2014年普通高等学校招生全国统一考试（新课标Ⅰ）数学理

一、选择题(共12小题，每小题5分)

1.已知集合A={x|x^2-2x-3≥0}，B={x|-2≤x≤2}，则A∩B=(　　)

A.[-2，-1]

B.[-1，2)

C.[-1，1]

D.[1，2)

解析：A={x|x^2-2x-3≥0}={x|x≥3或x≤-1}，B={x|-2≤x≤2}，则A∩B={x|-2≤x≤-1}，

答案：A

2. $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$=(　　)

A. 1+i

B. 1-i

C. -1+i

D. -1-i

解析：$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\frac{2i(1+i)}{-2i}$=-(1+i)=-1-i，

答案：D.

3.设函数f(x)，g(x)的定义域都为R，且f(x)是奇函数，g(x)是偶函数，则下列结论中正确的是(　　)

A. f(x)g(x)是偶函数

B.|f(x)|g(x)是奇函数

C.f(x)|g(x)|是奇函数

D.|f(x)g(x)|是奇函数

解析：∵f(x)是奇函数，g(x)是偶函数，∴|f(x)|为偶函数，|g(x)|为偶函数.

再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积还是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，可得 f(x)|g(x)|为奇函数，

答案：C.

4.已知F为双曲线C:$x^2-my^2=3m$(m>0)的一个焦点,则点F到C的一条渐近线的距离为(　　)

A.$\sqrt{3}$

B.3

C.$\sqrt{3}m$

D.3m

解析：双曲线C：$x^2-my^2=3m$(m>0)可化为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$，

∴一个焦点为($\sqrt{3m+3}$，0)，一条渐近线方程为 $x+\sqrt{m}y=0$，

∴点 F 到 C 的一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$.

答案：A.

5. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为(　　)

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{3}{8}$

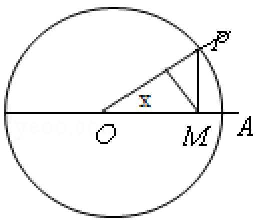
C. $\frac{5}{8}$

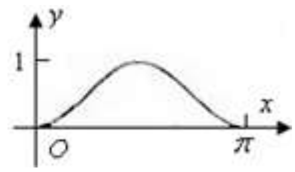
D. $\frac{7}{8}$

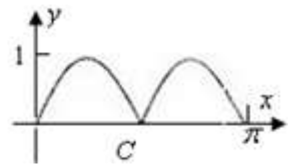
解析：4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4=16$ 种情况，周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4-2=16-2=14$ 种情况，∴所求概率为$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

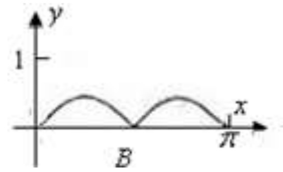
答案：D.

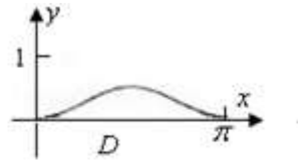
6. 如图，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 做直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f(x)，则 y=f(x)在[0， π]的图象大致为(　　)



A. 

B. 

C. 

D. 

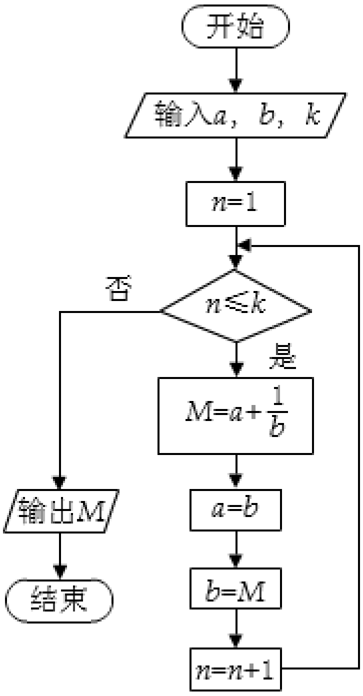
解析：在直角三角形 OMP 中，OP=1，∠POM=x，则 OM=|cosx|，

∴点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f(x)=OM|sinx|=|cosx|•|sinx|=$\frac{1}{2}$|sin2x|，

其周期为 T=$\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为 0，

答案：C.

