约为 5℃，下面叙述不正确的是(　　)



A. 各月的平均最低气温都在 0℃以上

B. 七月的平均温差比一月的平均温差大

C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同

D. 平均最高气温高于 20℃的月份有 5 个

解析：A. 由雷达图知各月的平均最低气温都在 0℃以上，正确

B. 七月的平均温差大约在 10° 左右，一月的平均温差在 5° 左右，故七月的平均温差比一月的平均温差大，正确

C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同，都为 10°，正确

D. 平均最高气温高于 20℃的月份有 7，8 两个月，故 D 错误.

答案：D.

5. 若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=$(　　)

A. $\frac{64}{25}$

B. $\frac{48}{25}$

C. 1

D. $\frac{16}{25}$

解析：∵ $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，

∴ $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1+4\times\frac{3}{4}?}{\frac{9}{16}+1}=\frac{64}{25}$.

答案：A.

6. 已知 a=$2^{\frac{4}{3}}$，b=$3^{\frac{2}{3}}$，c=$25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

A. b<a<c

B. a<b<c

C. b<c<a

D. c<a<b

解析：∵a=$2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，

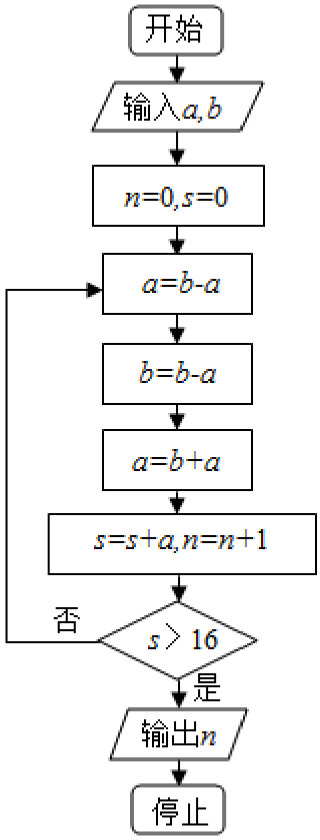
b=$3^{\frac{2}{3}}$，

c=$25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，

综上可得：b<a<c.

答案：A.

7. 执行如图程序框图，如果输入的 a=4，b=6，那么输出的 n=(　　)



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

解析：模拟执行程序，可得

a=4，b=6，n=0，s=0

执行循环体，a=2，b=4，a=6，s=6，n=1

不满足条件 s＞16，执行循环体，a=-2，b=6，a=4，s=10，n=2
不满足条件 s＞16，执行循环体，a=2，b=4，a=6，s=16，n=3
不满足条件 s＞16，执行循环体，a=-2，b=6，a=4，s=20，n=4
满足条件 s＞16，退出循环，输出 n 的值为 4.
答案：B.

8. 在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}$BC，则 cosA=(　　)

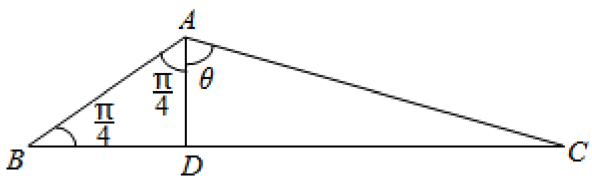
A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：设△ABC 中角 A、B、C、对应的边分别为 a、b、c，AD⊥BC 于 D，令∠DAC=θ，



∵在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高 AD=h=$\frac{1}{3}$BC=$\frac{1}{3}$a，

