2015年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学理

一、选择题(每小题5分，共40分)

1.复数 $i(2-i)=$(　　)

A.$1+2i$

B.$1-2i$

C.$-1+2i$

D.$-1-2i$

解析：原式$=2i-i^2=2i-(-1)=1+2i$；

故选：A.

2.若 x，y 满足$\begin{cases} x-y\leqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为(　　)

A.0

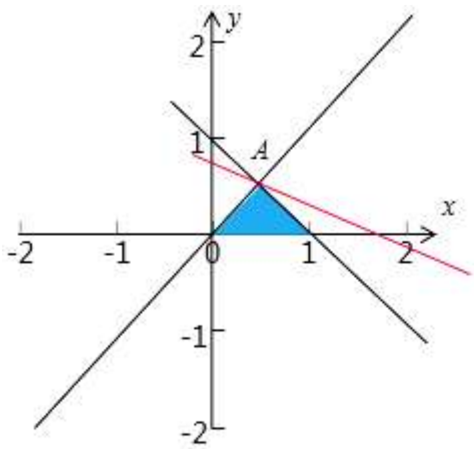
B.1

C.$\dfrac{3}{2}$

D.2

解析：作出不等式组$\begin{cases} x-y\leqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域，

得到如图的三角形及其内部阴影部分，



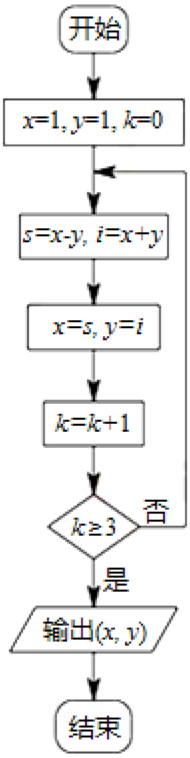
由$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$，解得 $A(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，目标函数 $z=x+2y$，将直线 $z=x+2y$ 进行平移，

当 l 经过点 A 时，目标函数 z 达到最大值

∴$z_{最大值}=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

故选：C.

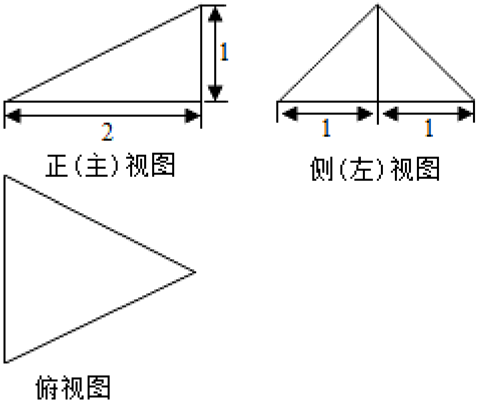
3.执行如图所示的程序框图，输出的结果为(　　)



A.(-2，2)
B.(-4，0)
C.(-4，-4)
D.(0，-8)
解析：模拟执行程序框图，可得
x=1，y=1，k=0
s=0，i=2
x=0，y=2，k=1
不满足条件k≥3，s=-2，i=2，x=-2，y=2，k=2
不满足条件k≥3，s=-4，i=0，x=-4，y=0，k=3
满足条件k≥3，退出循环，输出(-4，0)，
故选：B.

4.设α，β是两个不同的平面，m是直线且m⊂α，“m∥β“是“α∥β”的(　　)
A.充分而不必要条件
B.必要而不充分条件
C.充分不要条件
D.既不充分也不必要条件
解析：m⊂α，m∥β得不到α∥β，因为α，β可能相交，只要m和α，β的交线平行即可得到m∥β；
α∥β，m⊂α，∴m和β没有公共点，∴m∥β，即α∥β能得到m∥β；
∴“m∥β”是“α∥β”的必要不充分条件.
故选B.

5. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是(　　)



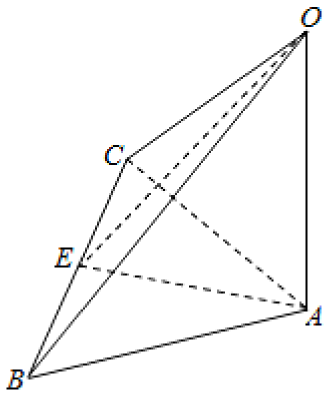
A. $2+\sqrt{5}$

B. $4+\sqrt{5}$

C. $2+2\sqrt{5}$

D. 5

解析：根据三视图可判断直观图为：



OA⊥面 ABC，AC=AB，E 为 BC 中点，

EA=2，EA=EB=1，OA=1，

∴可得 AE⊥BC，BC⊥OA，

运用直线平面的垂直得出：BC⊥面 AEO，$AC=\sqrt{5}$，$OE=\sqrt{5}$

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 1=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

故该三棱锥的表面积是 $2+2\sqrt{5}$，

故选：C.

