2017年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅱ卷)数学理

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\frac{3+i}{1+i}$=(　　)

A. 1+2i

B. 1-2i

C. 2+i

D. 2-i

解析：$\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$.

答案：D.

2. 设集合A={1，2，4}，B={x|x^2-4x+m=0}.若A∩B={1}，则B=(　　)

A. {1，-3}

B. {1，0}

C. {1，3}

D. {1，5}

解析：集合A={1，2，4}，B={x|x^2-4x+m=0}.

若A∩B={1}，则1∈A且1∈B，

可得1-4+m=0，解得m=3，

即有B={x|x^2-4x+3=0}={1，3}.

答案：C.

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座7层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍，则塔的顶层共有灯(　　)

A. 1盏

B. 3盏

C. 5盏

D. 9盏

解析：设这个塔顶层有a盏灯，

∵宝塔一共有七层，每层悬挂的红灯数是上一层的2倍，

∴从塔顶层依次向下每层灯数是以2为公比、a为首项的等比数列，

又总共有灯381盏，

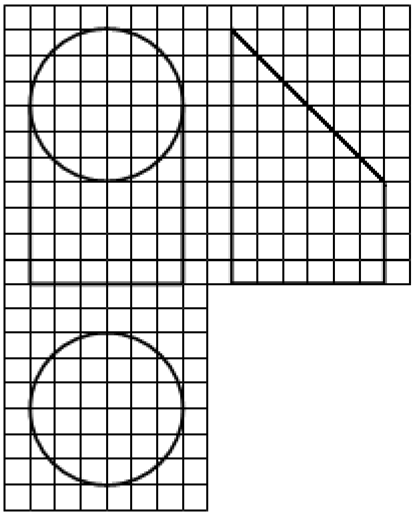
$\therefore 381=\frac{a\left(1-2^7\right)}{1-2}=127a$，解得a=3，

则这个塔顶层有3盏灯.

答案：B.

4. 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一

平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为(　　)



A. 90π

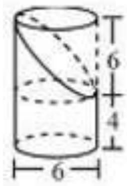
B. 63π

C. 42π

D. 36π

解析：由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，

$V=\pi\cdot3^2\times10-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot3^2\times6=63\pi$.



答案：B.

5. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le0\\2x-3y+3\ge0\\y+3\ge0\end{cases}$，则 z=2x+y 的最小值是(　　)

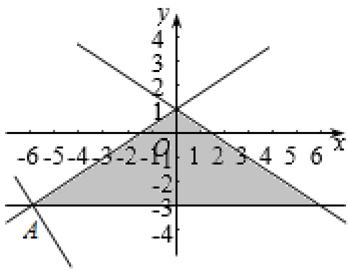
A. -15

B. -9

C. 1

D. 9

解析：x、y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le0\\2x-3y+3\ge0\\y+3\ge0\end{cases}$ 的可行域如图：



z=2x+y 经过可行域的 A 时，目标函数取得最小值，

由 $\begin{cases} y=-3 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases}$ 解得 A(-6，-3)，

则 z=2x+y 的最小值是：-15.

答案：A.

6.安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有(　　)

A.12 种

B.18 种

C.24 种

D.36 种

解析：4 项工作分成 3 组，可得：$C_4^2=6$，

安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，

可得：$6\times A_3^3=36$ 种.

答案：D.

7.甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩.老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩.看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩.根据以上信息，则(　　)

A.乙可以知道四人的成绩

B.丁可以知道四人的成绩

C.乙、丁可以知道对方的成绩

D.乙、丁可以知道自己的成绩

解析：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

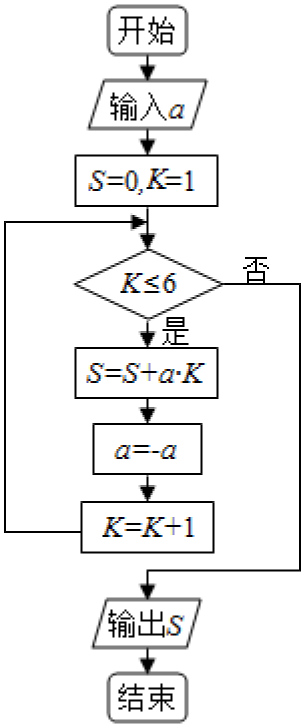
→乙丙必有一优一良，(若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩)

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩.

答案：D.

