2013年普通高等学校招生全国统一考试（新课标Ⅰ）数学理

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.(5分)已知集合A={x|x^2-2x＞0}，$B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，则(　　)

A. A∩B=∅

B. A∪B=R

C. B⊆A

D. A⊆B

解析：∵集合A={x|x^2-2x＞0}={x|x＞2或x＜0}，∴A∩B={x|2＜x＜$\sqrt{5}$或-$\sqrt{5}$＜x＜0}，A∪B=R.

答案： B.

2.(5分)若复数z满足(3-4i)z=|4+3i|，则z的虚部为(　　)

A. -4

B. $-\frac{4}{5}$

C. 4

D. $\frac{4}{5}$

解析：∵复数z满足(3-4i)z=|4+3i|，∴$z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{25}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，

故z的虚部等于$\frac{4}{5}$,

答案：D.

3.(5分)为了解某地区中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大.在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是(　　)

A. 简单的随机抽样

B. 按性别分层抽样

C. 按学段分层抽样

D. 系统抽样

解析：我们常用的抽样方法有：简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，

而事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大.

了解某地区中小学生的视力情况，按学段分层抽样，这种方式具有代表性，比较合理.

答案：C.

4.(5分)已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则C的渐近线方程为(　　)

A. $y=\pm\frac{1}{4}x$

B. $y=\pm\frac{1}{3}x$

C. $y=\pm\frac{1}{2}x$

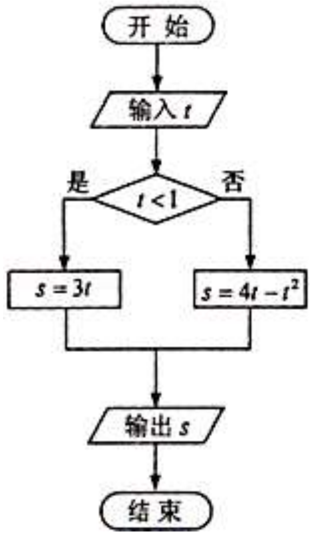
D. $y=\pm x$

解析：已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，故有$\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，

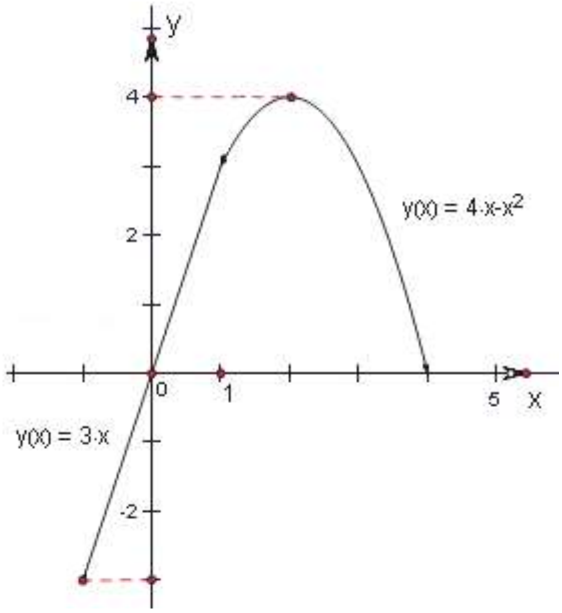
∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.故C的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，

答案：C.

5.(5分)执行程序框图，如果输入的t∈[-1，3]，则输出的s属于(　　)



A.[-3，4]
B.[-5，2]
C.[-4，3]
D.[-2，5]
解析：由判断框中的条件为t＜1，可得：函数分为两段，即t＜1与t≥1，



又由满足条件时函数的解析式为：s=3t；

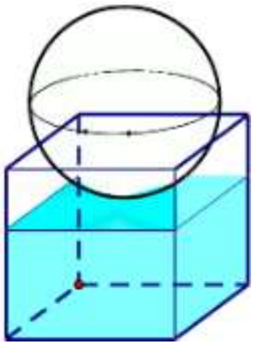
不满足条件时，即 t≥1 时，函数的解析式为：s=4t-t^2

故分段函数的解析式为：s=$\begin{cases}3t, & t<1\\ 4t-t^2, & t\geqslant 1\end{cases}$，

如果输入的 t∈[-1，3]，画出此分段函数在 t∈[-1，3]时的图象，则输出的 s 属于[-3，4].