6. 设$\{a_n\}$是等差数列，下列结论中正确的是(　　)

A. 若 $a_1+a_2>0$，则 $a_2+a_3>0$

B. 若 $a_1+a_3<0$，则 $a_1+a_2<0$，

C. 若 $0<a_1<a_2$，则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$

D.若 $a_1<0$，则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

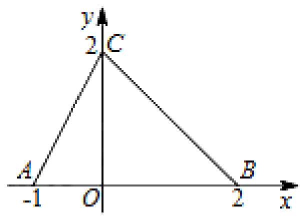
解析：若 $a_1+a_2>0$，则 $2a_1+d>0$，$a_2+a_3=2a_1+3d>2d$，$d>0$ 时，结论成立，即 A 不正确；若 $a_1+a_2<0$，则 $2a_1+d<0$，$a_2+a_3=2a_1+3d<2d$，$d<0$ 时，结论成立，即 B 不正确；

$\{a_n\}$是等差数列，$0<a_1<a_2$，$2a_2=a_1+a_3>2\sqrt{a_1a_3}$，$\therefore a_2>\sqrt{a_1a_3}$，即 C 正确；

若 $a_1<0$，则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)=-d^2<0$，即 D 不正确.

故选：C.

7.如图，函数 $f(x)$的图象为折线 ACB，则不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$的解集是(　　)



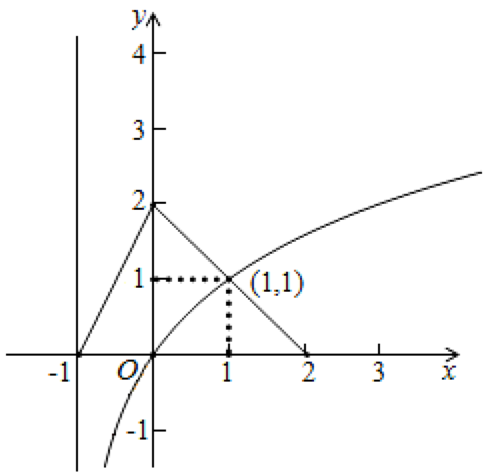
A.$\{x|-1<x\leqslant0\}$

B.$\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$

C.$\{x|-1<x\leqslant1\}$

D.$\{x|-1<x\leqslant2\}$

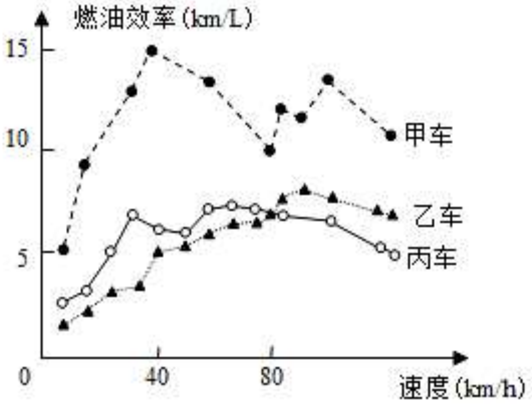
解析：由已知 $f(x)$的图象，在此坐标系内作出 $y=\log_2(x+1)$的图象，如图



满足不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$的 x 范围是$-1<x\leqslant1$；所以不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$的解集是$\{x|-1<x\leqslant1\}$；

故选 C.

8.汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程，如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况，下列叙述中正确的是(　　)



A.消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米

B.以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多

C.甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油

D.某城市机动车最高限速 80 千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油

解析：对于选项 A，消耗 1 升汽油，乙车行驶的距离比 5 小的很多，故 A 错误；

对于选项 B，以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最小，故 B 错误，

对于选项 C，甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，里程为 80 千米，燃油效率为 10，故消耗 8 升汽油，故 C 错误，

对于选项 D，因为在速度低于 80 千米/小时，丙的燃油效率高于乙的燃油效率，故 D 正确.