8.执行如图的程序框图，如果输入的 a=-1，则输出的 S=(　　)



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析：执行程序框图，有 S=0，K=1，a=-1，代入循环，

第一次满足循环，S=-1，a=1，K=2；

满足条件，第二次满足循环，S=1，a=-1，K=3；

满足条件，第三次满足循环，S=-2，a=1，K=4；

满足条件，第四次满足循环，S=2，a=-1，K=5；

满足条件，第五次满足循环，S=-3，a=1，K=6；

满足条件，第六次满足循环，S=3，a=-1，K=7；

7≤6 不成立，退出循环输出，S=3.

答案：B.

9. 若双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0，b＞0) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为(　　)

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的一条渐近线不妨为：bx+ay=0，

圆$(x-2)^2+y^2=4$的圆心(2，0)，半径为：2，

双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的一条渐近线被圆$(x-2)^2+y^2=4$所截得的弦长为 2，

可得圆心到直线的距离为：$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}=\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

解得：$\frac{4c^2-4a^2}{c^2}=3$，可得 $e^2=4$，即 e=2.

答案：A.

10.已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，∠ABC=120°，AB=2，$BC=CC_1=1$，则异面直线 AB_1与 BC_1所成角的余弦值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：【解法一】如图所示，设 M、N、P 分别为 AB，BB_1和 B_1C_1的中点，
则 AB_1、BC_1夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

(因异面直线所成角为(0，$\frac{\pi}{2}$])，

可知 $MN=\frac{1}{2}AB_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$NP=\frac{1}{2}BC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

作 BC 中点 Q，则△PQM 为直角三角形；

∵PQ=1，MQ=$\frac{1}{2}$AC，

△ABC 中，由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

$=4+1-2\times2\times1\times(-\frac{1}{2})$

=7，

∴AC=$\sqrt{7}$，

∴MQ=$\frac{\sqrt{7}}{2}$；

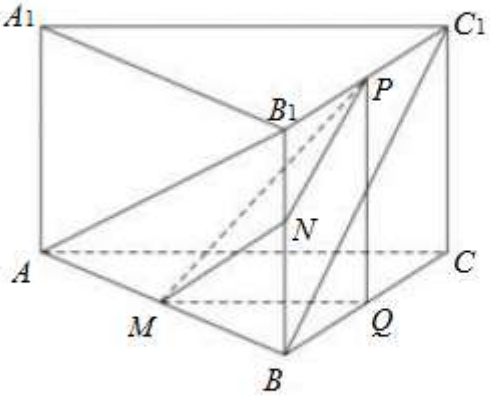
在△MQP 中，$MP=\sqrt{MQ^2+PQ^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$；

在△PMN 中，由余弦定理得

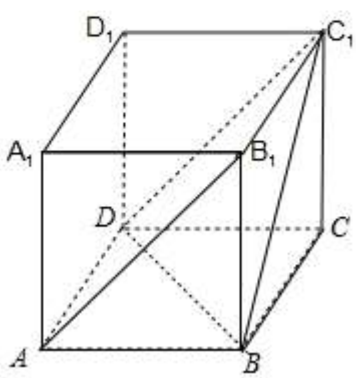
$$\cos\angle MNP=\frac{MN^2+NP^2-PM^2}{2\cdot MH\cdot NP}=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5};$$

又异面直线所成角的范围是$(0，\frac{\pi}{2}]$，

∴AB_1与BC_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.



【解法二】如图所示，



补成四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求$\angle BC_1D$即可；

$BC_1=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^\circ}=\sqrt{3}$，

$C_1D=\sqrt{5}$，

$\therefore BC_1^2+BD^2=C_1D^2$，

$\therefore \angle DBC_1=90°$，

$$\therefore \cos\angle BC_1D=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

答案：C

11.若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为(　　)

A. -1

B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$

D. 1

解析：函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$，

可得 $f'(x)=(2x+a)e^{x-1}+(x^2+ax-1)e^{x-1}$，

$x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，

可得：$-4+a+(3-2a)=0$.

解得 $a=-1$.

可得 $f'(x)=(2x-1)e^{x-1}+(x^2-x-1)e^{x-1}$，

$=(x^2+x-2)e^{x-1}$，函数的极值点为：$x=-2$，$x=1$，

当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$ 函数是增函数，$x\in(-2，1)$时，函数是减函数，

$x=1$ 时，函数取得极小值：$f(1)=(1^2-1-1)e^{1-1}=-1$.

