

2006 年常德市初中毕业生学业考试数学试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分	合分人	复分人
得分									

- 考试注意：** 1. 请考生在总分栏上面的座位号方格内工整地填写好座位号；
 2. 本学科试卷共六道大题，满分 150 分，考试时量 120 分钟；
 3. 考生可带科学计算器参加考试。

一、填空题（本大题 8 个小题，每个小题 4 分，满分 32 分）

1. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是_____.
2. 据统计，湖南省常德市 2005 年农业总产值达到 24 800 000 000 元，用科学记数法可表示为_____元.
3. 已知一元二次方程有一个根是 2，那么这个方程可以是_____（填上你认为正确的一个方程即可）.
4. 等腰梯形的上底、下底和腰长分别为 4cm，10cm，6cm，则等腰梯形的下底角为_____度.
5. 多项式 $ax^2 - 4a$ 与多项式 $x^2 - 4x + 4$ 的公因式是_____.
6. 如图 1，若 $AB \parallel CD$ ， EF 与 AB ， CD 分别相交于点 E ， F ， $EP \perp EF$ ， $\angle EFD$ 的平分线与 EP 相交于点 P ，且 $\angle BEP = 40^\circ$ ，则 $\angle EPF =$ _____度.
7. 在半径为 10cm 的 $\odot O$ 中，圆心 O 到弦 AB 的距离为 6cm，则弦 AB 的长是_____cm.
8. 右边是一个有规律排列的数表，请用含 n 的代数式（ n 为正整数）表示数表中第 n 行第 n 列的数：_____.

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	...
第 1 行	1	2	5	10	
第 2 行	4	3	6	11	
第 3 行	9	8	7	12	
第 4 行	16	15	14	13	
	⋮				

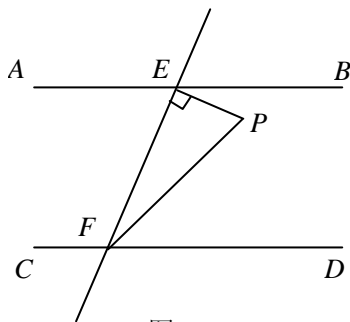


图 1

二、选择题（本题中的选项只有一个是正确的，请你将正确的选项填在下表中，本大题 8 个小题，每小题 4 分，满分 32 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案								

9. 下列计算正确的是（ ）

- A. $\sqrt{16} = \pm 4$ B. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1$ C. $\sqrt{24} \div \sqrt{6} = 4$ D. $\sqrt{\frac{2}{3}} \square \sqrt{6} = 2$

10. 图 2 是由 6 个相同的小立方块搭成的几何体，那么这个几何体的俯视图是（ ）

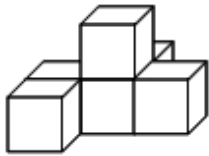
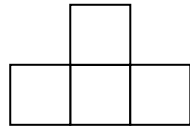
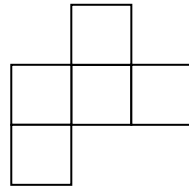


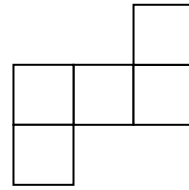
图 2



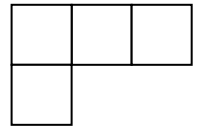
A



B



C



D

11. 图 3 是某中学七年级学生参加课外活动人数的扇形统计图，若参加舞蹈类的学生有 42 人，则参加球类活动的学生人数有 ()
- A. 145 人 B. 147 人
C. 149 人 D. 151 人

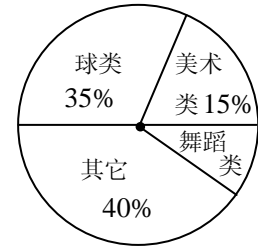


图 3

12. 根据下列表格中二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，判断方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的一个解 x 的范围是 ()

x	6.17	6.18	6.19	6.20
$y = ax^2 + bx + c$	-0.03	-0.01	0.02	0.04

- A. $6 < x < 6.17$ B. $6.17 < x < 6.18$
C. $6.18 < x < 6.19$ D. $6.19 < x < 6.20$
13. 下列命题中，真命题是 ()
- A. 两条对角线相等的四边形是矩形 B. 两条对角线垂直的四边形是菱形
C. 两条对角线垂直且相等的四边形是正方形; D. 两条对角线相等的平行四边形是矩形
14. 已知 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 是反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上的三点，且