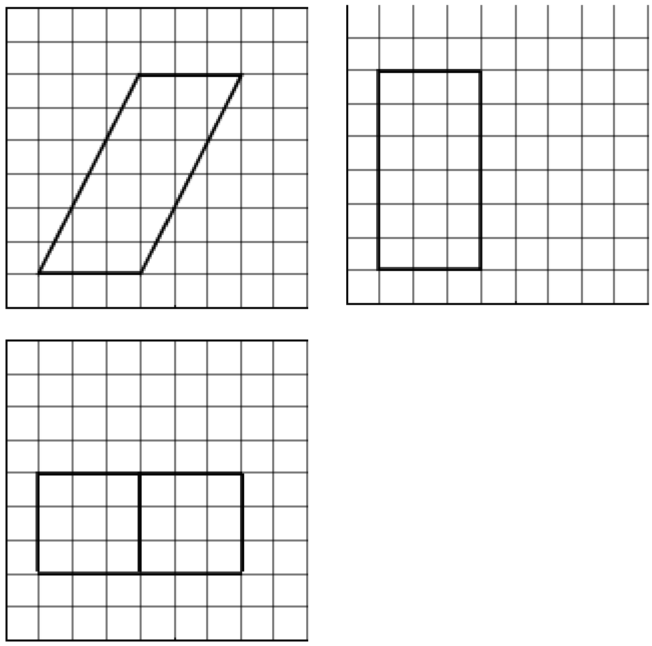
∴BD=AD=$\frac{1}{3}$a，CD=$\frac{2}{3}$a，

在 Rt△ADC 中，$\cos\theta=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2\left(\frac{2a}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴cosA=$\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

答案：C.

9. 网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为(　　)



A. $18+36\sqrt{5}$

B. $54+18\sqrt{5}$

C. 90

D. 81

解析：由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱柱，

其底面面积为：3×6=18，

前后侧面的面积为：3×6×2=36，

左右侧面的面积为：$3\times\sqrt{3^2+6^2}\times2=18\sqrt{5}$，

故棱柱的表面积为：$18+36+9\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$.

答案：B.

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 AB⊥BC，AB=6，BC=8，$AA_1=3$，则 V 的最大值是(　　)

A. 4π

B. $\dfrac{9\pi}{2}$

C. 6π

D. $\dfrac{32\pi}{3}$

解析：∵AB⊥BC，AB=6，BC=8，

∴AC=10.

故三角形 ABC 的内切圆半径 $r=\dfrac{6+8-10}{2}=2$，

又由 $AA_1=3$，

故直三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$的内切球半径为$\frac{3}{2}$，

此时V的最大值$\frac{4}{3}$π•($\frac{3}{2}$)^3=$\frac{9\pi}{2}$.

答案：B.

11. 已知O为坐标原点，F是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的左焦点，A，B分别为C的左，右顶点.P为C上一点，且PF⊥x轴，过点A的直线l与线段PF交于点M，与y轴交于点E.若直线BM经过OE的中点，则C的离心率为(　　)

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

解析：由题意可设F(-c，0)，A(-a，0)，B(a，0)，

令x=-c，代入椭圆方程可得y=±b$\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\pm\frac{b^2}{a}$，

可得P(-c，$\frac{b^2}{a}$)，

设直线AE的方程为y=k(x+a)，

令x=-c，可得M(-c，k(a-c))，令x=0，可得E(0，ka)，

设OE的中点为H，可得H(0，$\frac{ka}{2}$)，

由B，H，M三点共线，可得$k_{BH}=k_{BM}$，

即为$\frac{\frac{ka}{2}}{-a}=\frac{k\left(a-c\right)}{-c-a}$，

化简可得$\frac{a-c}{a+c}=\frac{1}{2}$，即为a=3c，

可得e=$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.

答案：A.

12. 定义“规范01数列”{a_n}如下：{a_n}共有2m项，其中m项为0，m项为1，且对任意k≤2m，a_1，a_2，…，a_k中0的个数不少于1的个数，若m=4，则不同的“规范01数列”共有(　　)

A.18个

B. 16 个
C. 14 个
D. 12 个
解析：由题意可知，“规范 01 数列”有偶数项 2m 项，且所含 0 与 1 的个数相等，首项为 0，末项为 1，若 m=4，说明数列有 8 项，满足条件的数列有：
0，0，0，0，1，1，1，1；　0，0，0，1，0，1，1，1；　0，0，0，1，1，0，1，1；　0，0，0，1，1，1，0，1；　0，0，1，0，0，1，1，1；
0，0，1，0，1，0，1，1；　0，0，1，0，1，1，0，1；　0，0，1，1，0，1，0，1；　0，0，1，1，0，0，1，1；　0，1，0，0，0，1，1，1；
0，1，0，0，1，0，1，1；　0，1，0，0，1，1，0，1；　0，1，0，1，0，0，1，1；　0，1，0，1，0，1，0，1. 共 14 个.
答案：C.

