2011年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学理科

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分.

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

如果事件A，B相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B).$

棱柱的体积公式 $V=Sh.$

其中S表示棱柱的底面面积

h表示棱柱的高

圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh.$

其中S表示圆锥的底面面积

h表示圆锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

1．i是虚数单位，复数$\frac{1-3i}{1-i}=$

A．$2+i$　　B．$2-i$

C．$-1+2i$　　D．$-1-2i$

2．设$x,y\in R,$则“$x\geq 2$且$y\geq 2$”是“$x^2+y^2\geq 4$”的

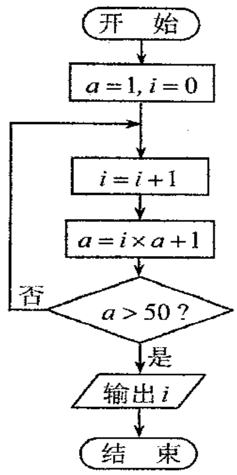
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．即不充分也不必要条件

3．阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出i的值为

A．3　　B．4

C．5　　D．6



4．已知$\{a_n\}$为等差数列，其公差为-2，且a_7是a_3与a_9的等比中项，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$n\in N^*$，则S_{10}的值为

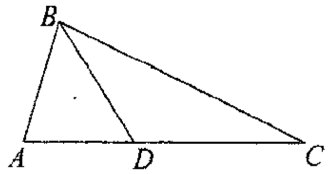
A．-110　　B．-90

C．90　　D．110

5．在$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的二项展开式中，$x^2$的系数为

A. $-\dfrac{15}{4}$　　B. $\dfrac{15}{4}$　　C. $-\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

6．如图，在△ABC 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=CD,2AB=\sqrt{3}BD,BC=2BD$，则 $\sin C$ 的值为



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

7．已知 $a=5^{\log_2 3.4},b=5^{\log_4 3.6},c=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

8．对实数 a 和 b，定义运算“$\otimes$”：$a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\le 1,\\ b,a-b>1.\end{cases}$ 设函数 $f(x)=\left(x^2-2\right)\otimes\left(x-x^2\right),x\in R.$ 若函数 $y=f(x)-c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点，则实数 c 的取值范围是

A. $\left(-\infty,-2\right]\cup\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,-2\right]\cup\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)$

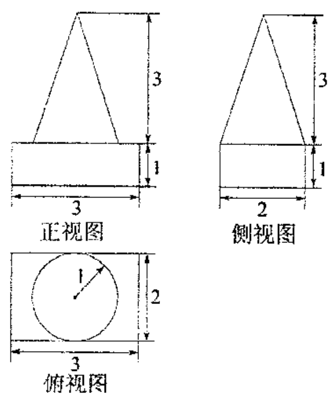
C. $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

第 II 卷

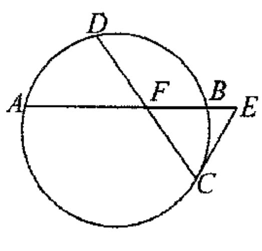
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．一支田径队有男运动员 48 人，女运动员 36 人，若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本，则抽取男运动员的数为__________

10．一个几何体的三视图如右图所示（单位：m），则该几何体的体积为__________ m^3



11．已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=8t^2,\\ y=8t.\end{cases}$（$t$ 为参数）若斜率为 1 的直线经过抛物线 C 的焦点，且与圆 $\left(x-4\right)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，则 $r=$________.



12．如图，已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F， E 是 AB 延长线上一点，且 $DF=CF=\sqrt{2}, AF:FB:BE=4:2:1.$ 若 CE 与圆相切，则线段 CE 的长为__________.

13．已知集合 $A=\left\{x\in R\,\middle|\,|x+3|+|x-4|\le 9\right\}, B=\left\{x\in R\,|\,x=4t+\dfrac{1}{t}-6, t\in(0,+\infty)\right\}$，则集合 $A\cap B$ =________.