$x_1 < x_2 < 0 < x_3$ ，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_3 < y_2 < y_1$ B. $y_1 < y_2 < y_3$
C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_2 < y_3 < y_1$

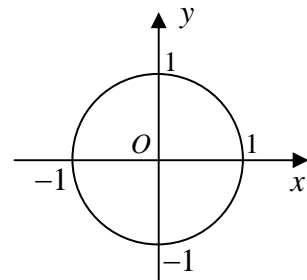
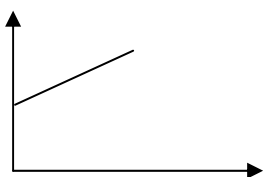


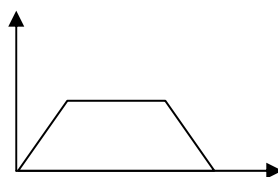
图 4

15. 如图 4，在直角坐标系中， $\odot O$ 的半径为 1，则直线 $y = -x + \sqrt{2}$ 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

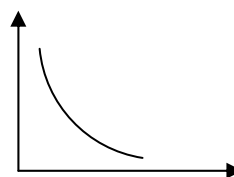
- A. 相离 B. 相交
C. 相切 D. 以上三种情形都有可能
16. 若用 (1), (2), (3), (4) 四幅图象分别表示变量之间的关系，将下面的 (a), (b), (c), (d) 对应的图象排序:



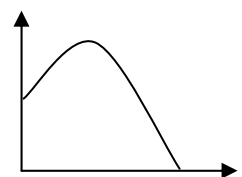
(1)



(2)



(3)



(4)

-
- (a) 面积为定值的矩形（矩形的相邻两边长的关系）
(b) 运动员推出去的铅球（铅球的高度与时间的关系）
(c) 一个弹簧不挂重物到逐渐挂重物（弹簧长度与所挂重物质量的关系）
(d) 某人从 A 地到 B 地后，停留一段时间，然后按原速返回（离开 A 地的距离与时间的关系），其中正确的顺序是（ ）
- A. (3) (4) (1) (2) B. (3) (2) (1) (4)
C. (4) (3) (1) (2) D. (3) (4) (2) (1)

三、（本大题 4 个小题，每小题 6 分，满分 24 分）

17. 计算： $\left|-\frac{1}{3}\right| - (3.14 - \pi)^0 + (1 - \cos 60^\circ) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$

18. 先化简代数式： $\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1}\right) \div \frac{1}{x^2-1}$ ，然后选取一个使原式有意义的 x 的值代入求值.

19. 有 2 个信封，每个信封内各装有四张卡片，其中一个信封内的四张卡片上分别写有 1、2、3、4 四个数，另一个信封内的四张卡片分别写有 5、6、7、8 四个数，甲、乙两人商定了一个游戏，规则是：从这两个信封中各随机抽取一张卡片，然后把卡片上的两个数相乘，如果得到的积大于 20，则甲获胜，否则乙获胜.

- (1) 请你通过列表（或画树状图）计算甲获胜的概率.（4 分）
(2) 你认为这个游戏公平吗？为什么？（2 分）

20. 如图 5, 已知反比例函数 $y_1 = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 的图象经过点 $A(-2, 1)$, 一次函数 $y_2 = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $C(0, 3)$ 与点 A , 且与反比例函数的图象相交于另一点 B .