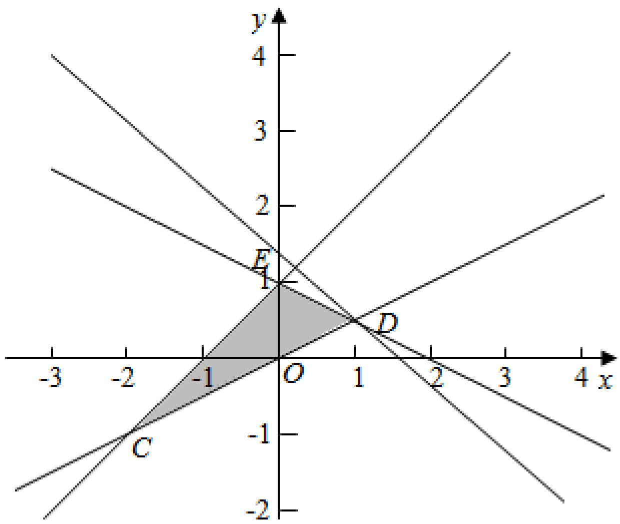
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0 \\ x-2y\leq 0 \\ x+2y-2\leq 0 \end{cases}$，则 z=x+y 的最大值为_____.

解析：不等式组表示的平面区域如图阴影部分，当直线经过 D 点时，z 最大，

由 $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ 得 D(1，$\frac{1}{2}$)，

所以 z=x+y 的最大值为 1+$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$.



答案：$\frac{3}{2}$.

14. 函数 y=sinx-$\sqrt{3}$cosx 的图象可由函数 y=sinx+$\sqrt{3}$cosx 的图象至少向右平移_____个单位长度得到.

解析：∵y=sinx-$\sqrt{3}$cosx=2sin(x-$\frac{\pi}{3}$)，y=sinx-$\sqrt{3}$cosx=2sin(x-$\frac{\pi}{3}$)，

∴f(x-φ)=2sin(x+$\frac{\pi}{3}$-φ)(φ>0)，

令 2sin(x+$\frac{\pi}{3}$-φ)=2sin(x-$\frac{\pi}{3}$)，

则$\frac{\pi}{3}$-φ=2kπ-$\frac{\pi}{3}$(k∈Z)，

即φ=$\frac{2\pi}{3}$-2kπ(k∈Z)，

当 k=0 时，正数ϕ_{min}=$\frac{2\pi}{3}$.

答案：$\frac{2\pi}{3}$.

15. 已知 f(x)为偶函数，当 x<0 时，f(x)=ln(-x)+3x，则曲线 y=f(x)在点(1，-3)处的切线方程是_____.
解析：f(x)为偶函数，可得 f(-x)=f(x)，
当 x<0 时，f(x)=ln(-x)+3x，即有
x>0 时，f(x)=lnx-3x，f′(x)=$\frac{1}{x}$-3，
可得 f(1)=ln1-3=-3，f′(1)=1-3=-2，
则曲线 y=f(x)在点(1，-3)处的切线方程为 y-(-3)=-2(x-1)，
即为 2x+y+1=0.
答案：2x+y+1=0.

16. 已知直线 l：mx+y+3m-$\sqrt{3}$=0 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A，B 两点，过 A，B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，若|AB|=2$\sqrt{3}$，则|CD|=_____.

解析：由题意，|AB|=2$\sqrt{3}$，∴圆心到直线的距离 d=3，

∴$\frac{|3m-\sqrt{3}|?}{\sqrt{m^2+1?}}=3$，

∴m=-$\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴直线 l 的倾斜角为 30°，
∵过 A，B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，

∴|CD|=$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$=4.

答案：4.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$，其中 $\lambda\neq0$.

(1)证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

(2)若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ.

解析：(1)根据数列通项公式与前 n 项和公式之间的关系进行递推，结合等比数列的定义进行证明求解即可.