14．已知直角梯形 $ABCD$ 中， $AD\,//\,BC$, $\angle ADC=90^0$, $AD=2, BC=1$, P 是腰 DC 上的动点，则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为____________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\tan(2x+\dfrac{\pi}{4}),$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期；

(II）设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，若 $f(\dfrac{\alpha}{2})=2\cos 2\alpha,$ 求 α 的大小．

16．（本小题满分 13 分）

学校游园活动有这样一个游戏项目：甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球，乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球，这些球除颜色外完全相同，每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球，若摸出的白球不少于 2 个，则获奖．（每次游戏结束后将球放回原箱）

（Ⅰ）求在 1 次游戏中，

（i）摸出 3 个白球的概率；

（ii）获奖的概率；

（Ⅱ）求在 2 次游戏中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ ．

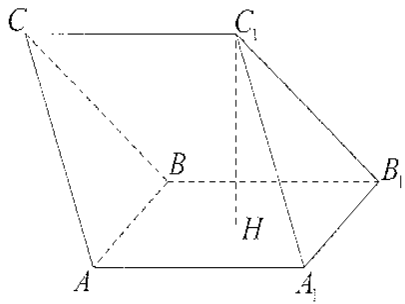
17．（本小题满分 13 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

H 是正方形 AA_1B_1B 的中心，$AA_1=2\sqrt{2}$，$C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B，且 $C_1H=\sqrt{5}.$

（Ⅰ）求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值；

（Ⅱ）求二面角 $A-A_1C_1-B_1$ 的正弦值；

（Ⅲ）设 N 为棱 B_1C_1 的中点，点 M 在平面 AA_1B_1B 内，且 $MN\perp$ 平面 A_1B_1C，求线段 BM 的长.



18．（本小题满分 13 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(a,b)$ $(a>b>0)$ 为动点，F_1,F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点．已知△ F_1PF_2 为等腰三角形.

（Ⅰ）求椭圆的离心率 e；

（Ⅱ）设直线 PF_2 与椭圆相交于 A,B 两点，M 是直线 PF_2 上的点，满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-2$，求点 M 的轨迹方程.

19．（本小题满分 14 分）

已知 $a>0$，函数 $f(x)=\ln x-ax^2, x>0.$（$f(x)$ 的图像连续不断）

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时，证明：存在 $x_0\in(2,+\infty)$，使 $f(x_0)=f(\dfrac{3}{2})$；

（Ⅲ）若存在均属于区间 $[1,3]$ 的 α,β，且 $\beta-\alpha\geq 1$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$，证明 $\dfrac{\ln 3-\ln 2}{5}\leq a\leq\dfrac{\ln 2}{3}$.

20．（本小题满分 14 分）

已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足：$b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0, b_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2}$， $n \in \mathbf{N}^*$，且 $a_1 = 2, a_2 = 4$.

（Ⅰ）求a_3, a_4, a_5的值；

（Ⅱ）设$c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in N^*$，证明：$\{c_n\}$是等比数列；

（III）设$S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in N^*$,证明：$\sum_{k=1}^{4n} \dfrac{S_k}{a_k} < \dfrac{7}{6} (n \in N^*)$.

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 40 分.

BABDCDCB

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 30 分.

9．12　10．$6+\pi$　11．$\sqrt{2}$　12．$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　13．$\{x\,|\,-2\le x\le 5\}$　14．5

三、解答题

15．本小题主要考查两角和的正弦、余弦、正切公式，同角三角函数的基本关系，二倍角的正弦、余弦公式，正切函数的性质等基础知识，考查基本运算能力.满分 13 分.

（I）解：由 $2x+\dfrac{\pi}{4}\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，

得 $x\ne\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\in R\,|\,x\ne\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\}$

$f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

（II）解：由 $f(\dfrac{a}{2})=2\cos 2a,$

得 $\tan(a+\dfrac{\pi}{4})=2\cos 2a,$

$$\frac{\sin(a+\frac{\pi}{4})}{\cos(a+\frac{\pi}{4})}=2(\cos^2 a-\sin^2 a),$$

整理得 $\dfrac{\sin a+\cos a}{\cos a-\sin a}=2(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a).$

因为 $a\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，所以 $\sin a+\cos a\ne 0.$

因此 $(\cos a-\sin a)^2=\dfrac{1}{2}$,即 $\sin 2a=\dfrac{1}{2}.$

由 $a\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，得 $2a\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

所以 $2a=\dfrac{\pi}{6}$,即 $a=\dfrac{\pi}{12}.$

16．本小题主要考查古典概型及其概率计算公式、离散型随机变量的分布列、互斥事件和相互独立事件等基础知识，考查运用概率知识解决简单的实际问题的能力.满分 13 分.