7.执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=(　　)



A. $\frac{20}{3}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{16}{5}$

D. $\frac{15}{8}$

解析：由程序框图知：第一次循环 M=1+$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$，a=2，b=$\frac{3}{2}$，n=2；

第二次循环 M=2+$\frac{2}{3}$=$\frac{8}{3}$，a=$\frac{3}{2}$，b=$\frac{8}{3}$，n=3；

第三次循环 M=$\frac{3}{2}$+$\frac{3}{8}$=$\frac{15}{8}$，a=$\frac{8}{3}$，b=$\frac{15}{8}$，n=4.

不满足条件 n≤3，跳出循环体，输出 $M=\frac{15}{8}$.

答案：D.

8.设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则(　　)

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

B. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

解析：由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，得：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，

即 $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha$，$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$.

由等式右边为单角 α，左边为角 α 与 β 的差，可知 β 与 2α 有关.

排除选项 A，B 后验证 C，

当 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$时，$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ 成立.

答案：C.

9.不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的解集记为 D，有下列四个命题：

p_1：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant -2$　　　　p_2：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant 2$

p_3：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant 3$　　　　p_4：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant -1$

其中真命题是(　　)

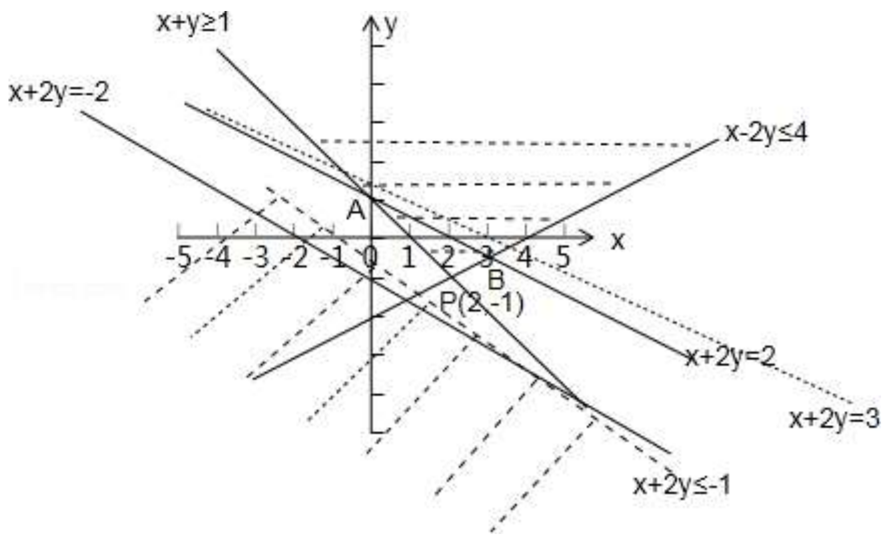
A. p_2，p_3

B. p_1，p_4

C. p_1，p_2

D. p_1，p_3

解析：作出图形如下：



由图知，区域 D 为直线 $x+y=1$ 与 $x-2y=4$ 相交的上部角型区域，

显然，区域 D 在 $x+2y\geqslant-2$ 区域的上方，故 A：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant-2$ 成立；

在直线 $x+2y=2$ 的右上方区域，: $\exists\ (x,y)\in D$，$x+2y\geqslant2$，故 p_2：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant2$ 正确；

由图知，p_3：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant3$ 错误；

$x+2y\leqslant-1$ 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域 D 下方，故 p_4：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant-1$ 错误；

综上所述，p_1、p_2 正确.

答案：C.

10.已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$(　　)

A. $\dfrac{7}{2}$

B. 3

C. $\dfrac{5}{2}$

D. 2

解析：设 Q 到 l 的距离为 d，则 $|QF|=d$，

$\because\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，$\therefore|PQ|=3d$，$\therefore$直线 PF 的斜率为 $-2\sqrt{2}$，

$\because F(2,0)$，$\therefore$直线 PF 的方程为 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$，

与 $y^2=8x$ 联立可得 $x=1$，$\therefore|QF|=d=1+2=3$，

答案：B.