答案：A.

12.已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是(　　)

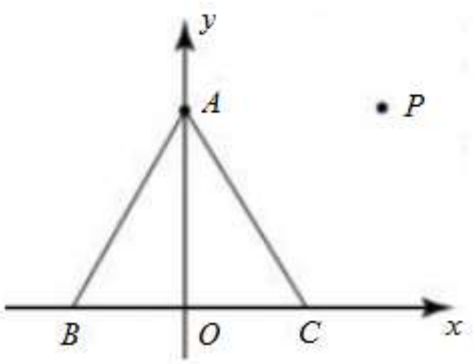
A. -2

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. -1

解析：建立如图所示的坐标系，以 BC 中点为坐标原点，



则 A(0，$\sqrt{3}$)，B(-1，0)，C(1，0)，

设 P(x，y)，则 $\overrightarrow{PA}=\left(-x,\sqrt{3}-y\right),\overrightarrow{PB}=\left(-1-x,-y\right),\overrightarrow{PC}=\left(1-x,-y\right)$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2x^2-2\sqrt{3}y+2y^2=2[x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}]$

∴当 x=0，y=$\frac{\sqrt{3}}{2}$时，取得最小值$2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}$.

答案：B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 DX=____.

解析：由题意可知，该事件满足独立重复试验，是一个二项分布模型，其中，p=0.02，n=100，则 DX=npq=np(1-p)=100×0.02×0.98=1.96.

答案：1.96.

14.函数 $f\left(x\right)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in[0,\frac{\pi}{2}]\right)$的最大值是____.

解析：$f\left(x\right)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=1-\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$，

令 cosx=t 且 t∈[0，1]，

则 $y=-t^2+\sqrt{3}t+\frac{1}{4}=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$，

当 t=$\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(t)_{max}=1$，

即 f(x)的最大值为 1.

答案：1

15.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$=____.

解析：等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，$S_4=2(a_2+a_3)=10$，

可得 $a_2=2$，数列的首项为 1，公差为 1，

$$S_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2},\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n\left(n+1\right)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

答案：$\frac{2n}{n+1}$.

16.已知 F 是抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N.若 M 为 FN 的中点，则|FN|=____.

解析：抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点 F(2，0)，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N.若 M 为 FN 的中点，

可知 M 的横坐标为：1，则 M 的纵坐标为：$\pm 2\sqrt{2}$，

$\left|FN\right|=2\left|FM\right|=2\sqrt{\left(1-2\right)^2+(\pm2\sqrt{2}-0)^2}=6$.

答案：6.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、解答过程或演算步骤.第 17～21 题为必做题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.(一)必考题：共 60 分.

17.△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$\sin\left(A+C\right)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1)求 cosB；

(2)若 a+c=6，△ABC 面积为 2，求 b.

解析：(1)利用三角形的内角和定理可知 A+C=π-B，再利用诱导公式化简 sin(A+C)，利用降幂公式化简$8\sin^2\frac{B}{2}$，结合 $\sin^2B+\cos^2B=1$，求出 cosB，

(2)由(1)可知$\sin B=\frac{8}{17}$，利用勾面积公式求出 ac，再利用余弦定理即可求出 b.

答案：(1)$\sin\left(A+C\right)=8\sin^2\frac{B}{2}$，

∴sinB=4(1-cosB)，

∵$\sin^2B+\cos^2B=1$，

∴$16(1-\cos B)^2+\cos^2B=1$，

∴(17cosB-15)(cosB-1)=0，

∴$\cos B=\frac{15}{17}$；

(2)由(1)可知$\sin B=\frac{8}{17}$，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=2$，