答案：A.

6.(5 分)如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8cm，将一个球放在容器口，再向容器注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6cm，如不计容器的厚度，则球的体积为(　　)



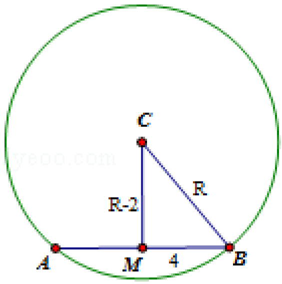
A. $\frac{500\pi}{3}cm^3$

B. $\frac{866\pi}{3}cm^3$

C. $\frac{1372\pi}{3}cm^3$

D. $\frac{2048\pi}{3}cm^3$

解析：设正方体上底面所在平面截球得小圆 M，则圆心 M 为正方体上底面正方形的中心.如图.



设球的半径为 R，根据题意得球心到上底面的距离等于(R-2)cm，而圆 M 的半径为 4，由球的截面圆性质，得 $R^2=(R-2)^2+4^2$，解出 R=5，

∴根据球的体积公式，该球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\times 5^3=\frac{500\pi}{3}cm^3$.

答案：A.

7.(5 分)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则 m=(　　)

A. 3

B. 4

C. 5

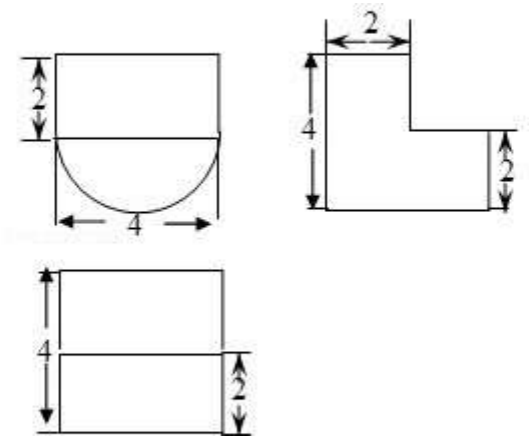
D. 6

解析：$a_m=S_m-S_{m-1}=2$，$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$，所以公差 $d=a_{m+1}-a_m=1$，$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=0$，得 $a_1=-2$，

所以 $a_m=-2+(m-1)\cdot 1=2$，解得 m=5，

答案：C.

8.(5 分)某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



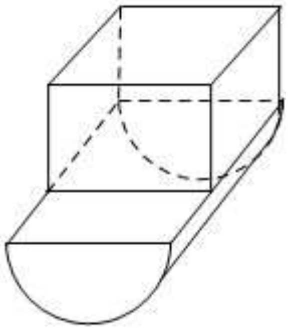
A. 16+8π

B. 8+8π

C. 16+16π

D. 8+16π

解析：三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合体，如图，



其中长方体长、宽、高分别是：4，2，2，半个圆柱的底面半径为2，母线长为4.∴长方体的体积=4×2×2=16，

半个圆柱的体积=$\frac{1}{2}$×2^2×π×4=8π 所以这个几何体的体积是16+8π；

答案：A.

9.(5分)设m为正整数，$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，若13a=7b，则m=(　　)

A.5

B.6

C.7

D.8

解析：∵m为正整数，由$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，以及二项式系数的性质可得a=C_{2m}^{m}，

同理，由$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，可得 b=C_{2m+1}^{m}=C_{2m+1}^{m+1}.

再由13a=7b，可得13C_{2m}^{m}=7C_{2m+1}^{m}，即 13×$\frac{(2m)!}{m!\cdot m!}$=7×$\frac{(2m+1)!}{m!\cdot(m+1)!}$，

即 13=7×$\frac{2m+1}{m+1}$，即 13(m+1)=7(2m+1)，解得m=6，

答案：B.