- (1) 分别求出反比例函数与一次函数的解析式; (4分)
 (2) 求点 B 的坐标. (2分)

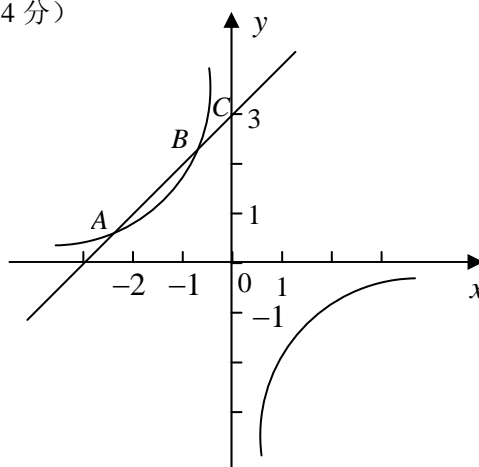


图 5

四、(本大题 2 个小题, 每小题 8 分, 满分 16 分)

21. 如图 6, 小山的顶部是一块平地, 在这块平地上有一高压输电的铁架, 小山的斜坡的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 斜坡 BD 的长是 50 米, 在山坡的坡底 B 处测得铁架顶端 A 的仰角为 45° , 在山坡的坡顶 D 处测得铁架顶端 A 的仰角为 60° .

- (1) 求小山的高度; (4分)
 (2) 求铁架的高度. ($\sqrt{3} \approx 1.73$, 精确到 0.1 米) (4分)

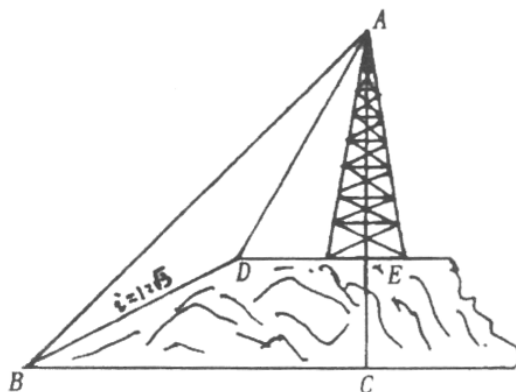
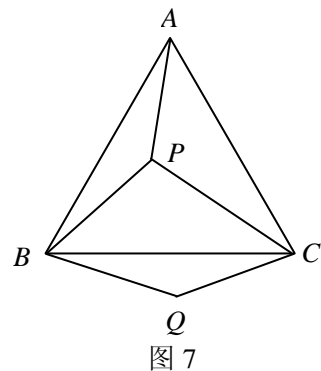


图 6

22. 如图 7, P 是等边三角形 ABC 内的一点, 连结 PA, PB, PC , 以 BP 为边作 $\angle PBQ = 60^\circ$, 且 $BQ = BP$, 连结 CQ .

- (1) 观察并猜想 AP 与 CQ 之间的大小关系, 并证明你的结论. (4 分)
- (2) 若 $PA:PB:PC = 3:4:5$, 连结 PQ , 试判断 $\triangle PQC$ 的形状, 并说明理由. (4 分)



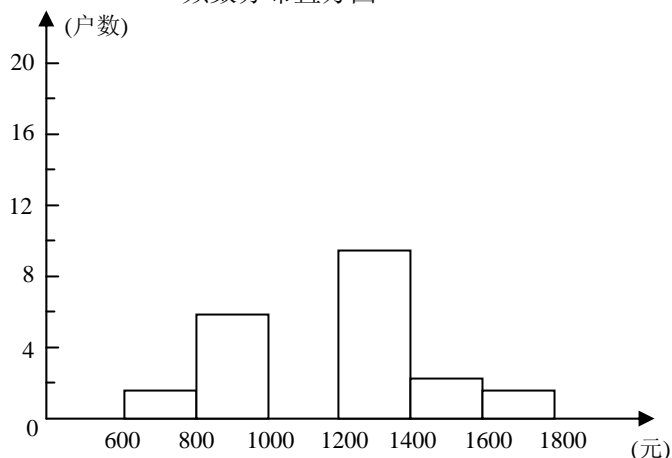
五、(本大题 2 个小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

23. 在今年“五一”长假期间, 某学校团委会要求学生参加一项社会调查活动. 八年级学生小青想了解她所居住的小区 500 户居民的家庭收入情况, 从中随机调查了 40 户居民家庭的收入情况 (收入取整数, 单位: 元) 并绘制了如下的频数分布表和频数分布直方图.

