

2015年陕西省中考真题数学

一、选择题(共10小题,每小题3分,计30分,每小题只有一个选项是符合题意的)

1. 计算: $(-\frac{2}{3})^0 = (\quad)$

A. 1

B. $-\frac{3}{2}$

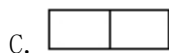
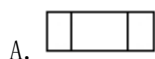
C. 0

D. $\frac{2}{3}$

解析: 根据零指数幂: $a^0=1(a \neq 0)$, 求出 $(-\frac{2}{3})^0$ 的值是多少即可. $(-\frac{2}{3})^0=1$.

答案: A.

2. 如图是一个螺母的示意图, 它的俯视图是()



解析: 根据从上面看得到的图形是俯视图, 可得答案. 从上面看外面是一个正六边形, 里面是一个没有圆心的圆.

答案: B

3. 下列计算正确的是()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(-2ab)^2 = 4a^2b^2$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $3a^3b^2 \div a^2b^2 = 3ab$

解析: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故正确;

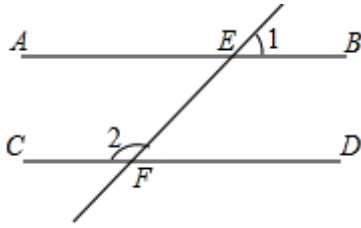
B、正确;

C、 $(a^2)^3 = a^6$, 故错误;

D、 $3a^3b^2 \div a^2b^2 = 3a$, 故错误.

答案：B

4. 如图, $AB \parallel CD$, 直线 EF 分别交直线 AB, CD 于点 E, F . 若 $\angle 1 = 46^\circ 30'$, 则 $\angle 2$ 的度数为()



- A. $43^\circ 30'$
- B. $53^\circ 30'$
- C. $133^\circ 30'$
- D. $153^\circ 30'$

解析: $\because AB \parallel CD, \angle 1 = 46^\circ 30', \therefore \angle EFD = \angle 1 = 46^\circ 30', \therefore \angle 2 = 180^\circ - 46^\circ 30' = 133^\circ 30'$.

答案：C

5. 设正比例函数 $y = mx$ 的图象经过点 $A(m, 4)$, 且 y 的值随 x 值的增大而减小, 则 $m =$ ()

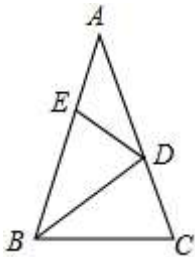
- A. 2
- B. -2
- C. 4
- D. -4

解析: 把 $x = m, y = 4$ 代入 $y = mx$ 中, 可得: $m = \pm 2$,

因为 y 的值随 x 值的增大而减小, 所以 $m = -2$.

答案：B

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 36^\circ$, $AB = AC$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 若在边 AB 上截取 $BE = BC$, 连接 DE , 则图中等腰三角形共有()



- A. 2 个
- B. 3 个
- C. 4 个
- D. 5 个

解析: $\because AB = AC, \therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形;

$\because AB = AC, \angle A = 36^\circ, \therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ,$

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 36^\circ,$

$\therefore \angle A = \angle ABD = 36^\circ, \therefore BD = AD, \therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形;

在 $\triangle BCD$ 中, $\because \angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle C = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ,$

$\therefore \angle C = \angle BDC = 72^\circ$, $\therefore BD = BC$, $\therefore \triangle BCD$ 是等腰三角形;
 $\because BE = BC$, $\therefore BD = BE$, $\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形;
 $\therefore \angle BED = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ$, $\therefore \angle ADE = \angle BED - \angle A = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$,
 $\therefore \angle A = \angle ADE$, $\therefore DE = AE$, $\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形; \therefore 图中的等腰三角形有 5 个.
 答案: D.

7. 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 \geq -3, \\ x - 2(x - 3) > 0 \end{cases}$ 的最大整数解为()

- A. 8
- B. 6
- C. 5
- D. 4

解析: $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 \geq -3 \text{ ①}, \\ x - 2(x - 3) > 0 \text{ ②}, \end{cases}$

\because 解不等式①得: $x \geq -8$, 解不等式②得: $x < 6$,
 \therefore 不等式组的解集为 $-8 \leq x < 6$, \therefore 不等式组的最大整数解为 5.
 答案: C.