11.已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(2,+\infty)$

B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)$

D. $(-\infty,-1)$

解析：当 a=0 时，f(x)=-3x^2+1=0，解得 x= $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，函数 f(x)有两个零点，不符合题意，应舍去；

当 a＞0 时，令 f′ (x)=3ax^2-6x=3ax $(x-\frac{2}{a})$ =0，解得 x=0 或 x=$\frac{2}{a}$＞0，列表如下：

x	(-∞，0)	0	$(0,\frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a},+\infty)$
f′ (x)	+	0	-	0	+
f(x)	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

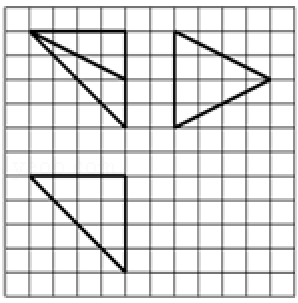
∵x→+∞，f(x)→-∞，而 f(0)=1＞0，∴存在 x＜0，使得 f(x)=0，不符合条件：f(x)存在唯一的零点 x_0，且 x_0＞0，应舍去.

当 a＜0 时，f′ (x)=3ax^2-6x=3ax $(x-\frac{2}{a})$ =0，解得 x=0 或 x=$\frac{2}{a}$＜0，列表如下：

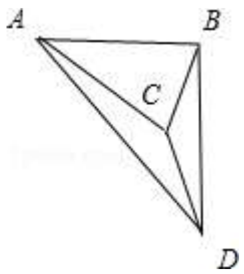
x	$(-\infty,\frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a},0)$	0	(0，+∞)
f′ (x)	-	0	+	0	-
f(x)	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

而 f(0)=1＞0，x→+∞时，f(x)→-∞，∴存在 x_0＞0，使得 f(x_0)=0，
∵f(x)存在唯一的零点 x_0，且 x_0＞0，
∴极小值 $f(\frac{2}{a})=a(\frac{2}{a})^3-3(\frac{2}{a})^2+1>0$，化为 a^2＞4，∵a＜0，∴a＜-2.
综上可知：a 的取值范围是(-∞，-2).
答案：C.

12.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为(　　)



A.$6\sqrt{2}$
B.6
C.$4\sqrt{2}$
D.4
解析：几何体的直观图如图：



AB=4，BD=4，C 到 BD 的中点的距离为：4，

∴$BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. $AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$AD=4\sqrt{2}$，

显然 AC 最长.长为 6.
答案：B.

二、填空题(共 4 小题，每小题 5 分)
13.　$(x-y)(x+y)^8$的展开式中 x^2y^7的系数为______.（用数字填写答案）
解析：$(x+y)^8$的展开式中，含 xy^7的系数是：$C_8^7=8$. 含 x^2y^6的系数是 $C_8^6=28$，

∴$(x-y)(x+y)^8$的展开式中 x^2y^7的系数为：8-28=-20.
答案：-20

14.甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，
甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；
乙说：我没去过 C 城市；
丙说：我们三人去过同一城市；
由此可判断乙去过的城市为______.
解析：由乙说：我没去过 C 城市，则乙可能去过 A 城市或 B 城市，
但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市，则乙只能是去过 A，B 中的任一个，
再由丙说：我们三人去过同一城市，
则由此可判断乙去过的城市为 A.
答案：A.

15.已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$与 $\overrightarrow{AC}$的夹角为______.

解析：在圆中若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，即 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的和向量是过 A，O 的直径，

则以 AB，AC 为临边的四边形是矩形，则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AB}$与 $\overrightarrow{AC}$的夹角为 90°，

答案：90°

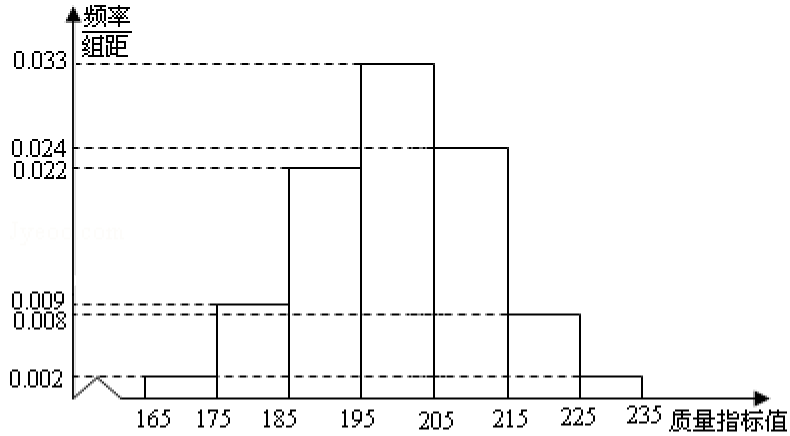
16.已知 a,b,c 分别为△ABC 三个内角 A,B,C 的对边,a=2,且(2+b)(sinA-sinB)=(c-b)sinC,
则△ABC 面积的最大值为______.
解析：△ABC 中，∵a=2，且(2+b)(sinA-sinB)=(c-b)sinC，