10.(5分)已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为F(3，0)，过点F的直线交椭圆E于A、B两点.若AB的中点坐标为(1，-1)，则E的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$

B.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C.$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$

D. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

解析：设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，代入椭圆方程得$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

相减得$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，∴$\dfrac{x_1+x_2}{a^2}+\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{b^2}=0$.

∵$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{-1-0}{1-3}=\dfrac{1}{2}$. ∴$\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2}{b^2}=0$，

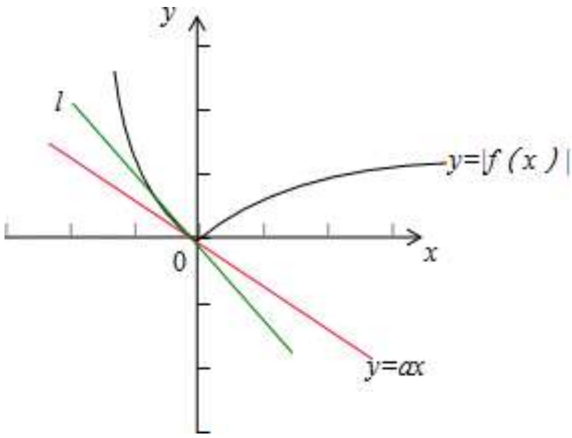
化为 $a^2=2b^2$，又 $c=3=\sqrt{a^2-b^2}$，解得 $a^2=18$，$b^2=9$. ∴椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

答案：D.

11.(5 分)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若$|f(x)|\geqslant ax$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty, 0]$
B. $(-\infty, 1]$
C. $[-2, 1]$
D. $[-2, 0]$

解析：由题意可作出函数 $y=|f(x)|$的图象，和函数 $y=ax$ 的图象，



由图象可知：函数 $y=ax$ 的图象为过原点的直线，当直线介于 l 和 x 轴之间符合题意，直线 l 为曲线的切线，且此时函数 $y=|f(x)|$在第二象限的部分解析式为 $y=x^2-2x$，
求其导数可得 $y'=2x-2$，因为 $x\leqslant 0$，故 $y'\leqslant -2$，故直线 l 的斜率为-2，
故只需直线 $y=ax$ 的斜率 a 介于-2 与 0 之间即可，即 $a\in[-2, 0]$
答案：D

12.(5 分)设△$A_nB_nC_n$的三边长分别为a_n，b_n，c_n，△$A_nB_nC_n$的面积为S_n，n=1，2，3…若$b_1>c_1$，$b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$，则(　　)

A.$\{S_n\}$为递减数列
B.$\{S_n\}$为递增数列
C.$\{S_{2n-1}\}$为递增数列，$\{S_{2n}\}$为递减数列
D.$\{S_{2n-1}\}$为递减数列，$\{S_{2n}\}$为递增数列

解析：因为$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$，所以$a_n=a_1$，

所以$b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+\frac{b_n+c_n}{2}=a_1+\frac{b_n+c_n}{2}$，所以$b_{n+1}+c_{n+1}-2a_1=\frac{1}{2}(b_n+c_n-2a_1)$，

又$b_1+c_1=2a_1$，所以$b_n+c_n=2a_1$，

于是，在△$A_nB_nC_n$中，边长$B_nC_n=a_1$为定值，另两边A_nC_n、A_nB_n的长度之和$b_n+c_n=2a_1$为定值，

因为$b_{n+1}-c_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}-\frac{b_n+a_n}{2}=-\frac{1}{2}(b_n-c_n)$，所以$b_n-c_n=$

$(-\frac{1}{2})^{n-1}(b_1-c_1)$，

当$n\to+\infty$时，有$b_n-c_n\to0$，即$b_n\to c_n$，

于是△$A_nB_nC_n$的边B_nC_n的高h_n随着n的增大而增大，所以其面积$S_n=\frac{1}{2}|B_nC_n|\cdot h_n=\frac{1}{2}a_1h_n$为递增数列，

答案：B.

二.填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13.(5 分)已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为 60°，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$.若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则 t=____.