8. 在平面直角坐标系中, 将直线 $l_1: y = -2x - 2$ 平移后, 得到直线 $l_2: y = -2x + 4$, 则下列平移作法正确的是()

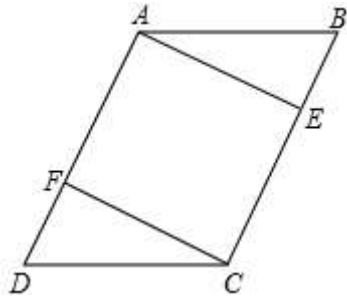
- A. 将 l_1 向右平移 3 个单位长度
- B. 将 l_1 向右平移 6 个单位长度
- C. 将 l_1 向上平移 2 个单位长度
- D. 将 l_1 向上平移 4 个单位长度

解析: \because 将直线 $l_1: y = -2x - 2$ 平移后, 得到直线 $l_2: y = -2x + 4$,
 $\therefore -2(x + a) - 2 = -2x + 4$, 解得: $a = -3$, 故将 l_1 向右平移 3 个单位长度.
 答案: A

9. 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 10$, $BC = 14$, E, F 分别为边 BC, AD 上的点, 若四边形 AECF 为正方形, 则 AE 的长为()

- A. 7
- B. 4 或 10
- C. 5 或 9
- D. 6 或 8

解析: 如图:



设 AE 的长为 x ，根据正方形的性质可得 $BE=14-x$ ，
 在 $\triangle ABE$ 中，根据勾股定理可得 $x^2+(14-x)^2=10^2$ ，解得 $x_1=6$ ， $x_2=8$ 。故 AE 的长为 6 或 8。
 答案：D

10. 下列关于二次函数 $y=ax^2-2ax+1$ ($a>1$) 的图象与 x 轴交点的判断，正确的是()

- A. 没有交点
- B. 只有一个交点，且它位于 y 轴右侧
- C. 有两个交点，且它们均位于 y 轴左侧
- D. 有两个交点，且它们均位于 y 轴右侧

解析：当 $y=0$ 时， $ax^2-2ax+1=0$ ，
 $\because a>1$ ， $\therefore \Delta=(-2a)^2-4a=4a(a-1)>0$ ，

$ax^2-2ax+1=0$ 有两个根，函数与 x 轴有两个交点， $x=\frac{2a-\sqrt{4a(a-1)}}{2a}>0$ 。

答案：D

二、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，计 12 分，其中 12、13 题为选做题，任选一题作答)

11. 将实数 $\sqrt{5}$ ， π ，0，-6 由小到大用“ $<$ ”号连起来，可表示为_____。

解析： $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\pi \approx 3.14$ ， $\because -6 < 0 < 2.236 < 3.14$ ， $\therefore -6 < 0 < \sqrt{5} < \pi$ 。

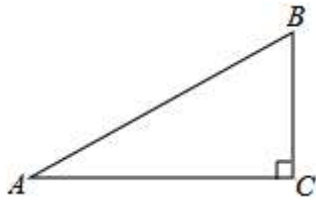
答案： $-6 < 0 < \sqrt{5} < \pi$

12. 正八边形一个内角的度数为_____。

解析：正八边形的内角和为： $(8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ ，每一个内角的度数为 $\frac{1}{8} \times 1080^\circ = 135^\circ$ 。

答案： 135°

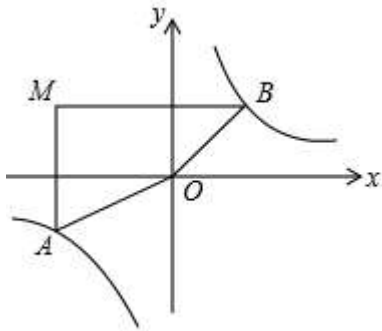
13. 如图，有一滑梯 AB，其水平宽度 AC 为 5.3 米，铅直高度 BC 为 2.8 米，则 $\angle A$ 的度数约为_____ (用科学计算器计算，结果精确到 0.1°)。



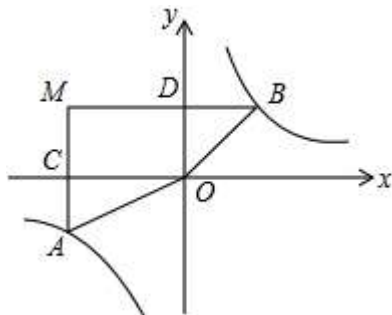
解析: $\because \tan \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{2.8}{5.3} \approx 0.5283, \therefore \angle A = 27.8^\circ$.