∴利用正弦定理可得 $4-b^2=(c-b)c$，即 $b^2+c^2-bc=4$.
再利用基本不等式可得 $4\geqslant 2bc-bc=bc$，∴$bc\leqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，取等号，
此时，△ABC 为等边三角形，它的面积为 $\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，
答案：$\sqrt{3}$.

三、解答题

17.（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数.
(Ⅰ)证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$
(Ⅱ)是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.
解析：(Ⅰ)利用 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，相减即可得出；
(Ⅱ)对 λ 分类讨论：$\lambda=0$ 直接验证即可；$\lambda\neq 0$，假设存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d. 可得 $\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，$d=\frac{\lambda}{2}$. 得到 $\lambda S_n=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得 λ 即可.
答案：(Ⅰ)∵$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，∴$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$
∵$a_{n+1}\neq 0$，∴$a_{n+2}-a_n=\lambda$.
(Ⅱ)①当 $\lambda=0$ 时，$a_na_{n+1}=-1$，假设$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d.
则 $a_{n+2}-a_n=0$，∴$2d=0$，解得 $d=0$，∴$a_n=a_{n+1}=1$，
∴$1^2=-1$，矛盾，因此 $\lambda=0$ 时$\{a_n\}$不为等差数列.
②当 $\lambda\neq 0$ 时，假设存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d.
则 $\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，∴ $d=\frac{\lambda}{2}$.
∴ $a_n=1+\frac{\lambda(n-1)}{2}$，$a_{n+1}=1+\frac{\lambda n}{2}$，
∴$\lambda S_n=1+[1+\frac{\lambda(n-1)}{2}][1+\frac{\lambda n}{2}]=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，
根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得 $\lambda=4$.
此时可得 $S_n=n^2$，$a_n=2n-1$. 因此存在 $\lambda=4$，使得$\{a_n\}$为等差数列.

18.（12 分）从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



(Ⅰ)求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$和样本方差 s^2(同一组数据用区间的中点值作代表)；

(Ⅱ)由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2近似为样本方差 s^2.

(i)利用该正态分布，求 $P(187.8<Z<212.2)$；

(ii)某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间(187.8，212.2)的产品件数，利用(i)的结果，求 EX.

附：$\sqrt{150}\approx 12.2$.

若 Z-$N(\mu,\sigma^2)$则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

解析：(Ⅰ)运用离散型随机变量的期望和方差公式，即可求出；

(Ⅱ)(i)由(Ⅰ)知 $Z\sim N(200,150)$，从而求出 $P(187.8<Z<212.2)$，注意运用所给数据；

(ii)由(i)知 $X\sim B(100,0.6826)$，运用 EX=np 即可求得.

答案：(Ⅰ)抽取产品的质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$和样本方差 s^2分别为：

$\overline{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$，

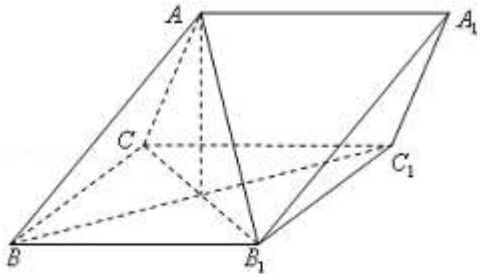
$s^2=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150$.

(Ⅱ)(i)由(Ⅰ)知 $Z\sim N(200,150)$，从而 $P(187.8<Z<212.2)=P(200-12.2<Z<200+12.2)=0.6826$；

(ii)由(i)知一件产品的质量指标值位于区间(187.8，212.2)的概率为 0.6826，

依题意知 $X\sim B(100,0.6826)$，所以 $EX=100\times0.6826=68.26$.