频数分布表

分组	频数	频率
600 ~ 799	2	0.050
800 ~ 999	6	0.150
1000 ~ 1199		0.450
1200 ~ 1399	9	0.225
1400 ~ 1599		
1600 ~ 1800	2	0.050
合计	40	1.000

频数分布直方图



根据以上提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 补全频数分布表: (3 分)
- (2) 补全频数分布直方图; (2 分)
- (3) 这 40 户家庭收入的中位数落在哪一个小组? (2 分)
- (4) 请你估计该居民小区家庭收入较低 (不足 1000 元) 的户数大约有多少户? (3 分)

24. 某电器经营业主计划购进一批同种型号的挂式空调和电风扇，若购进 8 台空调和 20 台电风扇，需要资金 17400 元，若购进 10 台空调和 30 台电风扇，需要资金 22500 元.

(1) 求挂式空调和电风扇每台的采购价各是多少元？(5 分)

(2) 该经营业主计划购进这两种电器共 70 台，而可用于购买这两种电器的资金不超过 30000 元，根据市场行情，销售一台这样的空调可获利 200 元，销售一台这样的电风扇可获利 30 元. 该业主希望当这两种电器销售完时，所获得的利润不少于 3500 元. 试问该经营业主有哪几种进货方案？哪种方案获利最大？最大利润是多少？(5 分)

六、(本大题 2 个小题，每小题 13 分，满分 26 分)

25. 如图 8，在直角坐标系中，以点 $A(\sqrt{3},0)$ 为圆心，以 $2\sqrt{3}$ 为半径的圆与 x 轴相交于点 B, C ，与 y 轴相交于点 D, E .

(1) 若抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过 C, D 两点，求抛物线的解析式，并判断点 B 是否在该抛物线上。(6 分)

(2) 在 (1) 中的抛物线的对称轴上求一点 P ，使得 $\triangle PBD$ 的周长最小。(3 分)

(3) 设 Q 为 (1) 中的抛物线的对称轴上的一点，在抛物线上是否存在这样的点 M ，使得四边形 $BCQM$ 是平行四边形. 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由。(4 分)

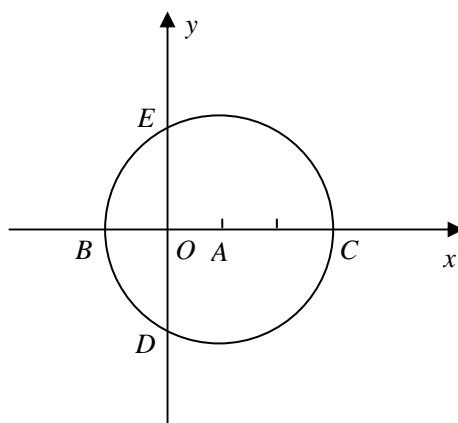


图 8

26. 把两块全等的直角三角形 ABC 和 DEF 叠放在一起，使三角板 DEF 的锐角顶点 D 与三角板 ABC 的斜边中点 O 重合，其中 $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$ ， $\angle C = \angle F = 45^\circ$ ， $AB = DE = 4$ ，把三角板 ABC 固定不动，让三角板 DEF 绕点 O 旋转，设射线 DE 与射线 AB 相交于点 P ，射线 DF 与线段 BC 相交于点 Q 。

(1) 如图 9，当射线 DF 经过点 B ，即点 Q 与点 B 重合时，易证 $\triangle APD \sim \triangle CDQ$ 。此时， $AP \cdot CQ =$ _____。(2分)

(2) 将三角板 DEF 由图 9 所示的位置绕点 O 沿逆时针方向旋转，设旋转角为 α 。其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，问 $AP \cdot CQ$ 的值是否改变？说明你的理由。(5分)

(3) 在(2)的条件下，设 $CQ = x$ ，两块三角板重叠面积为 y ，求 y 与 x 的函数关系式。(图 10，图 11 供解题用)(6分)