(2)根据条件建立方程关系进行求解就可.

答案：(1)∵$S_n=1+\lambda a_n$，$\lambda\neq0$.

∴$a_n\neq0$.

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\lambda a_n-1-\lambda a_{n-1}=\lambda a_n-\lambda a_{n-1}$，

即$(\lambda-1)a_n=\lambda a_{n-1}$，

∵$\lambda\neq0$，$a_n\neq0$. ∴$\lambda-1\neq0$. 即$\lambda\neq1$，

即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，(n≥2)，

∴$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，

当 n=1 时，$S_1=1+\lambda a_1=a_1$，

即 $a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，

∴$a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$.

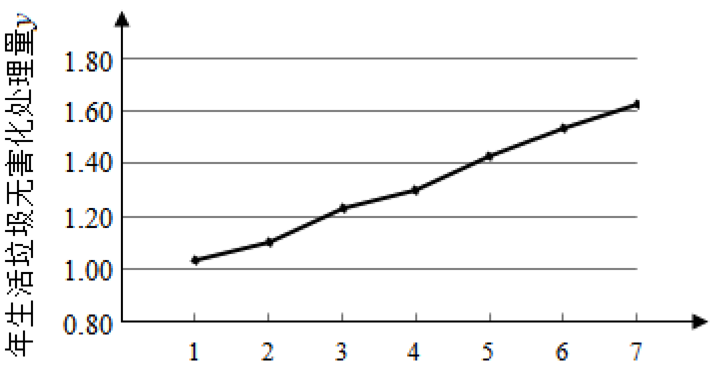
(2)若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，

则若 $S_5=1+\lambda\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^4\right)=\dfrac{31}{32}$，

即$\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)^5=\dfrac{31}{32}-1=-\dfrac{1}{32}$，

则$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，得$\lambda=-1$.

18. 如图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量(单位：亿吨)的折线图.



注：年份代码 1-7 分别对应年份 2008-2014.
(1)由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以证明；
(2)建立 y 关于 t 的回归方程(系数精确到 0.01)，预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.
附注：

参考数据：$\sum_{i=1}^{7} y_i = 9.32$，$\sum_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = 0.55$，$\sqrt{7}$ ≈2.646.

参考公式：$r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$，

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i + \bar{t}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2}$，

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$.

解析：(1)由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，将已知数据代入相关系数方程，可得答案；
(2)根据已知中的数据，求出回归系数，可得回归方程，2016 年对应的 t 值为 9，代入可预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.
答案：(1)由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，理由如下：
∵

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \bar{t}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \bar{t}\right)^2 \sum_{i=1}^{7}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{7} t_i y_i - 7\bar{t}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \bar{t}\right)^2 \sum_{i=1}^{7}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}} \approx \frac{40.17 - 4\times 9.32}{2\sqrt{7}\cdot 0.55} \approx \frac{2.89}{2.9106} \approx 0.996$$

，
∵0.996＞0.75，
故 y 与 t 之间存在较强的正相关关系；

(2) $\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} t_i y_i - 7\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7} t_i^2 - 7\bar{t}^2} \approx \dfrac{2.89}{28}$ ≈0.103，

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$ ≈1.331-0.103×4≈0.92，

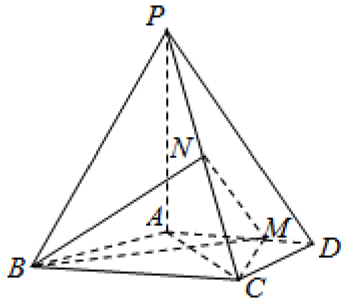
∴y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}$ =0.10t+0.92，

2016 年对应的 t 值为 9，

故 $\hat{y}$=0.10×9+0.92=1.82，

预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量为 1.82 亿吨.

19. 如图，四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AD∥BC，AB=AD=AC=3，PA=BC=4，M 为线段 AD 上一点，AM=2MD，N 为 PC 的中点.