二、填空题(每小题 5 分，共 30 分)

9.在$(2+x)^5$的展开式中，x^3的系数为_____(用数字作答)

解析：$(2+x)^5$的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r 2^{5-r}x^r$，

所求x^3的系数为：$C_5^3 2^2=40$.

故答案为：40.

10.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$，则 a=_____.

解析：运用双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{a}$，结合条件可得$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$，即可得到 a 的值.

答案：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{a}$，

由题意可得$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$，

解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.在极坐标系中，点$(2,\frac{\pi}{3})$到直线$\rho(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=6$的距离为_____.

解析：点P(2，$\frac{\pi}{3}$)化为P$(1，\sqrt{3})$.

直线 ρ(cosθ+$\sqrt{3}$sinθ)=6 化为$x+\sqrt{3}y-6=0$.

∴点P到直线的距离$d=\frac{|1+3-6|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=1$.

故答案为：1.

12.在△ABC中，a=4，b=5，c=6，则$\frac{\sin 2A}{\sin C}$=_____.

解析：∵△ABC中，a=4，b=5，c=6，

∴cosC=$\frac{16+25-36}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$，cosA=$\frac{25+36-16}{2\times5\times6}=\frac{3}{4}$

∴sinC=$\frac{3\sqrt{7}}{8}$，sinA=$\frac{\sqrt{7}}{4}$，

∴$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=1$.

故答案为：1.

13.在△ABC中，点M，N满足$\overline{AM}=2\overline{MC}$，$\overline{BN}=\overline{NC}$，若$\overline{MN}=x\overline{AB}+y\overline{AC}$，则x=_____，y=_____.

解析：首先利用向量的三角形法则，将所求用向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示，然后利用平面向量基本定理得到x，y值.

答案：由已知得到$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$;

由平面向量基本定理，得到$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{6}$;

14.设函数f(x)=$\begin{cases}2^x-a, & x<1\\ 4(x-a)(x-2a), & x\geqslant1\end{cases}$,

①若a=1，则f(x)的最小值为_____;

②若f(x)恰有2个零点，则实数a的取值范围是_____.

解析：①分别求出分段的函数的最小值，即可得到函数的最小值;

②分别设h(x)=2^x-a，g(x)=4(x-a)(x-2a)，分两种情况讨论，即可求出a的范围.

答案：①当a=1时，f(x)=$\begin{cases}2^x-1, & x<1\\ 4(x-1)(x-2), & x\geqslant1\end{cases}$,

当x＜1时，f(x)=2^x-1为增函数，f(x)＞-1,

当 x＞1 时，$f(x)=4(x-1)(x-2)=4(x^2-3x+2)=4(x-\frac{3}{2})^2-1$，

当 $1<x<\frac{3}{2}$时，函数单调递减，当 $x>\frac{3}{2}$时，函数单调递增，

故当 $x=\frac{3}{2}$时，$f(x)_{min}=f(\frac{3}{2})=-1$，

②设 $h(x)=2^x-a$，$g(x)=4(x-a)(x-2a)$

若在 x＜1 时，h(x)=与 x 轴有一个交点，

所以 a＞0，并且当 x=1 时，h(1)=2-a＞0，所以 0＜a＜2，

而函数 $g(x)=4(x-a)(x-2a)$有一个交点，所以 2a≥1，且 a＜1，

所以$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，

若函数 $h(x)=2^x-a$ 在 x＜1 时，与 x 轴没有交点，

则函数 $g(x)=4(x-a)(x-2a)$有两个交点，

当 a≤0 时，h(x)与 x 轴无交点，g(x)无交点，所以不满足题意(舍去)，

当 h(1)=2-a≤时，即 a≥2 时，g(x)的两个交点为 $x_1=a$，$x_2=2a$，都是满足题意的，

综上所述 a 的取值范围是$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，或 a≥2.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15.已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

(1)求 f(x)的最小正周期;

(2)求 f(x)在区间[-π，0]上的最小值.

解析：(1)运用二倍角公式和两角和的正弦公式，化简 f(x)，再由正弦喊话说的周期，即可得到所求;

(2)由 x 的范围，可得 $x+\frac{\pi}{4}$的范围，再由正弦函数的图象和性质，即可求得最小值.