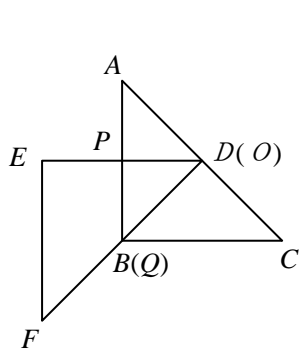


图 9

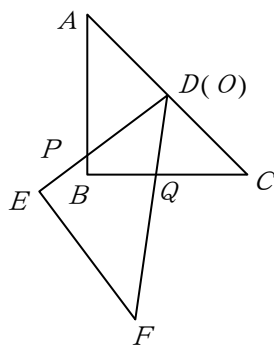


图 10

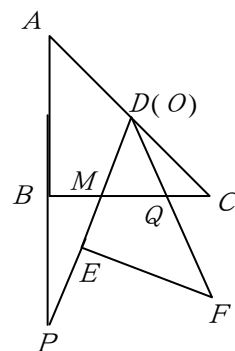


图 11

2006年常德市初中毕业生学业考试试卷

数学参考答案及评分标准

说明:

(一)《答案》中各行右端所注分数表示正确作完该步应得的累加分数,全卷满分 150 分.

(二)《答案》中的解法只是该题解法中的一种或几种,如果考生的解法和本《答案》不同,可参照本答案中的标准给分.

(三)评卷时要坚持每题评阅到底,勿因考生解答中出现错误而中断本题的评阅.如果考生的解答在某一步出现错误,影响后继部分而未改变本题的内容和难度者,视影响程度决定后面部分的得分,但原则上不超过后面部分应得分数的一半,如有严重的概念错误,就不给分.

一、填空题(本小题 8 个小题,每小题 4 分,满分 32 分)

1. $\frac{1}{2}$ 2. 2.48×10^{10} 3. $x^2 - 2x = 0$ 或 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 等
4. 60 5. $x - 2$ 6. 65 7. 16cm 8. $n^2 - n + 1$

二、选择题(本小题 8 个小题,每小题 4 分,满分 32 分)

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	D	B	B	C	D	C	C	A

三、(本小题 4 个小题,每小题 6 分,满分 24 分)

17. 解: $\left| -\frac{1}{3} \right| - (3.14 - \pi)^0 + (1 - \cos 60^\circ) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \right]$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \right] \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$
$$= -\frac{2}{3} + 2 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$
$$= \frac{4}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

18. 解: $\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} \right) \div \frac{1}{x^2-1}$

$$= \left(\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x}{x^2-1} \right) \div \frac{1}{x^2-1} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$
$$= \frac{x^2+1}{x^2-1} \times (x^2-1) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$
$$= x^2+1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

当 $x=0$ 时, 原式的值为 1.6 分

说明: 只要 $x \neq \pm 1$, 且代入求值正确, 均可记满分 6 分.

19. 解: (1) 利用列表法得出所有可能的结果, 如下表:

	1	2	3	4
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24
7	7	14	21	28
8	8	16	24	32

由上表可知, 该游戏所有可能的结果共 16 种, 其中两卡片上的数字之积大于 20 的有 5 种,

所以甲获胜的概率为 $P_{\text{甲}} = \frac{5}{16}$4 分

(2) 这个游戏对双方不公平, 因为甲获胜的概率 $P_{\text{甲}} = \frac{5}{16}$, 乙获胜的概率 $P_{\text{乙}} = \frac{11}{16}$,

$\frac{5}{16} \neq \frac{11}{16}$, 所以, 游戏对双方是不公平的.6 分

20. 解: (1) \because 点 $A(-2,1)$ 在反比例函数 $y_1 = \frac{m}{x}$ 的图象上.

$$\therefore 1 = \frac{m}{-2} \quad \text{即 } m = -2$$

又 $A(-2,1)$, $C(0,3)$ 在一次函数 $y_2 = kx + b$ 图象上.

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

\therefore 反比例函数与一次函数解析式分别为: $y = -\frac{2}{x}$ 与 $y = x + 3$ 4 分

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \text{ 得 } x + 3 = -\frac{2}{x}, \text{ 即 } x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } x = -1 \text{ 于是 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(-1,2)$ 6 分

四、(本大题 2 个小题, 每小题 8 分, 满分 16 分)

21. 解: (1) 如图, 过 D 作 DF 垂直于坡底的水平线 BC 于点 F .