（I）（i）解：设“在 1 次游戏中摸出 i 个白球”为事件 $A_i=(i=0,1,2,3),$ 则

$$P(A_3)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{5}.$$

（ii）解：设“在 1 次游戏中获奖”为事件 B，则 $B=A_2\bigcup A_3$，又

$$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_3^2}+\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{2},$$

且 A_2，A_3 互斥，所以 $P(B)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}.$

（II）解：由题意可知 X 的所有可能取值为 0，1，2.

$$P(X=0)=(1-\frac{7}{10})^2=\frac{9}{100},$$

$$P(X=1)=C_2^1\frac{7}{10}(1-\frac{7}{10})=\frac{21}{50},$$

$$P(X=2)=(\frac{7}{10})^2=\frac{49}{100}.$$

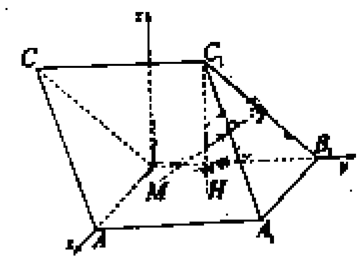
所以 X 的分布列是

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{9}{100}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{49}{100}=\frac{7}{5}.$

17．本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面垂直、二面角等基础知识，考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力.满分 13 分.

方法一：如图所示，建立空间直角坐标系，点 B 为坐标原点.



依题意得 $A(2\sqrt{2},0,0),B(0,0,0),C(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5})$

$A_1(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0),B_1(0,2\sqrt{2},0),C_1(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{5})$

（I）解：易得 $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5}),\overrightarrow{A_1B_1}=(-2\sqrt{2},0,0)$，

于是 $\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A_1B_1}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{4}{3\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}.$

（II）解：易知 $\overrightarrow{AA_1}=(0,2\sqrt{2},0),\overrightarrow{A_1C_1}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5}).$

设平面 AA_1C_1 的法向量 $m=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\\ m\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{5}z=0,\\ 2\sqrt{2}y=0.\end{cases}$

不妨令 $x=\sqrt{5},$ 可得 $m=(\sqrt{5},0,\sqrt{2})$，

同样地，设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{5}z=0, \\ -2\sqrt{2}x=0. \end{cases}$ 不妨令 $y=\sqrt{5}$，

可得 $n=(0,\sqrt{5},\sqrt{2}).$

于是 $\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{2}{7},$

从而 $\sin\langle m,n\rangle=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}.$

所以二面角 A—A_1C_1—B 的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}.$

（III）解：由 N 为棱 B_1C_1 的中点，

得 $N(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}).$ 设 M（a，b，0），

则 $\overrightarrow{MN}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-a,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-b,\dfrac{\sqrt{5}}{2})$

由 $MN\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，得 $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0, \\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0. \end{cases}$

即 $\begin{cases} (\dfrac{\sqrt{2}}{2}-a)\cdot(-2\sqrt{2})=0, \\ (\dfrac{\sqrt{2}}{2}-a)\cdot(-\sqrt{2})+(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-b)\cdot(-\sqrt{2})+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{5}=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$ 故 $M(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{4},0).$

因此 $\overrightarrow{BM}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{4},0)$，所以线段 BM 的长为 $|\overrightarrow{BM}|=\dfrac{\sqrt{10}}{4}.$

方法二：

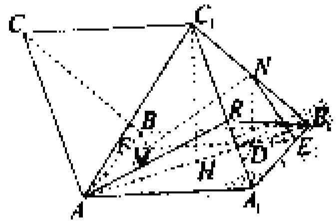
（I）解：由于 AC//A_1C_1，故 $\angle C_1A_1B_1$ 是异面直线 AC 与 A_1B_1 所成的角.

因为 $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B，又 H 为正方形 AA_1B_1B 的中心，

$AA_1=2\sqrt{2},C_1H=\sqrt{5},$

可得 $A_1C_1=B_1C_1=3.$

因此 $\cos\angle C_1A_1B_1=\dfrac{A_1C_1^2+A_1B_1^2-B_1C_1^2}{2A_1C_1\cdot A_1B_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$



所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

（II）解：连接 AC_1，易知 $AC_1=B_1C_1$，

又由于 $AA_1=B_1A_1$，$A_1C_1=A_1=C_1$，

所以 $\Delta AC_1A_1\cong\Delta B_1C_1A$，过点 A 作 $AR\perp A_1C_1$ 于点 R，

连接 B_1R，于是 $B_1R\perp A_1C_1$，故 $\angle ARB_1$ 为二面角 A—A_1C_1—B_1 的平面角.