答案：(1)$f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 f(x)的最小正周期为 2π;

(2)由-π≤x≤0，可得

$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

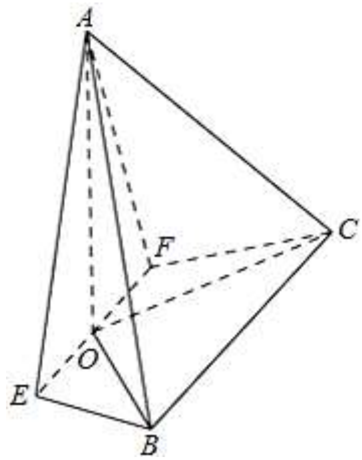
即有 $-1\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则当 $x=-\frac{3\pi}{4}$时，$\sin(x+\frac{\pi}{4})$取得最小值-1，

则有 $f(x)$在区间$[-\pi，0]$上的最小值为$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. A，B 两组各有 7 位病人，他们服用某种药物后的康复时间(单位：天)记录如下：
A 组：10，11，12，13，14，15，16
B 组；12，13，15，16，17，14，a
假设所有病人的康复时间相互独立，从 A，B 两组随机各选 1 人，A 组选出的人记为甲，B 组选出的人记为乙.
(1)求甲的康复时间不少于 14 天的概率；
(2)如果 a=25，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；
(3)当 a 为何值时，A，B 两组病人康复时间的方差相等？(结论不要求证明)
解析：设事件 A_i为“甲是 A 组的第 i 个人”，事件 B_i为“乙是 B 组的第 i 个人”，由题意可知 $P(A_i)=P(B_i)=\frac{1}{7}$，i=1，2，・・，7
(1)事件等价于“甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人”，由概率公式可得；
(2)设事件“甲的康复时间比乙的康复时间长”$C=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$，易得 $P(C)=10P(A_4B_1)$，易得答案；
(3)由方差的公式可得.
答案：设事件 A_i为“甲是 A 组的第 i 个人”，事件 B_i为“乙是 B 组的第 i 个人”，
由题意可知 $P(A_i)=P(B_i)=\frac{1}{7}$，i=1，2，・・，7
(1)事件“甲的康复时间不少于 14 天”等价于“甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人”
∴甲的康复时间不少于 14 天的概率 $P(A_5\cup A_6\cup A_7)=P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)=\frac{3}{7}$；
(2)设事件 C 为“甲的康复时间比乙的康复时间长”，
则 $C=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$，
$\therefore P(C)=P(A_4B_1)+P(A_5B_1)+P(A_6B_1)P+(A_7B_1)+P(A_5B_2)+P(A_6B_2)+P(A_7B_2)+P(A_7B_3)+P(A_6B_6)+P(A_7B_6)$
$=10P(A_4B_1)=10P(A_4)P(B_1)=\frac{10}{49}$
(3)当 a 为 11 或 18 时，A，B 两组病人康复时间的方差相等.

17.如图，在四棱锥 A-EFCB 中，△AEF 为等边三角形，平面 AEF⊥平面 EFCB，EF∥BC，BC=4，EF=2a，∠EBC=∠FCB=60°，O 为 EF 的中点.



(1)求证：AO⊥BE.

(2)求二面角 F-AE-B 的余弦值；

(3)若 BE⊥平面 AOC，求 a 的值.

解析：(1)根据线面垂直的性质定理即可证明 AO⊥BE.

(2)建立空间坐标系，利用向量法即可求二面角 F-AE-B 的余弦值；

(3)利用线面垂直的性质，结合向量法即可求 a 的值

答案：(1)∵△AEF 为等边三角形，O 为 EF 的中点，

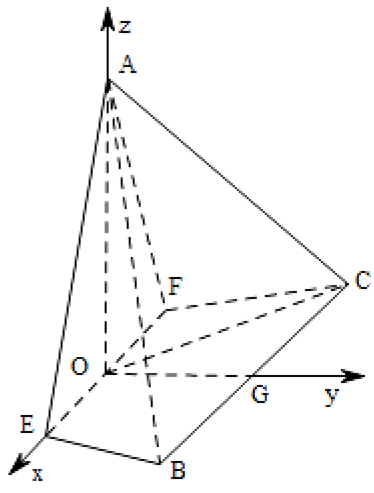
∴AO⊥EF，

∵平面AEF⊥平面EFCB，AO⊂平面AEF，

∴AO⊥平面 EFCB

∴AO⊥BE.