∴$ac=\frac{17}{2}$，

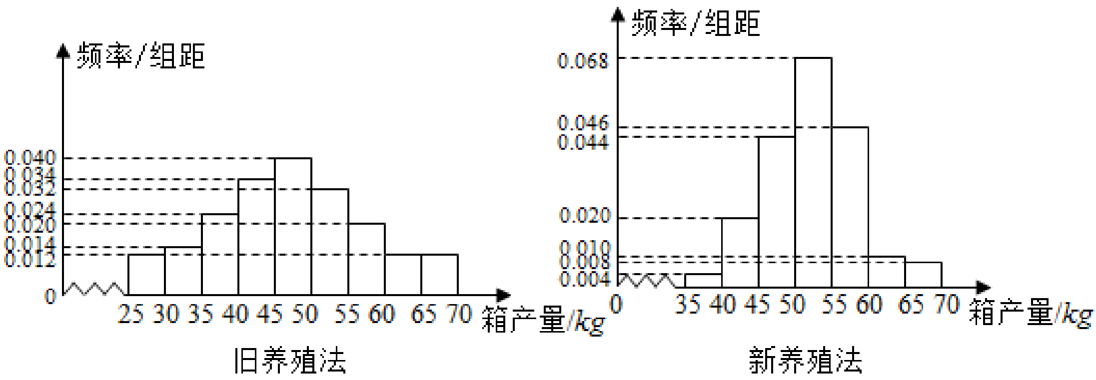
∴$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}$

$=a^2+c^2-15=(a+c)^2-2ac-15=36-17-15=4$，

∴b=2.

18.海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100

个网箱，测量各箱水产品的产量(单位：kg)，其频率分布直方图如图：



(1)设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg，新养殖法的箱产量不低于 50kg”，估计 A 的概率；

(2)填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

(3)根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值(精确到 0.01).

附：

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}.$$

解析：(1)由题意可知：P(A)=P(BC)=P(B)P(C)，分布求得发生的频率，即可求得其概率；

(2)完成 2×2 列联表：求得观测值，与参考值比较，即可求得有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

(3)根据频率分布直方图即可求得其平均数.

答案：(1)记 B 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，C 表示事件“新养殖法的箱产量不低于 50kg”，

由 P(A)=P(BC)=P(B)P(C)，

则旧养殖法的箱产量低于 50kg：(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)×5=0.62，

故 P(B)的估计值 0.62，

新养殖法的箱产量不低于 50kg：(0.068+0.046+0.010+0.008)×5=0.66，

故 P(C)的估计值为，

则事件 A 的概率估计值为 P(A)=P(B)P(C)=0.62×0.66=0.4092；

∴A 发生的概率为 0.4092；

(2)2×2 列联表：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg	总计
旧养殖法	62	38	100
新养殖法	34	66	100
总计	96	104	200

则 $K^2=\dfrac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705$，

由 15.705＞6.635，

∴有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关；

(3)由题意可知：方法一：$\overline{X}_{新}$ =5×(37.5×0.004+42.5×0.020+47.5×0.044+52.5×0.068+57.5×0.046+62.5×0.010+67.5×0.008)，

=5×10.47，

=52.35(kg).

新养殖法箱产量的中位数的估计值 52.35(kg)

方法二：由新养殖法的箱产量频率分布直方图中，箱产量低于 50kg 的直方图的面积：

(0.004+0.020+0.044)×5=0.34，

箱产量低于 55kg 的直方图面积为：

(0.004+0.020+0.044+0.068)×5=0.68＞0.5，

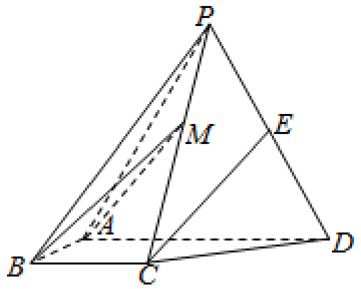
故新养殖法产量的中位数的估计值为：$50+\dfrac{0.5-0.34}{0.068}\approx52.35$(kg)，

新养殖法箱产量的中位数的估计值 52.35(kg).

19.如图，四棱锥P-ABCD中，侧面PAD为等边三角形且垂直于底面ABCD，$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，∠BAD=∠ABC=90°，E 是 PD 的中点.

(1)证明：直线 CE∥平面 PAB；

(2)点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 ABCD 所成角为 45°，求二面角 M-AB-D 的余弦值.



解析：(1)取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，通过证明 CE∥BF，利用直线与平面平行的判定定理证明即可.

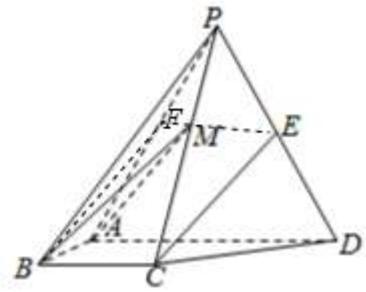
(2)利用已知条件转化求解 M 到底面的距离，作出二面角的平面角，然后求解二面角 M-AB-D 的余弦值即可.