19.（12 分）如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$.



(Ⅰ)证明：$AC=AB_1$；

(Ⅱ)若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，AB=BC，求二面角 A-A_1B_1-C_1 的余弦值.

解析：(1)连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，可证 $B_1C\perp$平面 ABO，可得 $B_1C\perp AO$，$B_1O=CO$，进而可得 $AC=AB_1$；

(2)以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，分别可得两平面的法向量，可得所求余弦值.

答案：(1)连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，

∵侧面 BB_1C_1C 为菱形，∴$BC_1\perp B_1C$，且 O 为 BC_1 和 B_1C 的中点，

又∵$AB\perp B_1C$，∴$B_1C\perp$平面 ABO，

∵AO⊂平面 ABO，∴$B_1C\perp AO$，

又 $B_1O=CO$，∴$AC=AB_1$，

(2)∵$AC\perp AB_1$，且 O 为 B_1C 的中点，∴AO=CO，

又∵AB=BC，∴△BOA≌△BOC，∴OA⊥OB，∴OA，OB，OB_1两两垂直，

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，

$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

∵$\angle CBB_1=60°$，∴$\triangle CBB_1$为正三角形，又 AB=BC，

∴$A(0，0，\frac{\sqrt{3}}{3})$，$B(1，0，0，)$，$B_1(0，\frac{\sqrt{3}}{3}，0)$，$C(0，-\frac{\sqrt{3}}{3}，0)$

∴$\overrightarrow{AB_1}=(0，\frac{\sqrt{3}}{3}，-\frac{\sqrt{3}}{3})$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(1，0，-\frac{\sqrt{3}}{3})$，$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=(-1，-\frac{\sqrt{3}}{3}，0)$，

设向量$\vec{n}=(x，y，z)$是平面 AA_1B_1 的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}=(1，\sqrt{3}，\sqrt{3})$，

同理可得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量$\vec{m}=(1，-\sqrt{3}，\sqrt{3})$，

∴$\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{7}$，∴二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值为$\frac{1}{7}$

20.（12 分）已知点 A(0，-2)，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆 E 的右焦点，直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

(Ⅰ)求 E 的方程；

(Ⅱ)设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当△OPQ 的面积最大时，求 l 的方程.

解析：(Ⅰ)设 F(c，0)，利用直线的斜率公式可得$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，可得 c.又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b^2=a^2-c^2$，即可解得 a，b；

(Ⅱ)设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$．由题意可设直线 l 的方程为：$y=kx-2$．与椭圆的方程联立可得根与系数的关系，再利用弦长公式、点到直线的距离公式、三角形的面积计算公式即可得出 $S_{\triangle OPQ}$．通过换元再利用基本不等式的性质即可得出．

答案：(Ⅰ)设 $F(c, 0)$，∵直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $c=\sqrt{3}$．

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b^2=a^2-c^2$，解得 $a=2$，$b=1$．∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(Ⅱ)设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$．

由题意可设直线 l 的方程为：$y=kx-2$．

联立 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$，

化为 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，当 $\triangle=16(4k^2-3)>0$ 时，即 $k^2>\frac{3}{2}$ 时，

$x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$．

∴$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(\frac{16k}{1+4k^2})^2-\frac{48}{1+4k^2}]}$

$=\frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$．∴$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d\cdot|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

设 $\sqrt{4k^2-3}=t>0$，则 $4k^2=t^2+3$，

∴ $S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{4}}=1$，当且仅当 $t=2$，即 $\sqrt{4k^2-3}=2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时取等号．

满足△>0，∴△OPQ 的面积最大时直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$．

21.（12 分）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处得切线方程为 $y=e(x-1)+2$．

(Ⅰ)求 a、b；

(Ⅱ)证明：$f(x)>1$．

解析：(Ⅰ)求出定义域，导数 $f'(x)$，根据题意有 $f(1)=2$，$f'(1)=e$，解出即可；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{x}$，设函数 $g(x)=x\ln x$，函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{x}$，只需证明 $g(x)_{min}>h(x)_{max}$，利用导数可分别求得 $g(x)_{min}$，$h(x)_{max}$；

答案：(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，

$f'(x)=ae^{x}\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^{x}-\frac{b}{x^{2}}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$，