(2)取 BC 的中点 G，连接 OG，



∵EFCB 是等腰梯形，

∴OG⊥EF，

由(1)知 AO⊥平面 EFCB，

∵OG⊂平面EFCB，∴OA⊥OG，

建立如图的空间坐标系，

则 E(a，0，0)，A(0，0，$\sqrt{3}$a)，B(2，$\sqrt{3}(2-a)$，0)，

$\overrightarrow{EA}$=(a-2，$\sqrt{3}(2-a)$，0)，

设平面 AEB 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-ax+\sqrt{3}az=0\\ (a-2)x+\sqrt{3}(a-2)y=0\end{cases}$，

令 z=1，则 x=$\sqrt{3}$，y=-1，

即$\vec{n}$=($\sqrt{3}$，-1，1)，

平面 AEF 的法向量为$\vec{m}$=（0，1，0），

则$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

即二面角 F-AE-B 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

(3)若 BE⊥平面 AOC，
则 BE⊥OC，

即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，

∵$\overrightarrow{BE}$=（a－2，$\sqrt{3}$（a－2），0），$\overrightarrow{OC}$=(-2，$\sqrt{3}$（2－a），0)，

∴$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}$=-2(a-2)-3(a-2)^2=0，

解得 a=$\dfrac{4}{3}$.

18.已知函数$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，
(1)求曲线 y=f(x)在点(0，f(0))处的切线方程；

(2)求证，当 x∈(0，1)时，$f(x)\geqslant 2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$；

(3)设实数 k 使得$f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$对 x∈(0，1)恒成立，求 k 的最大值.

解析：(1)利用函数的导数求在曲线上某点处的切线方程.
(2)构造新函数利用函数的单调性证明命题成立.
(3)对 k 进行讨论，利用新函数的单调性求参数 k 的取值范围.
答案：(1)因为 f(x)=ln(1+x)-ln(1-x)所以

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$，$f'(0)=2$

又因为 f(0)=0，所以曲线 y=f(x)在点(0，f(0))处的切线方程为 y=2x.

(2)证明：令 $g(x)=f(x)-2(x+\frac{x^3}{3})$，则

$g'(x)=f'(x)-2(1+x^2)=\frac{2x^4}{1-x^2}$，

因为 $g'(x)>0(0<x<1)$，所以 $g(x)$ 在区间(0，1)上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，$x\in(0，1)$，

即当 $x\in(0，1)$ 时，$f(x)>2(x+\frac{x^3}{3})$.

(3)由(2)知，当 $k\le 2$ 时，$f(x)>k(x+\frac{x^3}{3})$ 对 $x\in(0，1)$ 恒成立.

当 $k>2$ 时，令 $h(x)=f(x)-k(x+\frac{x^3}{3})$，则

$h'(x)=f'(x)-k(1+x^2)=\frac{kx^4-(k-2)}{1-x^2}$，

所以当 $0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$ 时，$h'(x)<0$，因此 $h(x)$ 在区间(0，$\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$)上单调递减.

当 $0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<k(x+\frac{x^3}{3})$.

所以当 $k>2$ 时，$f(x)<k(x+\frac{x^3}{3})$ 并非对 $x\in(0，1)$ 恒成立.

综上所知，k 的最大值为 2.

19.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0)的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 P(0，1)和点 A(m，n)(m≠0)都在椭圆 C 上，直线 PA 交 x 轴于点 M.

(1)求椭圆 C 的方程，并求点 M 的坐标(用 m，n 表示)；

(2)设 O 为原点，点 B 与点 A 关于 x 轴对称，直线 PB 交 x 轴于点 N，问：y 轴上是否存在点 Q，使得∠OQM=∠ONQ？若存在，求点 Q 的坐标，若不存在，说明理由.

解析：(1)根据椭圆的几何性质得出 $\begin{cases}b=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 求解即可.

(2)求解得出 $M(\frac{m}{1-n},0)$，$N(\frac{m}{1+n},0)$，运用图形得出 tan∠OQM=tan∠ONQ，$\frac{y_Q}{x_M}=\frac{x_Q}{y_Q}$，求解即可得出即 $y_Q^2=x_M\cdot x_N$，$\frac{m^2}{2}+n^2$，根据 m，m 的关系整体求解.