答案：(1)证明：取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，因为 E 是 PD 的中点，

所以 $EF\underset{=}{\parallel}\dfrac{1}{2}AD,\ AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，∠BAD=∠ABC=90°，∴ $BC\parallel\dfrac{1}{2}AD$，

∴BCEF 是平行四边形，可得 CE∥BF，BF⊂平面 PAB，CF⊄平面 PAB，

∴直线 CE∥平面 PAB；



(2)四棱锥 P-ABCD 中，

侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，$AB = BC = \frac{1}{2}AD$，

∠BAD=∠ABC=90°，E 是 PD 的中点.

取 AD 的中点 O，M 在底面 ABCD 上的射影 N 在 OC 上，设 AD=2，则 AB=BC=1，OP=$\sqrt{3}$，

∴∠PCO=60°，直线 BM 与底面 ABCD 所成角为 45°，

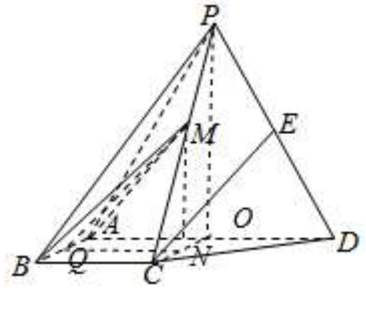
可得：BN=MN，CN=$\frac{\sqrt{3}}{3}$MN，BC=1，

可得：$1+\frac{1}{3}BN^2 = BN^2$，$BN = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$，

作 NQ⊥AB 于 Q，连接 MQ，

所以∠MQN 就是二面角 M-AB-D 的平面角，$MQ = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$，

二面角 M-AB-D 的余弦值为：$\frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



20.设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足$\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{NM}$.

(1)求点 P 的轨迹方程;

(2)设点Q在直线x=-3上，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点P且垂直于OQ的直线l过C的左焦点F.

解析：(1)设M(x0，y0)，由题意可得N(x_0，0)，设P(x，y)，运用向量的坐标运算，结合M满足椭圆方程，化简整理可得P的轨迹方程；

(2)设 Q(-3，m)，P($\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha$)，(0≤α＜2π)，运用向量的数量积的坐标表示，可得m，即有Q的坐标，求得椭圆的左焦点坐标，求得OQ，PF的斜率，由两直线垂直的条件：斜率之积为-1，即可得证.

答案：(1)设M(x_0，y_0)，由题意可得N(x_0，0)，

设P(x，y)，由点P满足$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

可得$\left(x-x_0,\ y\right)=\sqrt{2}\left(0,\ y_0\right)$，

可得$x-x_0=0$，$y=\sqrt{2}y_0$，

即有$x_0=x$，$y_0=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$，

代入椭圆方程$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，可得$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

即有点P的轨迹方程为圆$x^2+y^2=2$；

(2)证明：设Q(-3，m)，P($\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha$)，(0≤α＜2π)，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，可得$\left(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha\right)\cdot\left(-3-\sqrt{2}\cos\alpha,\ m-\sqrt{2}\sin\alpha\right)=1$，

即为$-3\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos^2\alpha+\sqrt{2}m\sin\alpha-2\sin^2\alpha=1$，

解得$m=\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\cos\alpha\right)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

即有Q(-3，$\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\cos\alpha\right)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$)，

椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点F(-1，0)，

由$k_{OQ}=-\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

$k_{PF}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+1}$，

由 $k_{OQ} \cdot k_{PF}=-1$，
可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21.已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$.
(1)求 a；
(2)证明：f(x)存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

解析：(1)通过分析可知 $f(x)\geqslant 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-\ln x\geqslant 0$，进而利用 $h'(x)=a-\frac{1}{x}$ 可得 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{a}\right)$，从而可得结论；

(2)通过(1)可知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，记 $t(x)=f'(x)=2x-2-\ln x$，解不等式可知 $t(x)_{\min}=t\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-1<0$，从而可知 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，利用 f(x)必存在唯一极大值点 x_0 及 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0)<\frac{1}{4}$，另一方面可知 $f(x_0)>f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$.