(1)证明：MN∥平面 PAB;

(2)求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

解析：(1)法一、取 PB 中点 G，连接 AG，NG，由三角形的中位线定理可得 NG∥BC，且 NG=$\frac{1}{2}$BC，再由已知得 AM∥BC，且 AM=$\frac{1}{2}$BC，得到 NG∥AM，且 NG=AM，说明四边形 AMNG 为平行四边形，可得 NM∥AG，由线面平行的判定得到 MN∥平面 PAB;

法二、证明 MN∥平面 PAB，转化为证明平面 NEM∥平面 PAB，在△PAC 中，过 N 作 NE⊥AC，垂足为 E，连接 ME，由已知 PA⊥底面 ABCD，可得 PA∥NE，通过求解直角三角形得到 ME∥AB，由面面平行的判定可得平面 NEM∥平面 PAB，则结论得证;

(2)连接 CM，证得 CM⊥AD，进一步得到平面 PNM⊥平面 PAD，在平面 PAD 内，过 A 作 AF⊥PM，交 PM 于 F，连接 NF，则∠ANF 为直线 AN 与平面 PMN 所成角.然后求解直角三角形可得直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

答案：(1)证明：法一、如图，取 PB 中点 G，连接 AG，NG，

∵N 为 PC 的中点，

∴NG∥BC，且 NG=$\frac{1}{2}$BC，

又 AM=$\frac{2}{3}$AD=2，BC=4，且 AD∥BC，

∴AM∥BC，且 AM=$\frac{1}{2}$BC，

则 NG∥AM，且 NG=AM，

∴四边形 AMNG 为平行四边形，则 NM∥AG，

∵AG⊂平面 PAB，NM⊄平面 PAB，

∴MN∥平面 PAB;

法二、

在△PAC 中，过 N 作 NE⊥AC，垂足为 E，连接 ME，

在△ABC 中，由已知 AB=AC=3，BC=4，得 cos∠ACB=$\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}=\frac{2}{3}$，

∵AD∥BC，

∴cos∠EAM=$\frac{2}{3}$，则 sin∠EAM=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，

在△EAM 中，

∵AM=$\frac{2}{3}$AD=2，AE=$\frac{1}{2}$AC=$\frac{3}{2}$，

由余弦定理得：EM=$\sqrt{AE^2+AM^2-2AE\cdot AM\cdot cos\angle EAM}=\sqrt{\frac{9}{4}+4-2\times\frac{3}{2}\times2\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$，

∴cos∠AEM=$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-4}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{9}$，

而在△ABC 中，cos∠BAC=$\frac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}$，

∴cos∠AEM=cos∠BAC，即∠AEM=∠BAC，

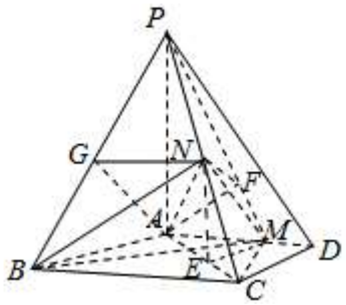
∴AB∥EM，则 EM∥平面 PAB.

由 PA⊥底面 ABCD，得 PA⊥AC，又 NE⊥AC，

∴NE∥PA，则 NE∥平面 PAB.

∵NE∩EM=E，

∴平面 NEM∥平面 PAB，则 MN∥平面 PAB；



(2)解：在△AMC 中，由 AM=2，AC=3，cos∠MAC=$\frac{2}{3}$，得 $CM^2=AC^2+AM^2-2AC\cdot AM\cdot cos\angle MAC=9+4-2\times3\times2\times\frac{2}{3}=5$.

∴$AM^2+MC^2=AC^2$，则 AM⊥MC，

∵PA⊥底面 ABCD，PA⊂平面 PAD，

∴平面 ABCD⊥平面 PAD，且平面 ABCD∩平面 PAD=AD，

∴CM⊥平面 PAD，则平面 PNM⊥平面 PAD.

在平面 PAD 内，过 A 作 AF⊥PM，交 PM 于 F，连接 NF，则∠ANF 为直线 AN 与平面 PMN 所成角.