答案：(1)由题意得出 $\begin{cases} b=1 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$

解得：$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$

∴$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

∵P(0，1)和点 A(m，n)，$-1<n<1$

∴PA 的方程为：$y-1=\frac{n-1}{m}x$，$y=0$ 时，$x_M=\frac{m}{1-n}$

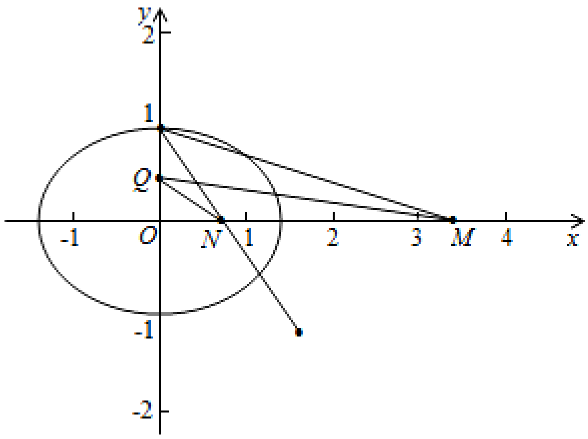
∴$M(\frac{m}{1-n}，0)$

(2)∵点 B 与点 A 关于 x 轴对称，点 A(m，n)(m≠0)

∴点 B(m，-n)(m≠0)

∵直线 PB 交 x 轴于点 N，

∴$N(\frac{m}{1+n}，0)$，



∵存在点 Q，使得∠OQM=∠ONQ，Q(0，y_Q)，

∴tan∠OQM=tan∠ONQ，

∴$\frac{y_Q}{x_M}=\frac{x_N}{y_Q}$，即 $y_Q^2=x_M\cdot x_N$，$\frac{m^2}{2}+n^2=1$

$y_Q^2=\frac{m^2}{1-n^2}=2$，

∴$y_Q=\pm\sqrt{2}$，

故y轴上存在点Q，使得∠OQM=∠ONQ，Q(0，$\sqrt{2}$)或Q(0，$-\sqrt{2}$)

20.已知数列{a_n}满足：$a_1\in N^*$，$a_1\leqslant 36$，且$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$ (n=1，2，…)，记集合M={a_n|n∈N^*}.

(1)若a_1=6，写出集合M的所有元素；

(2)如集合M存在一个元素是3的倍数，证明：M的所有元素都是3的倍数；

(3)求集合M的元素个数的最大值.

解析：(1)a_1=6，利用$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$可求得集合M的所有元素为6，12，24；

(2)因为集合M存在一个元素是3的倍数，所以不妨设a_k是3的倍数，由$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$ (n=1，2，…)，可归纳证明对任意n≥k，a_n是3的倍数；

(3)分a_1是3的倍数与a_1不是3的倍数讨论，即可求得集合M的元素个数的最大值.

答案：(1)若a_1=6，由于$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$ (n=1，2，…)，M={a_n|n∈N^*}.

故集合M的所有元素为6，12，24；

(2)因为集合M存在一个元素是3的倍数，所以不妨设a_k是3的倍数，由$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$ (n=1，2，…)，可归纳证明对任意n≥k，a_n是3的倍数.

如果k=1，M的所有元素都是3的倍数；

如果k＞1，因为$a_k=2a_{k-1}$，或$a_k=2a_{k-1}-36$，所以$2a_{k-1}$是3的倍数；于是a_{k-1}是3的倍数；

类似可得，a_{k-2}，…，a_1都是3的倍数；

从而对任意n≥1，a_n是3的倍数；

综上，若集合M存在一个元素是3的倍数，则集合M的所有元素都是3的倍数

(3)对$a_1\leqslant 36$，$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}, & a_n\leqslant 18\\ 2a_{n-1}-36, & a_n>18\end{cases}$ (n=1，2，…)，可归纳证明对任意n≥k，a_n＜36(n=2，3，…)

因为a_1是正整数，$a_2=\begin{cases}2a_1, & a_1\leqslant 18\\ 2a_1-36, & a_1>18\end{cases}$，所以$a_2$是2的倍数.

从而当n≥3时，a_n是2的倍数.

如果a_1是3的倍数，由(2)知，对所有正整数n，a_n是3的倍数.

因此当n≥3时，a_n∈{12，24，36}，这时M的元素个数不超过5.

如果a_1不是3的倍数，由(2)知，对所有正整数n，a_n不是3的倍数.

因此当n≥3时，a_n∈{4，8，16，20，28，32}，这时M的元素个数不超过8.

当a_1=1时，M={1，2，4，8，16，20，28，32}，有8个元素.

综上可知，集合 M 的元素个数的最大值为 8.