答案: 27.8° .

14. 如图, 在平面直角坐标系中, 过点 $M(-3, 2)$ 分别作 x 轴、 y 轴的垂线与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A, B 两点, 则四边形 $MAOB$ 的面积为_____.



解析: 如图,



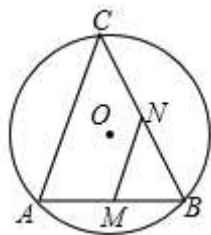
设点 A 的坐标为 (a, b) , 点 B 的坐标为 (c, d) ,

\because 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象过 A, B 两点, $\therefore ab = 4, cd = 4, \therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} |ab| = 2, S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} |cd| = 2,$

\because 点 $M(-3, 2), \therefore S_{\text{矩形 } MCDO} = 3 \times 2 = 6, \therefore$ 四边形 $MAOB$ 的面积 $= S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOD} + S_{\text{矩形 } MCDO} = 2 + 2 + 6 = 10.$

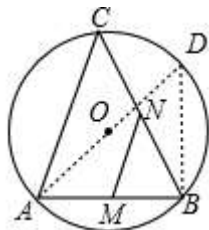
答案: 10.

15. 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB = 6$, 点 C 是 $\odot O$ 上的一个动点, 且 $\angle ACB = 45^\circ$. 若点 M, N 分别是 AB, BC 的中点, 则 MN 长的最大值是_____.



解析：∵点M, N 分别是 AB, BC 的中点，∴ $MN = \frac{1}{2} AC$ ，

∴当 AC 取得最大值时，MN 就取得最大值，当 AC 为直径时，最大，如图，



∵ $\angle ACB = \angle D = 45^\circ$ ， $AB = 6$ ，∴ $AD = 6\sqrt{2}$ ，∴ $MN = \frac{1}{2} AD = 3\sqrt{2}$ 。

答案： $3\sqrt{2}$ 。

三、解答题(共 11 小题，计 78 分，解答时写出过程)

16. 计算： $\sqrt{3} \times (-\sqrt{6}) + |-2\sqrt{2}| + (\frac{1}{2})^{-3}$ 。

解析：根据二次根式的乘法法则和负整数整数幂的意义得到原式= $-\sqrt{3 \times 6} + 2\sqrt{2} + 8$ ，然后化简后合并即可。

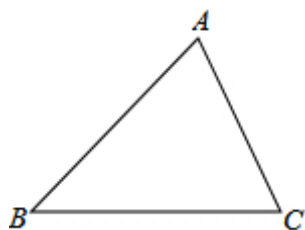
答案：原式= $-\sqrt{3 \times 6} + 2\sqrt{2} + 8 = -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 8 = 8 - \sqrt{2}$ 。

17. 解分式方程： $\frac{x-2}{x+3} - \frac{3}{x-3} = 1$ 。

解析：分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解。

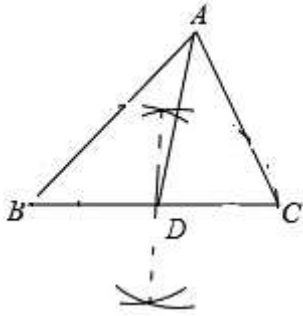
答案：去分母得： $x^2 - 5x + 6 - 3x - 9 = x^2 - 9$ ，解得： $x = \frac{3}{4}$ ，经检验 $x = \frac{3}{4}$ 是分式方程的解。

18. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，请用尺规过点 A 作一条直线，使其将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分。(保留作图痕迹，不写作法)