由已知, 斜坡的坡比 $i = 1:\sqrt{3}$, 于是 $\tan \angle DBC = \frac{\sqrt{3}}{3}$

\therefore 坡角 $\angle DBC = 30^\circ$ 2 分

于是在 $\text{Rt}\triangle DFB$ 中, $DF = DB \sin 30^\circ = 25$

即小山高为 25 米 4 分

(2) 设铁架的高 $AE = x$.

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 已知 $\angle ADE = 60^\circ$, 于是

$$DE = \frac{AE}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

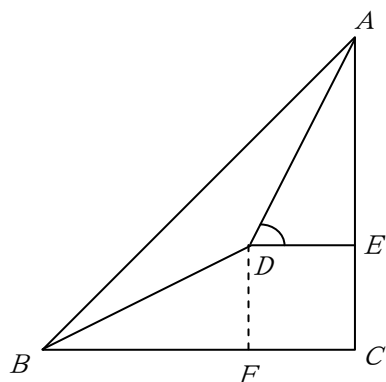
在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, 已知 $\angle ABC = 45^\circ$,

$$\therefore AC = AE + EC = AE + DF = x + 25$$

$$\text{又 } BC = BF + FC = BF + DE = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\text{由 } AC = BC, \text{ 得 } x + 25 = 25\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\therefore x = 25\sqrt{3} \approx 43.3, \text{ 即铁架高 } 43.3 \text{ 米} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



22. 解: (1) 猜想: $AP = CQ$ 1 分

证明: 在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CBQ$ 中,

$$\therefore AB = CB, BP = BQ, \angle ABC = \angle PBQ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = \angle PBQ - \angle PBC = \angle CBQ$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBQ$$

$$\therefore AP = CQ \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由 $PA:PB:PC = 3:4:5$ 可设 $PA = 3a, PB = 4a, PC = 5a$ 5 分

连结 PQ , 在 $\triangle PBQ$ 中, 由于 $PB = BQ = 4a$, 且 $\angle PBQ = 60^\circ$

$$\therefore \triangle PBQ \text{ 为正三角形} \quad \therefore PQ = 4a$$

$$\text{于是在 } \triangle PQC \text{ 中, } \therefore PQ^2 + QC^2 = 16a^2 + 9a^2 = 25a^2 = PC^2$$

$$\therefore \triangle PQC \text{ 是直角三角形} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

五、(本大题 2 个小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

23. 解: (1) 频数: 18 频数: 3, 频率: 0.075 3 分

(2) 略 5 分

(3) 这 40 户家庭收入的中位数在 1000 \square 1199 这个小组 (或答第三小组) 7 分

(4) 因为收入较低的频率为 $0.050 + 0.150 = 0.2$, 所以该小区 500 户居民的家庭收入较

低的户数为 $0.2 \times 500 = 100$ 户. 10 分

24. 解: (1) 设挂式空调和电风扇每台的采购价格分别为 x 元和 y 元

依题意, 得
$$\begin{cases} 8x + 20y = 17400 \\ 10x + 30y = 22500 \end{cases}$$
 3 分

解得
$$\begin{cases} x = 1800 \\ y = 150 \end{cases}$$

即挂式空调和电风扇每台的采购价分别为 1800 元和 150 元. 5 分

(2) 设该业主计划购进空调 t 台, 则购进电风扇 $(70-t)$ 台

则
$$\begin{cases} 1800t + 150(70-t) \leq 30000 \\ 200t + 30(70-t) \geq 3500 \end{cases}$$

解得: $8\frac{4}{17} \leq t \leq 11\frac{9}{11}$

$\because t$ 为整数 $\therefore t$ 为 9, 10, 11 7 分

故有三种进货方案, 分别是: 方案一: 购进空调 9 台, 电风扇 61 台;

方案二: 购进空调 10 台, 电风扇 60 台;

方案三: 购进空调 11 台, 电风扇 59 台. 8 分

设这两种电器销售完后, 所获得的利润为 W , 则 $W = 200t + 30(70-t)$

$$= 170t + 2100$$

由于 W 随 t 的增大而增大.