在 $Rt\Delta A_1RB_1$ 中， $B_1R=A_1B_1\cdot\sin\angle RA_1B_1=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{2}}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}.$

连接 AB_1，在 ΔARB_1 中，

$AB_1=4,AR=B_1R,\cos\angle ARB_1=\dfrac{AR^2+B_1R^2-AB_1^2}{2AR\cdot B_1R}=-\dfrac{2}{7}$，

从而 $\sin\angle ARB_1=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}.$

所以二面角 A—A_1C_1—B_1 的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}.$

（III）解：因为 $MN\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $MN\perp A_1B_1.$

取 HB_1 中点 D，连接 ND，由于 N 是棱 B_1C_1 中点，

所以 $ND//C_1H$ 且 $ND=\dfrac{1}{2}C_1H=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

又 $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $ND\perp$ 平面 AA_1B_1B，故 $ND\perp A_1B_1.$

又 $MN\bigcap ND=N,$

所以 $A_1B_1\perp$ 平面 MND，连接 MD 并延长交 A_1B_1 于点 E，

则 $ME \perp A_1B_1$, 故 $ME // AA_1$.

由 $\dfrac{DE}{AA_1} = \dfrac{B_1E}{B_1A_1} = \dfrac{B_1D}{B_1A} = \dfrac{1}{4}$,

得 $DE = B_1E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，延长 EM 交 AB 于点 F，

可得 $BF = B_1E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 连接 NE.

在 $Rt\Delta ENM$ 中，

$ND \perp ME$, 故 $ND^2 = DE \cdot DM$.

所以 $DM = \dfrac{ND^2}{DE} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$.

可得 $FM = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

连接 BM，在 $Rt\Delta BFM$ 中，

$BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

18．本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、平面向量等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的数学思想，考查解决问题能力与运算能力.满分 13 分.

（I）解：设 $F_1(-c,0), F_2(c,0)(c>0)$

由题意，可得 $|PF_2| = |F_1F_2|$,

即 $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c$.

整理得 $2(\dfrac{c}{a})^2 + \dfrac{c}{a} - 1 = 0$, 得 $\dfrac{c}{a} = -1$（舍），

或 $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$. 所以 $e = \dfrac{1}{2}$.

（II）解：由（I）知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$,

可得椭圆方程为 $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$,

直线 PF_2 方程为 $y = \sqrt{3}(x-c)$.

A，B 两点的坐标满足方程组$\begin{cases}3x^2+4y^2=12c^2,\\ y=\sqrt{3}(x-c).\end{cases}$

消去 y 并整理，得$5x^2-8cx=0.$

解得$x_1=0,x_2=\frac{8}{5}c.$

得方程组的解$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=-\sqrt{3}c,\end{cases}\begin{cases}x_2=\frac{8}{5}c,\\ y_2=\frac{3\sqrt{3}}{5}c.\end{cases}$

不妨设$A(\frac{8}{5}c,\frac{3\sqrt{3}}{5}c),B(0,-\sqrt{3}c)$

设点 M 的坐标为(x,y),则$\overrightarrow{AM}=(x-\frac{8}{5}c,y-\frac{3\sqrt{3}}{5}c),\overrightarrow{BM}=(x,y+\sqrt{3}c)$，

由$y=\sqrt{3}(x-c)$,得$c=x-\frac{\sqrt{3}}{3}y.$

于是$\overrightarrow{AM}=(\frac{8\sqrt{3}}{15}y-\frac{3}{5}x,\frac{8}{5}y-\frac{3\sqrt{3}}{5}x),$

$\overrightarrow{BM}=(x,\sqrt{3}x).$由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-2,$

即$(\frac{8\sqrt{3}}{15}y-\frac{3}{5}x)\cdot x+(\frac{8}{5}y-\frac{3\sqrt{3}}{5}x)\cdot\sqrt{3}x=-2$，

化简得$18x^2-16\sqrt{3}xy-15=0.$

将$y=\frac{18x^2-15}{16\sqrt{3}x}$代入$c=x-\frac{\sqrt{3}}{3}y$,得$c=\frac{10x^2+5}{16x}>0.$

所以$x>0.$

因此，点 M 的轨迹方程是$18x^2-16\sqrt{3}xy-15=0(x>0).$

19．本小题主要考查导数的运算、利用导数研究函数的单调性、解不等式、函数的零点等基础知识，考查运算能力和运用函数思想分析解决问题的能力及分类讨论的思想方法.满分 14 分.

（I）解：$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{2},x\in(0,+\infty)$，

令$f'(x)=0$,解得x=$\frac{\sqrt{2a}}{2a}.$

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a})$	$\frac{\sqrt{2a}}{2a}$	$(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a})$, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$.

（II）证明：当 $a=\frac{1}{8}$时, $f(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2$.

由（I）知 $f(x)$ 在（0，2）内单调递增，

在 $(2,+\infty)$ 内单调递减.

令 $g(x)=f(x)-f(\frac{3}{2})$.

由于 $f(x)$ 在（0，2）内单调递增，

故 $f(2)>f(\frac{3}{2})$,即g（2）>0.