在 Rt△PAC 中，由 N 是 PC 的中点，得 AN=$\frac{1}{2}$PC=$\frac{1}{2}\sqrt{PA^2+PC^2}$ $=\frac{5}{2}$，

在 Rt△PAM 中，由 PA•AM=PM•AF，得 AF=$\dfrac{PA\cdot AM}{PM}=\dfrac{4\times 2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}?}{5}$，

∴sin∠ANF=$\dfrac{AF}{AN}=\dfrac{\frac{4\sqrt{5}?}{5}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{8\sqrt{5}?}{25}$.

∴直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为$\dfrac{8\sqrt{5}?}{25}$.

20. 已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点.

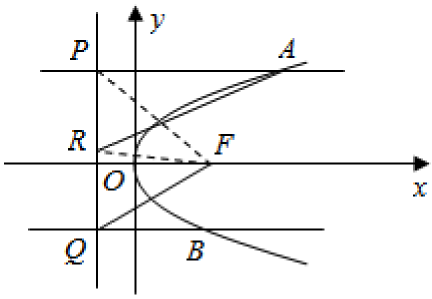
(Ⅰ)若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 AR∥FQ;

(Ⅱ)若△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

解析：(Ⅰ)连接 RF，PF，利用等角的余角相等，证明∠PRA=∠PRF，即可证明 AR∥FQ;

(Ⅱ)利用△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求出 N 的坐标，利用点差法求 AB 中点的轨迹方程.

答案：(Ⅰ)证明：连接 RF，PF，



由 AP=AF，BQ=BF 及 AP∥BQ，得∠AFP+∠BFQ=90°，

∴∠PFQ=90°，

∵R 是 PQ 的中点，

∴RF=RP=RQ，

∴△PAR≌△FAR，

∴∠PAR=∠FAR，∠PRA=∠FRA，

∵∠BQF+∠BFQ=180°−∠QBF=∠PAF=2∠PAR，

∴∠FQB=∠PAR，

∴∠PRA=∠PRF，

∴AR∥FQ.

(Ⅱ)设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，

F($\dfrac{1}{2}$，0)，准线为 x=−$\dfrac{1}{2}$，

$S_{\triangle PQF}=\dfrac{1}{2}|PQ|=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|$，

设直线 AB 与 x 轴交点为 N，

∴$S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}|FN||y_1-y_2|$，

∵△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，

∴2|FN|=1，∴$x_N=1$，即 N(1，0).

设 AB 中点为 M(x，y)，由$\begin{cases}y_1^2=2x_1\\y_2^2=2x_2\end{cases}$得 $y_1^2-y_2^2=2(x_1-x_2)$，

又$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y}{x-1}$，

∴$\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{1}{y}$，即 $y^2=x-1$.

∴AB 中点轨迹方程为 $y^2=x-1$.

21. 设函数 f(x)=acos2x+(a-1)(cosx+1)，其中 a＞0，记|f(x)|的最大值为 A.

(Ⅰ)求 f′(x)；

(Ⅱ)求 A；

(Ⅲ)证明：|f′(x)|≤2A.

解析：(Ⅰ)根据复合函数的导数公式进行求解即可求 f′(x)；

(Ⅱ)讨论 a 的取值，利用分类讨论的数学，结合换元法，以及一元二次函数的最值的性质进行求解；

(Ⅲ)由(Ⅰ)，结合绝对值不等式的性质即可证明：|f′(x)|≤2A.

答案：(Ⅰ)解：f′(x)=-2asin2x-(a-1)sinx.

(Ⅱ)当 a≥1 时，|f(x)|=|acos2x+(a-1)(cosx+1)|≤a+2(a-1)=3a-2=f(0)，因此 A=3a-2.