故当 $t = 11$ 时, W 有最大值, $W_{\text{最大}} = 170 \times 11 + 2100 = 3970$

即选择第 3 种进货方案获利最大, 最大利润为 3970 元 10 分

说明: 如果将 $t = 9, 10, 11$ 时分别代入 $W = 170t + 2100$ 中, 通过比较得到获利最大的方案, 同样记满分.

六、(本大题 2 个小题, 每小题 13 分, 满分 26 分)

25. 解: (1) $\because OA = \sqrt{3}, AB = AC = 2\sqrt{3}$

$$\therefore B(-\sqrt{3}, 0), C(3\sqrt{3}, 0)$$

又在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $AD = 2\sqrt{3}, OA = \sqrt{3}$

$$\therefore OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = 3$$

$\therefore D$ 的坐标为 $(0, -3)$ 3 分

又 D, C 两点在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} c = -3 \\ \frac{1}{3} \square (3\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3}b + c = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ c = -3 \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为: $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 3$ 5 分

当 $x = -\sqrt{3}$ 时, $y = 0$

∴ 点 $B(-\sqrt{3}, 0)$ 在抛物线上 6 分

$$(2) \because y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 3 \\ = \frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2 - 4$$

∴ 抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 3$ 的对称轴方程为 $x = \sqrt{3}$ 7 分

在抛物线的对称轴上存在点 P , 使 $\triangle PBD$ 的周长最小.

∵ BD 的长为定值 ∴ 要使 $\triangle PBD$ 周长最小只需 $PB + PD$ 最小.
连结 DC , 则 DC 与对称轴的交点即为使 $\triangle PBD$ 周长最小的点.

设直线 DC 的解析式为 $y = mx + n$.

$$\text{由 } \begin{cases} n = -3 \\ 3\sqrt{3}m + n = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} m = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ n = -3 \end{cases}$$

∴ 直线 DC 的解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3 \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

故点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}, -2)$ 9 分

(3) 存在, 设 $Q(\sqrt{3}, t)$ 为抛物线对称轴 $x = \sqrt{3}$ 上一点, M 在抛物线上要使
四边形 $BCQM$ 为平行四边形, 则 $BC \parallel QM$ 且 $BC = QM$, 点 M 在对称轴的左侧.

于是, 过点 Q 作直线 $L \parallel BC$ 与抛物线交于点 $M(x_m, t)$

由 $BC = QM$ 得 $QM = 4\sqrt{3}$

从而 $x_m = -3\sqrt{3}$, $t = 12$

故在抛物线上存在点 $M(-\sqrt{3}, 12)$, 使得四边形 $BCQM$ 为平行四边形. ..

.....13分
 26. 解: (1) 8.....2分

(2) $AP \cdot CQ$ 的值不会改变.3分

理由如下: 在 $\triangle APD$ 与 $\triangle CDQ$ 中, $\angle A = \angle C = 45^\circ$

$$\angle APD = 180^\circ - 45^\circ - (45^\circ + a) = 90^\circ - a$$

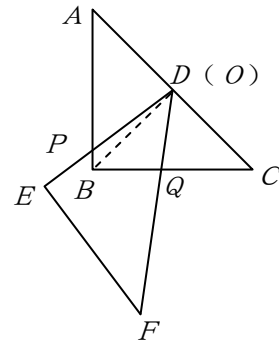
$$\angle CDQ = 90^\circ - a$$

即 $\angle APD = \angle CDQ$

$\therefore \triangle APD \sim \triangle CDQ$ 5分

$$\therefore \frac{AP}{AD} = \frac{CD}{CQ}$$

$$\therefore AP \cdot CQ = AD \cdot CD = AD^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = 8$$
7分