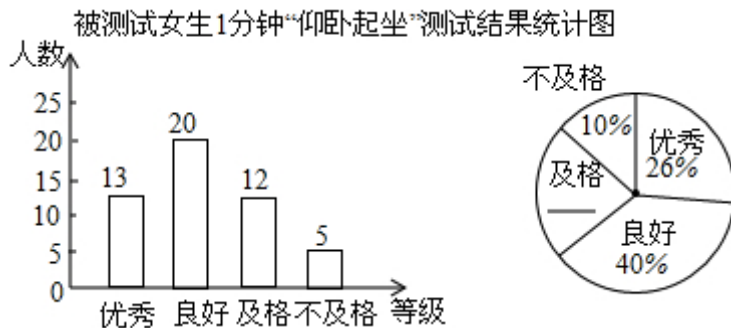


解析：作 BC 边上的中线，即可把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分。

答案：如图，直线 AD 即为所求：



19. 某校为了了解本校九年级女生体育测试项目“仰卧起坐”的训练情况，让体育老师随机抽查了该年级若干名女生，并严格地对她们进行了1分钟“仰卧起坐”测试，同时统计了每个人做的个数(假设这个个数为 x)，现在我们将这些同学的测试结果分为四个等级：优秀 ($x \geq 44$)、良好 ($36 \leq x \leq 43$)、及格 ($25 \leq x \leq 35$) 和不及格 ($x \leq 24$)，并将统计结果绘制成如下两幅不完整的统计图.



根据以上信息，解答下列问题：

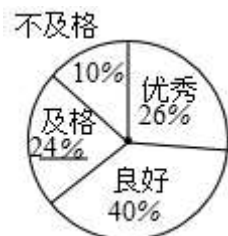
- 补全上面的条形统计图和扇形统计图；
- 被测试女生1分钟“仰卧起坐”个数的中位数落在_____等级；
- 若该年级有650名女生，请你估计该年级女生中1分钟“仰卧起坐”个数达到优秀的人数.

解析：(1) 根据各个等级的百分比得出答案即可；

(2) 根据中位数的定义知道中位数是第25和26个数的平均数，由此即可得出答案；

(3) 首先根据扇形图得出优秀人数占的百分比，条形统计图可以求出平均数的最小值，然后即可求出答案.

答案：(1) 如图.

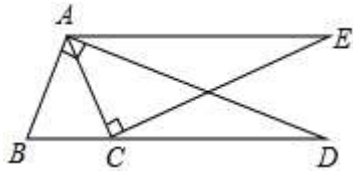


(2) $\because 13+20+12+5=50$, $50 \div 2=25$, $25+1=26$, \therefore 中位数落在良好等级.

(3) $650 \times 26\% = 169$ (人),

即该年级女生中1分钟“仰卧起坐”个数达到优秀的人数是169.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，作 $AD \perp AB$ 交 BC 的延长线于点 D ，作 $AE \parallel BD$ ， $CE \perp AC$ ，且 AE ， CE 相交于点 E ，求证： $AD=CE$.



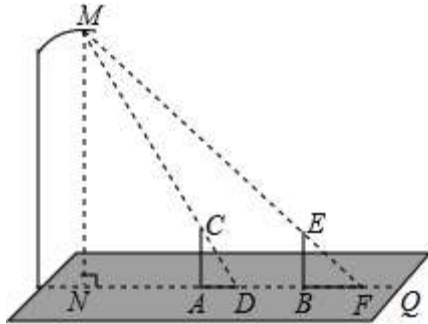
解析: 根据平行线的性质得出 $\angle EAC = \angle ACB$, 再利用 ASA 证出 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$, 从而得出 $AD = CE$.

答案: $\because AE \parallel BD, \therefore \angle EAC = \angle ACB,$

$\because AB = AC, \therefore \angle B = \angle ACB, \therefore \angle B = \angle EAC,$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle CAE \text{ 中, } \begin{cases} \angle B = \angle EAC, \\ AB = AC, \\ \angle BAD = \angle ACE, \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE, \therefore AD = CE.$$