解析：∵$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，∴$\vec{c}\cdot\vec{b}=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=0$，

∴tcos60°+1-t=0，∴$1-\frac{1}{2}t=0$，解得 t=2.

答案：2.

14.(5 分)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$______.

解析：当 n=1 时，$a_1=S_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$，解得$a_1=1$

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3})-(\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}a_{n-1}$，

整理可得$\frac{1}{3}a_n=-\frac{2}{3}a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$，

故数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，-2 为公比的等比数列，故$a_n=1\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

答案：$(-2)^{n-1}$

15.(5 分)设当 x=θ 时，函数 f(x)=sinx-2cosx 取得最大值，则 cosθ=______.

解析：$f(x)=\sin x-2\cos x=\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x)=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$(其中 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$)，

∵x=θ 时，函数 f(x)取得最大值，∴$\sin(\theta-\alpha)=1$，即 $\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5}$，

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，联立解得 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

16.(5 分)若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$的图象关于直线 x=-2 对称，则 f(x)的最大值为______.

解析：∵函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$的图象关于直线 x=-2 对称，

∴f(-1)=f(-3)=0 且 f(1)=f(-5)=0，

即$[1-(-3)^2][(-3)^2+a\cdot(-3)+b]=0$且$[1-(-5)^2][(-5)^2+a\cdot(-5)+b]=0$，解之得$\begin{cases}a=8\\b=15\end{cases}$，

因此，$f(x)=(1-x^2)(x^2+8x+15)=-x^4-8x^3-14x^2+8x+15$，求导数，得 $f'(x)=-4x^3-24x^2-28x+8$，

令 f'(x)=0，得 $x_1=-2-\sqrt{5}$，$x_2=-2$，$x_3=-2+\sqrt{5}$，

当 $x\in(-\infty，-2-\sqrt{5})$时，f'(x)＞0；当 $x\in(-2-\sqrt{5}，-2)$时，f'(x)＜0；

当 $x\in(-2，-2+\sqrt{5})$时，f'(x)＞0； 当 $x\in(-2+\sqrt{5}，+\infty)$时，f'(x)＜0，

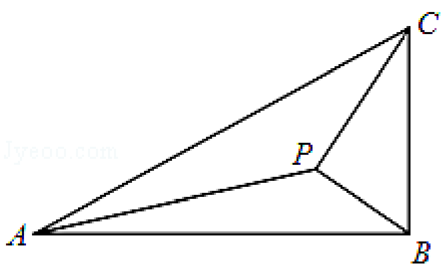
∴f(x)在区间$(-\infty，-2-\sqrt{5})$、$(-2，-2+\sqrt{5})$上是增函数，在区间$(-2-\sqrt{5}，-2)$、$(-2+\sqrt{5}，+\infty)$上是减函数，

又∵$f(-2-\sqrt{5})=f(-2+\sqrt{5})=16$，∴f(x)的最大值为 16.

答案：16

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.(12 分)如图，在△ABC 中，∠ABC=90°，$AB=\sqrt{3}$，BC=1，P 为△ABC 内一点，∠BPC=90°



(Ⅰ)若 $PB=\frac{1}{2}$，求 PA；

(Ⅱ)若∠APB=150°，求 tan∠PBA.

解析：(I)在 Rt△PBC，利用边角关系即可得到∠PBC=60°，得到∠PBA=30°.在△PBA 中，利用余弦定理即可求得 PA.

(II)设∠PBA=α，在Rt△PBC中，可得PB=sinα.在△PBA中，由正弦定理得

$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)}$，化简即可求出.

答案：(I)在Rt△PBC中，$\cos\angle PBC=\frac{PB}{BC}=\frac{1}{2}$，∴∠PBC=60°，∴∠PBA=30°.