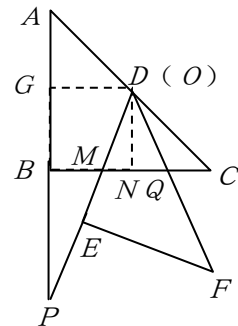


(3) 情形 1: 当 $0^\circ < a < 45^\circ$ 时, $2 < CQ < 4$, 即 $2 < x < 4$, 此时两三角板重叠部分为四边形 $DPBQ$, 过 D 作 $DG \perp AP$ 于 G , $DN \perp BC$ 于 N ,

$$\therefore DG = DN = 2$$

由 (2) 知: $AP \cdot CQ = 8$ 得 $AP = \frac{8}{x}$

$$\begin{aligned} \text{于是 } y &= \frac{1}{2}AB \cdot AC - \frac{1}{2}CQ \cdot DN - \frac{1}{2}AP \cdot DG \\ &= 8 - x - \frac{8}{x} \quad (2 < x < 4) \end{aligned}$$
10分



情形 2: 当 $45^\circ \leq a < 90^\circ$ 时, $0 < CQ \leq 2$ 时, 即 $0 < x \leq 2$, 此时两三角板重叠部分为 $\triangle DMQ$,

由于 $AP = \frac{8}{x}$, $PB = \frac{8}{x} - 4$, 易证: $\triangle PBM \sim \triangle DNM$,

$$\therefore \frac{BM}{MN} = \frac{PB}{DN} \text{ 即 } \frac{BM}{2 - BM} = \frac{PB}{2} \text{ 解得 } BM = \frac{2PB}{2 + PB} = \frac{8 - 4x}{4 - x}$$

$$\therefore MQ = 4 - BM - CQ = 4 - x - \frac{8 - 4x}{4 - x}$$

$$\text{于是 } y = \frac{1}{2}MQ \cdot DN = 4 - x - \frac{8 - 4x}{4 - x} \quad (0 < x \leq 2)$$

综上所述, 当 $2 < x < 4$ 时, $y = 8 - x - \frac{8}{x}$

当 $0 < x \leq 2$ 时, $y = 4 - x - \frac{8-4x}{4-x}$

$$\left(\text{或 } y = \frac{x^2 - 4x + 8}{4 - x} \right) \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

说明: ①未指明 x 的范围, 不扣分.

②上述情形 2 有多种解法, 如:

法二: 连结 BD , 并过 D 作 $DN \perp BC$ 于点 N , 在 $\triangle DBQ$ 与 $\triangle MCD$ 中,

$$\angle DBQ = \angle MCD = 45^\circ$$

$$\angle DQB = \angle QCB + \angle QDC = 45^\circ + \angle QDC = \angle MDQ + \angle QDC = \angle MDC$$

$$\therefore \triangle DBQ \sim \triangle MCD \quad \therefore \frac{MC}{CD} = \frac{DB}{BQ}$$

$$\text{即 } \frac{MC}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4-x}$$

$$\therefore MC = \frac{8}{4-x} \quad \therefore MQ = MC - CD = \frac{8}{4-x} - x = \frac{x^2 - 4x + 8}{4-x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} DN \cdot MQ = \frac{x^2 - 4x + 8}{4-x} (0 < x \leq 2)$$

法三: 过 D 作 $DN \perp BC$ 于点 N , 在 $\text{Rt}\triangle DNQ$ 中,

$$DQ^2 = DN^2 + NQ^2$$

$$= 4 + (2-x)^2$$

$$= x^2 - 4x + 8$$

于是在 $\triangle BDQ$ 与 $\triangle DMQ$ 中 $\angle DBQ = \angle MDQ = 45^\circ$

$$\angle DMQ = \angle DBM + \angle BDM$$

$$= 45^\circ + \angle BDM$$

$$= \angle BDQ$$

$$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle DMQ$$

$$\therefore \frac{BQ}{DQ} = \frac{DQ}{MQ}$$

$$\text{即 } \frac{4-x}{DQ} = \frac{DQ}{MQ}$$

$$\therefore MQ = \frac{DQ^2}{4-x} = \frac{x^2 - 4x + 8}{4-x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} DN \cdot MQ = \frac{x^2 - 4x + 8}{4-x} (0 < x \leq 2)$$