21. 晚饭后, 小聪和小军在社区广场散步, 小聪问小军: “你有多高?” 小军一时语塞. 小聪思考片刻, 提议用广场照明灯下的影长及地砖长来测量小军的身高. 于是, 两人在灯下沿直线 NQ 移动, 如图, 当小聪正好站在广场的 A 点 (距 N 点 5 块地砖长) 时, 其影长 AD 恰好为 1 块地砖长; 当小军正好站在广场的 B 点 (距 N 点 9 块地砖长) 时, 其影长 BF 恰好为 2 块地砖长. 已知广场地面由边长为 0.8 米的正方形地砖铺成, 小聪的身高 AC 为 1.6 米, $MN \perp NQ, AC \perp NQ, BE \perp NQ$. 请你根据以上信息, 求出小军身高 BE 的长. (结果精确到 0.01 米)



解析: 先证明 $\triangle CAD \sim \triangle MND$, 利用相似三角形的性质求得 $MN = 9.6$, 再证明 $\triangle EFB \sim \triangle MFN$, 即可解答.

答案: 由题意得: $\angle CAD = \angle MND = 90^\circ, \angle CDA = \angle MDN,$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle MND, \therefore \frac{CA}{MN} = \frac{AD}{ND}, \therefore \frac{1.6}{MN} = \frac{1 \times 0.8}{(5+1) \times 0.8}, \therefore MN = 9.6,$$

又 $\because \angle EBF = \angle MNF = 90^\circ, \angle EFB = \angle MFN, \therefore \triangle EFB \sim \triangle MFN,$

$$\therefore \frac{EB}{MN} = \frac{BF}{NF}, \therefore \frac{EB}{9.6} = \frac{2 \times 0.8}{(2+9) \times 0.8}, \therefore EB \approx 1.75, \therefore \text{小军身高约为 } 1.75 \text{ 米.}$$

22. 胡老师计划组织朋友暑假去革命圣地延安两日游, 经了解, 现有甲、乙两家旅行社比较合适, 报价均为每人 640 元, 且提供的服务完全相同, 针对组团两日游的游客, 甲旅行社表示, 每人都按八五折收费; 乙旅行社表示, 若人数不超过 20 人, 每人都按九折收费, 超过 20 人, 则超出部分每人按七五折收费, 假设组团参加甲、乙两家旅行社两日游的人数均为 x 人.

(1) 请分别写出甲、乙两家旅行社收取组团两日游的总费用 y (元) 与 x (人) 之间的函数关系式;

(2)若胡老师组团参加两日游的人数共有 32 人,请你计算,在甲、乙两家旅行社中,帮助胡老师选择收取总费用较少的一家.

解析:(1)根据总费用等于人数乘以打折后的单价,易得 $y_{甲}=640 \times 0.85x$,对于乙两家旅行社的总费用,分类讨论:当 $0 \leq x \leq 20$ 时, $y_{乙}=640 \times 0.9x$;当 $x > 20$ 时, $y_{乙}=640 \times 0.9 \times 20 + 640 \times 0.75(x-20)$;

(2)把 $x=32$ 分别代入(1)中对应得函数关系计算 $y_{甲}$ 和 $y_{乙}$ 的值,然后比较大小即可.

答案:(1)甲两家旅行社的总费用: $y_{甲}=640 \times 0.85x=544x$;

乙两家旅行社的总费用:当 $0 \leq x \leq 20$ 时, $y_{乙}=640 \times 0.9x=576x$;当 $x > 20$ 时, $y_{乙}=640 \times 0.9 \times 20 + 640 \times 0.75(x-20)=480x+1920$;

(2)当 $x=32$ 时, $y_{甲}=544 \times 32=17408$ (元), $y_{乙}=480 \times 32+1920=17280$,

因为 $y_{甲} > y_{乙}$,所以胡老师选择乙旅行社.

23.某中学要在全校学生中举办“中国梦·我的梦”主题演讲比赛,要求每班选一名代表参赛.九年级(1)班经过投票初选,小亮和小丽票数并列班级第一,现在他们都想代表本班参赛.经班长与他们协商决定,用他们学过的掷骰子游戏来确定谁去参赛(胜者参赛).

规则如下:两人同时随机各掷一枚完全相同且质地均匀的骰子一次,向上一面的点数都是奇数,则小亮胜;向上一面的点数都是偶数,则小丽胜;否则,视为平局,若为平局,继续上述游戏,直至分出胜负为止.

如果小亮和小丽按上述规则各掷一次骰子,那么请你解答下列问题:

(1)小亮掷得向上一面的点数为奇数的概率是多少?