由题意可得 $f(1)=2$，$f'(1)=e$，故 $a=1$，$b=2$；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$f(x)=e^{x}\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$，

从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$，设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

∴当 $x\in(0，\frac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{e}，+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $(0，\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}，+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{x}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

∴当 $x\in(0，1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1，+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

故 $h(x)$ 在 $(0，1)$ 上单调递增，在 $(1，+\infty)$ 上单调递减，

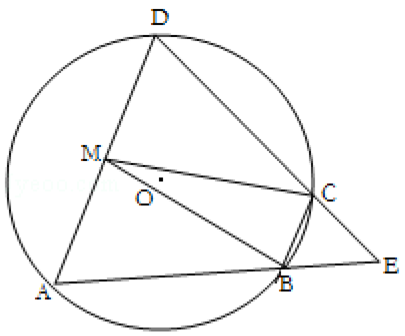
从而 $h(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

四、选做题(22-24 题任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分)

选修 4-1：集合证明选讲

22.（10 分）如图，四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E，且 CB=CE.



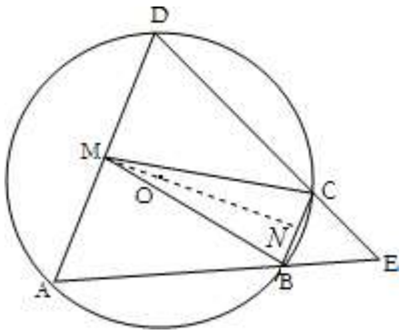
(Ⅰ)证明：∠D=∠E；

(Ⅱ)设 AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，且 MB=MC，证明：△ADE 为等边三角形.

解析：(Ⅰ)利用四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由 CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；

(Ⅱ)设 BC 的中点为 N，连接 MN，证明 AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE 为等边三角形.

答案：(Ⅰ)∵四边形ABCD是⊙O的内接四边形，
∴∠D=∠CBE，
∵CB=CE，
∴∠E=∠CBE，
∴∠D=∠E；
(Ⅱ)设BC的中点为N，连接MN，则由MB=MC知MN⊥BC，



∴O在直线MN上，
∵AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，∴OM⊥AD，∴AD∥BC，∴∠A=∠CBE，
∵∠CBE=∠E，∴∠A=∠E，
由(Ⅰ)知，∠D=∠E，∴△ADE为等边三角形.

选修4-4：坐标系与参数方程

23.已知曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t为参数）

(Ⅰ)写出曲线C的参数方程，直线l的普通方程.
(Ⅱ)过曲线C上任意一点P作与l夹角为30°的直线，交l于点A，求|PA|的最大值与最小值.
解析：(Ⅰ)联想三角函数的平方关系可取x=2cosθ、y=3sinθ得曲线C的参数方程，直接消掉参数t得直线l的普通方程；
(Ⅱ)设曲线C上任意一点P(2cosθ，3sinθ).由点到直线的距离公式得到P到直线l的距离，除以
sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值.

答案：(Ⅰ)对于曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ为参数）.

对于直线l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x-2，代入②并整理得：2x+y-6=0；
(Ⅱ)设曲线C上任意一点P(2cosθ，3sinθ).
P到直线l的距离为$d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$.

则 $|PA|=\frac{d}{\sin 30°}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中 α 为锐角.

当 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时，$|PA|$ 取得最大值，最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$.

当 $\sin(\theta+\alpha)=1$ 时，$|PA|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

选修 4-5：不等式选讲

24. 若 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(Ⅰ)求 a^3+b^3 的最小值；

(Ⅱ)是否存在 a，b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由.

解析：(Ⅰ)由条件利用基本不等式求得 $ab\geqslant 4$，再利用基本不等式求得 a^3+b^3 的最小值.

(Ⅱ)根据 $ab\geqslant 4$ 及基本不等式求的 $2a+3b>8$，从而可得不存在 a，b，使得 $2a+3b=6$.

答案：(Ⅰ)∵$a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，

∴$ab\geqslant 2$，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

∵$a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{(ab)^3}\geqslant 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，

∴a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(Ⅱ)由(1)可知，$2a+3b\geqslant 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6ab}\geqslant 4\sqrt{3}>6$，故不存在 a，b，使得 $2a+3b=6$ 成立.