在△PBA中，由余弦定理得$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cos 30^\circ=$

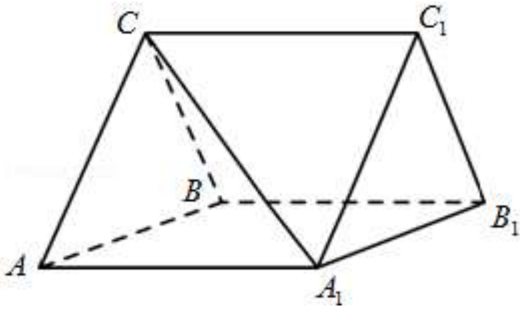
$(\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{4}$. ∴$PA=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(II)设∠PBA=α，在Rt△PBC中，PB=BCcos(90°−α)=sinα.

在△PBA中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)}$，

化为$\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$. ∴$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

18.(12分)如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，CA=CB，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$.



(Ⅰ)证明$AB\perp A_1C$；

(Ⅱ)若平面ABC⊥平面AA_1B_1B，AB=CB，求直线A_1C与平面BB_1C_1C所成角的正弦值.

解析：(Ⅰ)取AB的中点O，连接OC，OA_1，A_1B，由已知可证$OA_1\perp AB$，AB⊥平面OA_1C，进而可得$AB\perp A_1C$；

(Ⅱ)易证OA，OA_1，OC两两垂直.以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$的方向为x轴的正向，$|\overrightarrow{OA}|$为单位长，建立坐标系，可得$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$的坐标，设$\vec{n}=(x, y, z)$为平面BB_1C_1C的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，可解得$\vec{n}=(\sqrt{3}, 1, -1)$，可求$\cos<\vec{n}, \overrightarrow{A_1C}>$，即为所求正弦值.

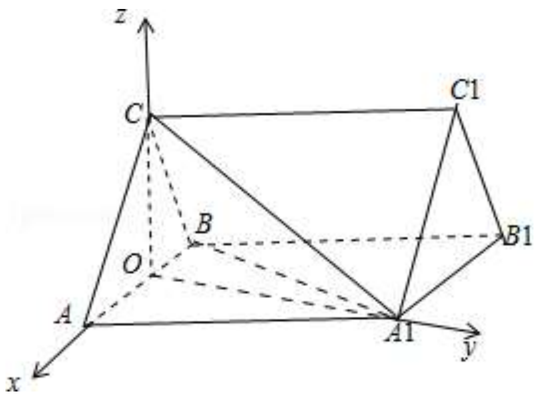
答案：(Ⅰ)取AB的中点O，连接OC，OA_1，A_1B，

因为CA=CB,所以OC⊥AB,由于$AB=AA_1$,$\angle BAA_1=60^\circ$,所以$\triangle AA_1B$为等边三角形,所以$OA_1\perp AB$,又因为$OC\cap OA_1=O$，所以AB⊥平面OA_1C，又$A_1C\subset$平面OA_1C，故$AB\perp A_1C$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知OC⊥AB，$OA_1\perp AB$，又平面ABC⊥平面AA_1B_1B，交线为AB，

所以OC⊥平面AA_1B_1B，故OA，OA_1，OC两两垂直.

以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$的方向为x轴的正向，$|\overrightarrow{OA}|$为单位长，建立如图所示的坐标系，



可得 $A(1,0,0)$，$A_1(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$B(-1,0,0)$，

则 $\overrightarrow{BC}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 为平面 BB_1C_1C 的法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ -x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

可取 $y=1$，可得 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，故 $\cos<\overrightarrow{n},\overrightarrow{A_1C}>=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为：$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

19.(12 分)一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件作检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 n=3，再从这批产品中任取 4 件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 n=4，再从这批产品中任取 1 件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\dfrac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立.

(Ⅰ)求这批产品通过检验的概率；

(Ⅱ)已知每件产品检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为 X(单位：元)，求 X 的分布列及数学期望.

解析：(Ⅰ)设第一次取出的 4 件产品中恰有 3 件优质品为事件 A_1，第一次取出的 4 件产品全是优质品为事件 A_2，第二次取出的 4 件产品全是优质品为事件 B_1，第二次取出的 1 件产品是优质品为事件 B_2，这批产品通过检验为事件 A，依题意有 $A=(A_1B_1)\cup(A_2B_2)$，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，由概率得加法公式和条件概率，代入数据计算可得；

(Ⅱ)X 可能的取值为 400，500，800，分别求其概率，可得分布列，进而可得期望值.