(2)该游戏是否公平?请用列表或树状图等方法说明理由.(骰子:六个面上分别刻有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个小圆点的小正方体)

解析:(1)首先判断出向上一面的点数为奇数有 3 种情况,然后根据概率公式,求出小亮掷得向上一面的点数为奇数的概率是多少即可.

(2)首先应用列表法,列举出所有可能的结果,然后分别判断出小亮、小丽获胜的概率是多少,再比较它们的大小,判断出该游戏是否公平即可.

答案:(1) \because 向上一面的点数为奇数有 3 种情况,

\therefore 小亮掷得向上一面的点数为奇数的概率是: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

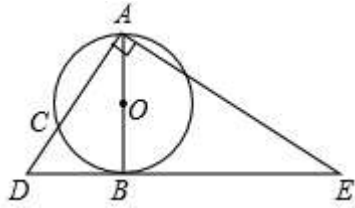
(2)填表如下:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

由上表可知,一共有 36 种等可能的结果,其中小亮、小丽获胜各有 9 种结果.

$\therefore P(\text{小亮胜}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(\text{小丽胜}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, \therefore 游戏是公平的.

24.如图,AB是 $\odot O$ 的直径,AC是 $\odot O$ 的弦,过点B作 $\odot O$ 的切线DE,与AC的延长线交于点D,作 $AE \perp AC$ 交DE于点E.



(1) 求证: $\angle BAD = \angle E$;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $AC=8$, 求 BE 的长.

解析: (1) 根据切线的性质, 和等角的余角相等证明即可;

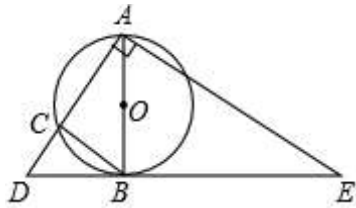
(2) 根据勾股定理和相似三角形进行解答即可.

答案: (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的弦, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线 DE ,

$\therefore \angle ABE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAE + \angle E = 90^\circ$,

$\because \angle DAE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD + \angle BAE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD = \angle E$.

(2) 连接 BC , 如图:



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because AC=8$, $AB=2 \times 5=10$, $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$,

$\because \angle BCA = \angle ABE = 90^\circ$, $\angle BAD = \angle E$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EAB$, $\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{EB}{AB}$, $\therefore \frac{8}{6} = \frac{EB}{10}$, $\therefore BE = \frac{40}{3}$.

25. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y=x^2+5x+4$ 的顶点为 M , 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C 点.

(1) 求点 A, B, C 的坐标;

(2) 求抛物线 $y=x^2+5x+4$ 关于坐标原点 O 对称的抛物线的函数表达式;

(3) 设 (2) 中所求抛物线的顶点为 M' , 与 x 轴交于 A', B' 两点, 与 y 轴交于 C' 点, 在以 $A, B, C, M, A', B', C', M'$ 这八个点中的四个点为顶点的平行四边形中, 求其中一个不是菱形的平行四边形的面积.

解析: (1) 令 $y=0$, 求出 x 的值; 令 $x=0$, 求出 y , 即可解答;

(2) 先求出 A, B, C 关于坐标原点 O 对称后的点为 $(4, 0), (1, 0), (0, -4)$, 再代入解析式, 即可解答;

(3) 取四点 A, M, A', M' , 连接 $AM, MA', A'M', M'A, MM'$, 由中心对称性可知, MM' 过点 O , $OA=OA'$, $OM=OM'$, 由此判定四边形 $AMA'M'$ 为平行四边形, 又知 AA' 与 MM' 不垂直, 从而平行四边形 $AMA'M'$ 不是菱形, 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 求出抛物线的顶点坐标 M , 根据 $S_{\text{平行四边形 } AMA'M'} = 2S_{\triangle AMA'}$, 即可解答.