当 0＜a＜1 时，f(x)等价为 f(x)=acos2x+(a-1)(cosx+1)=2acos^{2}x+(a-1)cosx-1，

令 g(t)=2at^2+(a-1)t-1，

则 A 是|g(t)|在[-1，1]上的最大值，g(-1)=a，g(1)=3a-2，

且当 t=$\dfrac{1-a}{4a}$时，g(t)取得极小值，极小值为 g($\dfrac{1-a}{4a}$)=-$\dfrac{(a-1)^2}{8a}$-1=-$\dfrac{a^2+6a+1}{8a}$，

令-1＜$\dfrac{1-a}{4a}$＜1，得 a＜-$\dfrac{1}{3}$(舍)或 a＞$\dfrac{1}{5}$.因此 A=3a-2

g(-1)=a，g(1)=3a+2，a＜3a+2，∴t=1 时，g(t)取得最大值，g(1)=3a+2，即 f(x)的最大值为 3a+2.

综上可得：t=1 时，g(t)取得最大值，g(1)=3a+2，即 f(x)的最大值为 3a+2.

∴A=3a+2.

①当 0＜a≤$\dfrac{1}{5}$时，g(t)在(-1，1)内无极值点，|g(-1)|=a，|g(1)|=2-3a，|g(-1)|＜|g(1)|，

∴A=2-3a，

②当$\dfrac{1}{5}$＜a＜1 时，由 g(-1)-g(1)=2(1-a)＞0，得 g(-1)＞g(1)＞g($\dfrac{1-a}{4a}$)，

又|g($\dfrac{1-a}{4a}$)-g(-1)|=$\dfrac{(1-a)(1-7a)}{8a}$＞0，

$\therefore$A=|g($\frac{1-a}{4a}$)|=$\frac{a^2+6a+1}{8a}$,

综上，A=$\begin{cases} 2-3a, 0<a\le\frac{1}{5} \\ \frac{a^2+6a+1}{8a}, \frac{1}{5}<a<1. \\ 3a-2，a\ge 1 \end{cases}$

(III)证明：由(I)可得：|f′(x)|=|-2asin2x-(a-1)sinx|≤2a+|a-1|,

当 0<a≤$\frac{1}{5}$时，|f′(x)|≤1+a≤2-4a<2(2-3a)=2A,

当$\frac{1}{5}$<a<1 时，A=$\frac{a^2+6a+1}{8a}=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}\ge 1$,

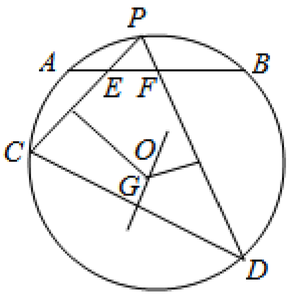
$\therefore$|f′(x)|≤1+a≤2A,

当 a≥1 时，|f′(x)|≤3a-1≤6a-4=2A,

综上：|f′(x)|≤2A.

请考生在第 22-24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-1：几何证明选讲]

22. 如图，⊙O 中$\overset{\frown}{AB}$的中点为 P，弦 PC，PD 分别交 AB 于 E，F 两点.



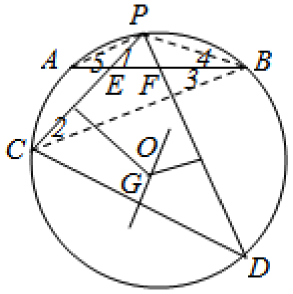
(1)若∠PFB=2∠PCD，求∠PCD 的大小；

(2)若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明：OG⊥CD.

解析：(1)连接 PA，PB，BC，设∠PEB=∠1，∠PCB=∠2，∠ABC=∠3，∠PBA=∠4，∠PAB=∠5，运用圆的性质和四点共圆的判断，可得 E，C，D，F 共圆，再由圆内接四边形的性质，即可得到所求∠PCD 的度数；

(2)运用圆的定义和 E，C，D，F 共圆，可得 G 为圆心，G 在 CD 的中垂线上，即可得证.