答案：(Ⅰ)设第一次取出的 4 件产品中恰有 3 件优质品为事件 A_1，第一次取出的 4 件产品全是优质品为事件 A_2，

第二次取出的 4 件产品全是优质品为事件 B_1，第二次取出的 1 件产品是优质品为事件 B_2，这批产品通过检验为事件 A，依题意有 $A=(A_1B_1)\cup(A_2B_2)$，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，

所以 $P(A)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)=\dfrac{4}{16}\times\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{64}$

(Ⅱ)X 可能的取值为 400，500，800，并且 $P(X=800)=\dfrac{1}{4}$，$P(X=500)=\dfrac{1}{16}$，

$P(X=400)=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$，故 X 的分布列如下：

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

故 $EX=400\times\frac{11}{16}+500\times\frac{1}{16}+800\times\frac{1}{4}=506.25$

20.(12 分)已知圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(Ⅰ)求 C 的方程；

(Ⅱ)l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A，B 两点，当圆 P 的半径最长时，求|AB|.

解析：(I)设动圆的半径为 R，由已知动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，可得 $|PM|+|PN|=R+1+(3-R)=4$，而 $|NM|=2$，由椭圆的定义可知：动点 P 的轨迹是以 M，N 为焦点，4 为长轴长的椭圆，求出即可；

(II)设曲线 C 上任意一点 P(x，y)，由于 $|PM|-|PN|=2R-2\leqslant 4-2=2$，所以 $R\leqslant 2$，当且仅当⊙P 的圆心为(2，0)R=2 时，其半径最大，其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.分①l 的倾斜角为 90°，此时 l 与 y 轴重合，可得|AB|.②若 l 的倾斜角不为 90°，由于⊙M 的半径 $1\neq R$，可知 l 与 x 轴不平行，设 l 与 x 轴的交点为 Q，根据 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得 Q(-4，0)，所以可设 l：$y=k(x+4)$，与椭圆的方程联立，得到根与系数的关系利用弦长公式即可得出.

答案：(I)由圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，可知圆心 M(-1，0)；圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，圆心 N(1，0)，半径 3.

设动圆的半径为 R，∵动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，∴$|PM|+|PN|=R+1+(3-R)=4$，

而 $|NM|=2$，由椭圆的定义可知：动点 P 的轨迹是以 M，N 为焦点，4 为长轴长的椭圆，

∴a=2，c=1，$b^2=a^2-c^2=3$.

∴曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.(去掉点(-2，0))

(II)设曲线 C 上任意一点 P(x，y)，

由于 $|PM|-|PN|=2R-2\leqslant 4-2=2$，所以 $R\leqslant 2$，当且仅当⊙P 的圆心为(2，0)R=2 时，其半径最大，其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

①l 的倾斜角为 90°，则 l 与 y 轴重合，可得 $|AB|=2\sqrt{3}$.

②若 l 的倾斜角不为 90°，由于⊙M 的半径 $1\neq R$，可知 l 与 x 轴不平行，

设 l 与 x 轴的交点为 Q，则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得 Q(-4，0)，所以可设 l：$y=k(x+4)$，

由 l 于 M 相切可得：$\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$时，联立$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得到 $7x^2+8x-8=0$. ∴ $x_1+x_2=-\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}\sqrt{(-\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{18}{7}$

由于对称性可知：当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$时，也有$|AB|=\frac{18}{7}$.

综上可知：$|AB|=2\sqrt{3}$或$\frac{18}{7}$.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$若曲线 $y=f(x)$和曲线 $y=g(x)$都过点 P(0，2)，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.

(Ⅰ)求 a，b，c，d 的值；

(Ⅱ)若 $x\geqslant -2$ 时，$f(x)\leqslant kg(x)$，求 k 的取值范围.