答案: (1) 令 $y=0$, 得 $x^2+5x+4=0$, $\therefore x_1=-4, x_2=-1$,

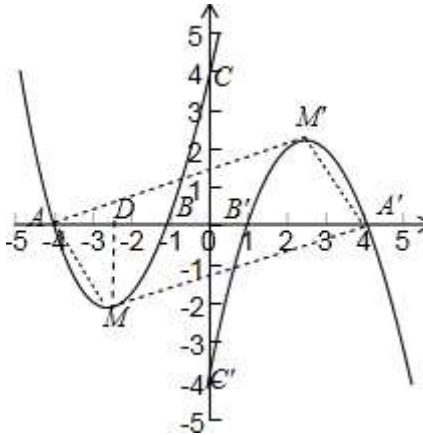
令 $x=0$, 得 $y=4$, $\therefore A(-4, 0), B(-1, 0), C(0, 4)$.

(2) $\because A, B, C$ 关于坐标原点 O 对称后的点为 $(4, 0), (1, 0), (0, -4)$,

\therefore 所求抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx-4$,

将(4, 0), (1, 0)代入上式, 得 $\begin{cases} 16a + 4b - 4 = 0, \\ a + b - 4 = 0, \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} a = -1, \\ b = 5, \end{cases} \therefore y = -x^2 + 5x - 4.$

(3)如图, 取四点 A, M, A', M', 连接 AM, MA', A'M', M'A, MM',



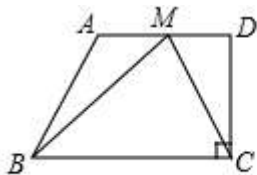
由中心对称性可知, MM' 过点 O, $OA=OA'$, $OM=OM'$, \therefore 四边形 $AMA'M'$ 为平行四边形, 又知 AA' 与 MM' 不垂直, \therefore 平行四边形 $AMA'M'$ 不是菱形, 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D,

$$\because y = x^2 + 5x + 4 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}, \therefore M(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}),$$

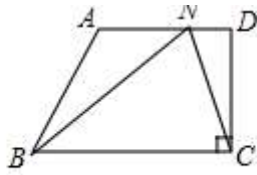
$$\text{又} \because A(-4, 0), A'(4, 0) \therefore AA' = 8, MD = \frac{9}{4},$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形 } AMA'M'} = 2S_{\triangle AMM'} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{9}{4} = 18.$$

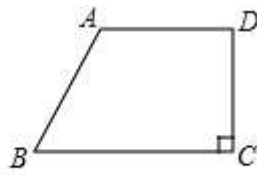
26. 如图, 在每一个四边形 ABCD 中, 均有 $AD \parallel BC$, $CD \perp BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AD = 8$, $BC = 12$.



图①



图②



图③

(1)如图①, 点 M 是四边形 ABCD 边 AD 上的一点, 则 $\triangle BMC$ 的面积为 _____;

(2)如图②, 点 N 是四边形 ABCD 边 AD 上的任意一点, 请你求出 $\triangle BNC$ 周长的最小值;

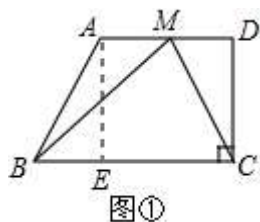
(3)如图③, 在四边形 ABCD 的边 AD 上, 是否存在一点 P, 使得 $\cos \angle BPC$ 的值最小? 若存在, 求出此时 $\cos \angle BPC$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1)如图①, 过 A 作 $AE \perp BC$, 可得出四边形 AECF 为矩形, 得到 $EC = AD$, $BE = BC - EC$, 在直角三角形 ABE 中, 求出 AE 的长, 即为三角形 BMC 的高, 求出三角形 BMC 面积即可;

(2)如图②, 作点 C 关于直线 AD 的对称点 C' , 连接 $C'N$, $C'D$, $C'B$ 交 AD 于点 N' , 连接 $C'N'$, 则 $BN + NC = BN + NC' \geq BC' = BN' + C'N'$, 可得出 $\triangle BNC$ 周长的最小值为 $\triangle BN'C$ 的周长 $= BN' + C'N' + BC = BC' + BC$, 求出即可;

(3)如图③所示, 存在点 P, 使得 $\cos \angle BPC$ 的值最小, 作 BC 的中垂线 PQ 交 BC 于点 Q, 交 AD 于点 P, 连接 BP, CP, 作 $\triangle BPC$ 的外接圆 O, 圆 O 与直线 PQ 交于点 N, 则 $PB = PC$, 圆心 O 在 PN 上, 根据 AD 与 BC 平行, 得到圆 O 与 AD 相切, 根据 $PQ = DC$, 判断得到 PQ 大于 BQ, 可