答案：(1)解：连接 PB，BC，



设∠PEB=∠1，∠PCB=∠2，∠ABC=∠3，
∠PBA=∠4，∠PAB=∠5，
由⊙O 中$\overset{\frown}{AB}$的中点为 P，可得∠4=∠5，
在△EBC 中，∠1=∠2+∠3，
又∠D=∠3+∠4，∠2=∠5，
即有∠2=∠4，则∠D=∠1，
则四点 E，C，D，F 共圆，
可得∠EFD+∠PCD=180°，
由∠PFB=∠EFD=2∠PCD，
即有 3∠PCD=180°，
可得∠PCD=60°；
(2)证明：由 C，D，E，F 共圆，
由 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G
可得 G 为圆心，即有 GC=GD，
则 G 在 CD 的中垂线，又 CD 为圆 G 的弦，
则 OG⊥CD.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

23. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{3}cos\alpha \\ y=sin\alpha \end{cases}$（α 为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

(1)写出 C_1的普通方程和 C_2的直角坐标方程；
(2)设点 P 在 C_1上，点 Q 在 C_2上，求|PQ|的最小值及此时 P 的直角坐标.

解析：(1)运用两边平方和同角的平方关系，即可得到 C_1的普通方程，运用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，以及两角和的正弦公式，化简可得 C_2的直角坐标方程；
(2)由题意可得当直线 x+y-4=0 的平行线与椭圆相切时，|PQ|取得最值.设与直线 x+y-4=0 平行的直线方程为 x+y+t=0，代入椭圆方程，运用判别式为 0，求得 t，再由平行线的距离公式，可得|PQ|的最小值，解方程可得 P 的直角坐标.

答案：(1)曲线 C_1的参数方程为 x=$\begin{cases} x=\sqrt{3}cos\alpha \\ y=sin\alpha \end{cases}$（α 为参数），

移项后两边平方可得$\dfrac{x^2}{3}+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，

即有椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$；

曲线 C_2的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$，

即有$\rho(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)=2\sqrt{2}$，

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，可得 $x+y-4=0$，
即有 C_2 的直角坐标方程为直线 $x+y-4=0$；
(2)由题意可得当直线 $x+y-4=0$ 的平行线与椭圆相切时，
$|PQ|$ 取得最值.
设与直线 $x+y-4=0$ 平行的直线方程为 $x+y+t=0$，
联立 $\begin{cases} x+y+t=0 \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$ 可得 $4x^2+6tx+3t^2-3=0$，
由直线与椭圆相切，可得 $\triangle=36t^2-16(3t^2-3)=0$，
解得 $t=\pm2$，
显然 $t=-2$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，
即有 $|PQ|=\dfrac{|-4-(-2)|?}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，
此时 $4x^2-12x+9=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$，
即为 $P(\dfrac{3}{2}，\dfrac{1}{2})$.

[选修 4-5：不等式选讲]
24. 已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.
(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant6$ 的解集；
(2)设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant3$，求 a 的取值范围.
解析：(1)当 $a=2$ 时，由已知得 $|2x-2|+2\leqslant6$，由此能求出不等式 $f(x)\leqslant6$ 的解集.
(2)由 $f(x)+g(x)=|2x-1|+|2x-a|+a\geqslant3$，得 $|x-\dfrac{1}{2}|+|x-\dfrac{a}{2}|\geqslant\dfrac{3-a}{2}$，由此能求出 a 的取值范围.
答案：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|2x-2|+2$，
$\because f(x)\leqslant6$，$\therefore |2x-2|+2\leqslant6$，
$|2x-2|\leqslant4$，$|x-1|\leqslant2$，
$\therefore -2\leqslant x-1\leqslant2$，
解得 $-1\leqslant x\leqslant3$，
$\therefore$ 不等式 $f(x)\leqslant6$ 的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$.
(2) $\because g(x)=|2x-1|$，
$\therefore f(x)+g(x)=|2x-1|+|2x-a|+a\geqslant3$，
$2|x-\dfrac{1}{2}|+2|x-\dfrac{a}{2}|+a\geqslant3$，
$|x-\dfrac{1}{2}|+|x-\dfrac{a}{2}|\geqslant\dfrac{3-a}{2}$，
当 $a\geqslant3$ 时，成立，
当 $a<3$ 时，$\dfrac{1}{2}|a-1|\geqslant\dfrac{3-a}{2}>0$，
$\therefore (a-1)^2\geqslant(3-a)^2$，
解得 $2\leqslant a<3$，

∴a 的取值范围是$[2，+\infty)$.