解析：(I)对 f(x)，g(x)进行求导，已知在交点处有相同的切线及曲线 y=f(x)和曲线 y=g(x)都过点 P(0，2)，从而解出 a，b，c，d 的值；

(II)由(I)得出 f(x)，g(x)的解析式，再求出 F(x)及它的导函数，通过对 k 的讨论，判断出 F(x)的最值，从而判断出 $f(x)\leqslant kg(x)$恒成立，从而求出 k 的范围.

答案：(I)由题意知 $f(0)=2$，$g(0)=2$，$f'(0)=4$，$g'(0)=4$，

而 $f'(x)=2x+a$，$g'(x)=e^x(cx+d+c)$，故 $b=2$，$d=2$，$a=4$，$d+c=4$，

从而 $a=4$，$b=2$，$c=2$，$d=2$；

(II)由(I)知，$f(x)=x^2+4x+2$，$g(x)=2e^x(x+1)$

设 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2$，则 $F'(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$，

由题设得 $F(0)\geqslant 0$，即 $k\geqslant 1$，令 $F'(x)=0$，得 $x_1=-\ln k$，$x_2=-2$，

(i)若 $1\leqslant k\leqslant e^2$，则 $-2<x_1\leqslant 0$，从而当 $x\in(-2,x_1)$时，$F'(x)<0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$时，$F'(x)>0$，

即 F(x)在$(-2,x_1)$上减，在$(x_1,+\infty)$上是增，故 F(x)在$[-2,+\infty)$上的最小值为 $F(x_1)$，

而 $F(x_1)=-x_1(x_1+2)\geqslant 0$，$x\geqslant -2$ 时 $F(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\leqslant kg(x)$恒成立，

(ii)若 $k=e^2$，则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})$，从而当 $x\in(-2,+\infty)$时，$F'(x)>0$，

即 F(x)在$(-2,+\infty)$上是增，而 $f(-2)=0$，故当 $x\geqslant -2$ 时，$F(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\leqslant kg(x)$恒成立，

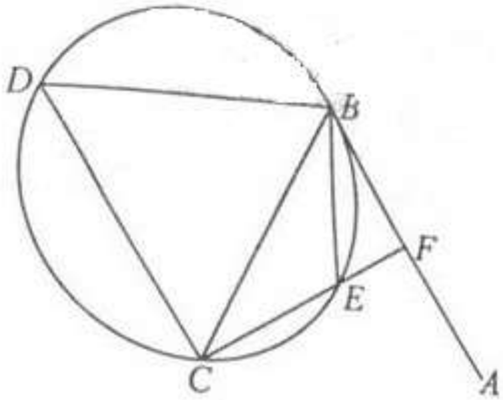
(iii)若 $k>e^2$时，$x_1<-2=x_2$，当 $x\geqslant -2$ 时，$F'(x)\geqslant 0$，$F(x)\geqslant F(0)$，故 $f(x)\leqslant kg(x)$恒成立，

综上，k 的取值范围是$[1,+\infty)$.

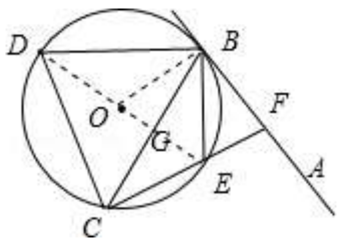
四、请考生在第 22、23、24 题中任选一道作答，并用 2B 铅笔将答题卡上所选的题目对应的题号右侧方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分，不涂，按本选考题的首题进行评分.

22.(10 分)(选修 4-1：几何证明选讲)

如图，直线 AB 为圆的切线，切点为 B，点 C 在圆上，∠ABC 的角平分线 BE 交圆于点 E，DB 垂直 BE 交圆于 D.