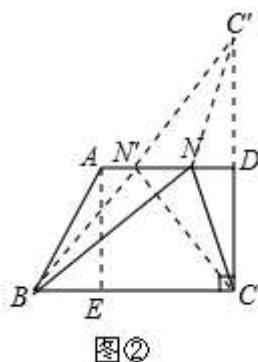
得出圆心 O 在 BC 上方，在 AD 上任取一点 P' ，连接 $P'B$ ， $P'C$ ， $P'B$ 交圆 O 于点 M ，连接 MC ，可得 $\angle BPC = \angle BMC \geq \angle BP'C$ ，即 $\angle BPC$ 最小， $\cos \angle BPC$ 的值最小，连接 OB ，求出即可。
 答案：(1) 如图①，过 A 作 $AE \perp BC$ ，



\therefore 四边形 $AECD$ 为矩形， $\therefore EC = AD = 8$ ， $BE = BC - EC = 12 - 8 = 4$ ，
 在 $Rt\triangle ABE$ 中， $\angle ABE = 60^\circ$ ， $BE = 4$ ，

$\therefore AB = 2BE = 8$ ， $AE = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ ，则 $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = 24\sqrt{3}$ 。

(2) 如图②，作点 C 关于直线 AD 的对称点 C' ，连接 $C'N$ ， $C'D$ ， $C'B$ 交 AD 于点 N' 连接 CN' ，



则 $BN + NC = BN + NC' \geq BC' = BN' + CN'$ ，

$\therefore \triangle BNC$ 周长的最小值为 $\triangle BN'C$ 的周长 $= BN' + CN' + BC = BC' + BC$ ，

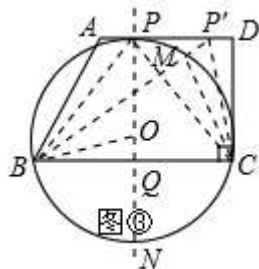
$\because AD \parallel BC$ ， $AE \perp BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， \therefore 过点 A 作 $AE \perp BC$ ，则 $CE = AD = 8$ ，

$\therefore BE = 4$ ， $AE = BE \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ， $\therefore CC' = 2CD = 2AE = 8\sqrt{3}$ ，

$\because BC = 12$ ， $\therefore BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = 4\sqrt{21}$ ， $\therefore \triangle BNC$ 周长的最小值为 $4\sqrt{21} + 12$ 。

(3) 如图③所示，存在点 P ，使得 $\cos \angle BPC$ 的值最小，

作 BC 的中垂线 PQ 交 BC 于点 Q ，交 AD 于点 P ，连接 BP ， CP ，作 $\triangle BPC$ 的外接圆 O ，圆 O 与直线 PQ 交于点 N ，则 $PB = PC$ ，圆心 O 在 PN 上，



$\because AD \parallel BC$ ， \therefore 圆 O 与 AD 相切于点 P ，

$\because PQ = DC = 4\sqrt{3} > 6$ ， $\therefore PQ > BQ$ ， $\therefore \angle BPC < 90^\circ$ ，圆心 O 在弦 BC 的上方，

在 AD 上任取一点 P' ，连接 $P'B$ ， $P'C$ ， $P'B$ 交圆 O 于点 M ，连接 MC ，

$$\therefore \angle BPC = \angle BMC \geq \angle BP'C,$$

$\therefore \angle BPC$ 最大， $\cos \angle BPC$ 的值最小，连接 OB ，则 $\angle BON = 2\angle BPN = \angle BPC$ ，

$$\therefore OB = OP = 4\sqrt{3} - OQ,$$

在 $Rt\triangle BOQ$ 中，根据勾股定理得： $OQ^2 + 6^2 = (4\sqrt{3} - OQ)^2$ ，解得： $OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore OB = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore \cos \angle BPC = \cos \angle BOQ = \frac{OQ}{OB} = \frac{1}{7}, \text{ 则此时 } \cos \angle BPC \text{ 的值为 } \frac{1}{7}.$$