答案：(1)解：因为 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x=x(ax-a-\ln x)(x>0)$，
则 $f(x)\geqslant 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-\ln x\geqslant 0$，求导可知 $h'(x)=a-\frac{1}{x}$.
则当 $a\leqslant 0$ 时 $h'(x)<0$，即 $y=h(x)$ 在(0，+∞)上单调递减，
所以当 $x_0>1$ 时，$h(x_0)<h(1)=0$，矛盾，故 $a>0$.
因为当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时 $h'(x)<0$、当 $x>\frac{1}{a}$ 时 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{a}\right)$，

又因为 $h(1)=a-a-\ln 1=0$，
所以 $\frac{1}{a}=1$，解得 a=1；
(2)证明：由(1)可知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，$f'(x)=2x-2-\ln x$，
令 $f'(x)=0$，可得 $2x-2-\ln x=0$，记 $t(x)=2x-2-\ln x$，则 $t'(x)=2-\frac{1}{x}$，

令 $t'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}$，

所以 t(x)在区间(0，$\frac{1}{2}$)上单调递减，在($\frac{1}{2}$，+∞)上单调递增，

所以 $t(x)_{\min}=t(\frac{1}{2})=\ln 2-1<0$，从而 t(x)=0 有解，即 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，
且不妨设 $f'(x)$ 在(0，x_0)上为正、在(x_0，x_2)上为负、在(x_2，+∞)上为正，
所以 f(x)必存在唯一极大值点 x0，且 $2x_0-2-\ln x_0=0$，
所以 $f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0\ln x_0=x_0^2-x_0+2x_0-2x_0^2=x_0-x_0^2$，

由 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f\left(x_0\right)<\left(x_0-{x_0}^2\right)_{\max}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

由 $f'\left(\frac{1}{e}\right)<0$ 可知 $x_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，

所以 f(x)在(0，x_0)上单调递增，在($x_0,\frac{1}{e}$)上单调递减，

所以 $f\left(x_0\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$；

综上所述，f(x)存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

(二)选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，按所做的第一题计分.[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

(1)M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足|OM|·|OP|=16，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

(2)设点 A 的极坐标为(2，$\frac{\pi}{3}$)，点 B 在曲线 C_2 上，求△OAB 面积的最大值.

解析：(1)设 P(x，y)，利用相似得出 M 点坐标，根据|OM|·|OP|=16 列方程化简即可；

(2)求出曲线 C_2 的圆心和半径，得出 B 到 OA 的最大距离，即可得出最大面积.

答案：(1)曲线 C_1 的直角坐标方程为：x=4，

设 P(x，y)，M(4，y_0)，则 $\frac{x}{4}=\frac{y}{y_0}$，$\therefore y_0=\frac{4y}{x}$，

∵|OM||OP|=16，

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{16+{y_0}^2}=16$，

即 $\left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=16$，

∴$x^4+2x^2y^2+y^4=16x^2$，即 $(x^2+y^2)^2=16x^2$，

两边开方得：$x^2+y^2=4x$，

整理得：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$，

∴点 P 的轨迹 C2 的直角坐标方程：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$.

(2)点 A 的直角坐标为 A(1，$\sqrt{3}$)，显然点 A 在曲线 C_2 上，|OA|=2，

∴曲线 C_2 的圆心(2，0)到弦 OA 的距离 $d=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴△AOB 的最大面积 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}$.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a＞0，b＞0，$a^3+b^3=2$，证明：

(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$；

(2) $a+b\leq 2$.

解析：(1) 由柯西不等式即可证明，

(2) 由 $a^3+b^3=2$ 转化为

$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，再由均值不等式可得：

$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，即可得到 $\frac{1}{4}(a+b)^3\leq 2$，问题得以证明.

答案：(1) 由柯西不等式得：$(a+b)(a^5+b^5)\geq\left(\sqrt{a\cdot a^5}+\sqrt{b\cdot b^5}\right)^2=(a^3+b^3)^2\geq 4$，

当且仅当 $\sqrt{ab^5}=\sqrt{ba^5}$，即 a=b=1 时取等号，

(2) ∵ $a^3+b^3=2$，

∴ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=2$，

∴ $(a+b)[(a+b)^2-3ab]=2$，

∴ $(a+b)^3-3ab(a+b)=2$，

∴ $\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，

由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

∴ $(a+b)^3-2\leq\frac{3(a+b)^3}{4}$，

∴ $\frac{1}{4}(a+b)^3\leq 2$，

∴ $a+b\leq 2$，当且仅当 a=b=1 时等号成立.