(Ⅰ)证明：DB=DC；
(Ⅱ)设圆的半径为 1，BC=$\sqrt{3}$，延长 CE 交 AB 于点 F，求△BCF 外接圆的半径.
解析：(I)连接 DE 交 BC 于点 G，由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，由已知角平分线可得∠ABE=∠CBE，于是得到∠CBE=∠BCE，BE=CE.由已知 DB⊥BE，可知 DE 为⊙O 的直径，Rt△DBE≌Rt△DCE，利用三角形全等的性质即可得到 DC=DB.
(II)由(I)可知：DG 是 BC 的垂直平分线，即可得到 BG=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.设 DE 的中点为 O，连接 BO，可得∠BOG=60°.从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°.得到 CF⊥BF.进而得到 Rt△BCF 的外接圆的半径=$\frac{1}{2}BC$.
答案：(I)连接 DE 交 BC 于点 G.



由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，而∠ABE=∠CBE，∴∠CBE=∠BCE，BE=CE.
又∵DB⊥BE，∴DE 为⊙O 的直径，∠DCE=90°.∴△DBE≌△DCE，∴DC=DB.
(II)由(I)可知：∠CDE=∠BDE，DB=DC.故 DG 是 BC 的垂直平分线，∴BG=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.
设 DE 的中点为 O，连接 BO，则∠BOG=60°.从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°.
∴CF⊥BF.∴Rt△BCF 的外接圆的半径=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23.(选修 4-4：坐标系与参数方程)
已知曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$(t 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(Ⅰ)把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；
(Ⅱ)求 C_1 与 C_2 交点的极坐标($\rho\geqslant0$，$0\leqslant\theta<2\pi$)

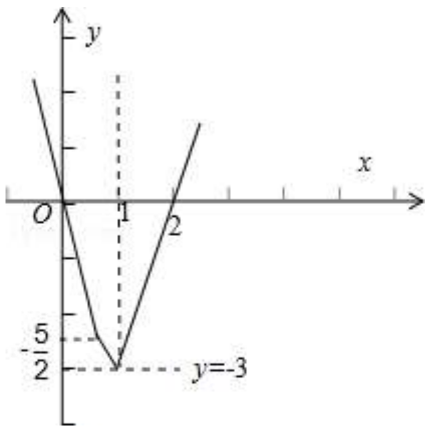
解析：(Ⅰ)对于曲线 C_1 利用三角函数的平方关系式 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 即可得到圆 C_1 的普通方程；再利用极坐标与直角坐标的互化公式即可得到 C_1 的极坐标方程；
(Ⅱ)先求出曲线 C_2 的极坐标方程；再将两圆的方程联立求出其交点坐标，最后再利用极坐标与直角坐标的互化公式即可求出 C_1 与 C_2 交点的极坐标.

答案：(Ⅰ)曲线 C_1 的参数方程式 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$ (t 为参数)，
得 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$ 即为圆 C_1 的普通方程，即 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$.
将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，得.
$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$，此即为 C_1 的极坐标方程；
(Ⅱ)曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$ 化为直角坐标方程为：$x^2+y^2-2y=0$，
由 $\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+16=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$.
∴C_1 与 C_2 交点的极坐标分别为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$，$(2, \frac{\pi}{2})$.

24.(选修 4-5：不等式选讲)
已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$.
(Ⅰ)当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集；
(Ⅱ)设 $a>-1$，且当 $x\in[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，求 a 的取值范围.

解析：(Ⅰ)当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$.设 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，画出函数 y 的图象，数形结合可得结论.
(Ⅱ)不等式化即 $1+a\leqslant x+3$，故 $x\geqslant a-2$ 对 $x\in[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 都成立.故 $-\frac{a}{2}\geqslant a-2$，由此解得 a 的取值范围.

答案：(Ⅰ)当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$.
设 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，则 $y=\begin{cases} -5x, & x<\frac{1}{2} \\ -x-2, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \\ 3x-6, & x>1 \end{cases}$，它的图象如图所示：



结合图象可得，$y<0$ 的解集为 $(0, 2)$，故原不等式的解集为 $(0, 2)$.

(Ⅱ)设 a＞-1，且当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，f(x)=1+a，不等式化为 1+a≤x+3，故 x≥a-2 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 都成立.

故$-\frac{a}{2}\geqslant a-2$，解得 $a\leqslant\frac{4}{3}$，故 a 的取值范围为$(-1，\frac{4}{3}]$.