取 $x'=\frac{3}{2}e>2$,则$g(x')=\frac{41-9e^2}{32}<0$.

所以存在 $x_0\in(2,x')$,使$g(x_0)=0$,

即存在 $x_0\in(2,+\infty)$,使$f(x_0)=f(\frac{3}{2})$.

（说明：x' 的取法不唯一，只要满足 $x'>2$,且$g(x')<0$ 即可）

（III）证明：由 $f(\alpha)=f(\beta)$ 及（I）的结论知 $\alpha<\frac{\sqrt{2a}}{2a}<\beta$，

从而 $f(x)$在$[\alpha,\beta]$上的最小值为 $f(a)$.

又由 $\beta-\alpha\geq 1$，$\alpha,\beta\in[1,3]$, 知$1\leq\alpha\leq 2\leq\beta\leq 3$.

故$\begin{cases} f(2)\ge f(\alpha)\ge f(1), \\ f(2)\ge f(\beta)\ge f(3). \end{cases}$即$\begin{cases} \ln 2-4a\ge -a, \\ \ln 2-4a\ge \ln 3-9a. \end{cases}$

从而$\dfrac{\ln 3-\ln 2}{5}\le a\le \dfrac{\ln 2}{3}$.

20．本小题主要考查等比数列的定义、数列求和等基础知识，考查运算能力、推理论证能力、综合分析和解决问题的能力及分类讨论的思想方法.满分 14 分.

（I）解：由$b_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2}, n\in N^*$,

可得$b_n=\begin{cases} 1, n为奇数 \\ 2, \text{n}为偶数 \end{cases}$

又$b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0$,

当n=1时, $a_1+a_2+2a_3=0$, 由$a_1=2$, $a_2=4$, 可得$a_3=-3$;
当n=2时, $2a_2+a_3+a_4=0$, 可得$a_4=-5$;
当n=3时, $a_3+a_4+2a_5=0$, 可得$a_4=4$.

（II）证明：对任意$n\in N^*$,

$a_{2n-1}+a_{2n}+2a_{2n+1}=0$,　　①

$2a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}=0$,　　②

$a_{2n+1}+a_{2n+2}+2a_{2n+3}=0$,　　③

②—③，得　$a_{2n}=a_{2n+3}$.　　④

将④代入①，可得$a_{2n+1}+a_{2n+3}=-(a_{2n-1}+a_{2n+1})$

即$c_{n+1}=-c_n (n\in N^*)$

又$c_1=a_1+a_3=-1$, 故$c_n\ne 0$,

因此$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=-1$, 所以$\{c_n\}$是等比数列.

（III）证明：由（II）可得$a_{2k-1}+a_{2k+1}=(-1)^k$，

于是，对任意$k\in N^*$且$k\ge 2$，有

$a_1+a_3=-1,$
$-(a_3+a_5)=-1,$
$a_5+a_7=-1,$
$\vdots$
$(-1)^k(a_{2k-3}+a_{2k-1})=-1.$

将以上各式相加，得 $a_1+(-1)^k a_{2k-1}=-(k-1),$

即 $a_{2k-1}=(-1)^{k+1}(k+1)$，

此式当 k=1 时也成立.由④式得 $a_{2k}=(-1)^{k+1}(k+3).$

从而 $S_{2k}=(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{4k-2}+a_{4k})=-k,$

$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{4k}=k+3.$

所以，对任意 $n\in N^*,n\geq 2$，

$$\sum_{k=1}^{4n}\frac{S_k}{a_k}=\sum_{m=1}^{n}(\frac{S_{4m-3}}{a_{4m-3}}+\frac{S_{4m-2}}{a_{4m-2}}+\frac{S_{4m-1}}{a_{4m-1}}+\frac{S_{4m}}{a_{4m}})$$

$$=\sum_{m=1}^{n}(\frac{2m+2}{2m}-\frac{2m-1}{2m+2}-\frac{2m+3}{2m+1}+\frac{2m}{2m+3})$$

$$=\sum_{m=1}^{n}(\frac{2}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2m+2)(2m+2)})$$

$$=\frac{2}{2\times 3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$<\frac{1}{3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{(2m-1)(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\cdot[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$<\frac{7}{6}.$$

对于 n=1，不等式显然成立.

所以，对任意 $n\in N^*,$

$$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\cdots+\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}}$$

$$=(\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2})+(\frac{S_3}{a_3}+\frac{S_4}{a_4})+\cdots+(\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}})$$

$$=(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12})+(1-\frac{1}{4^2}-\frac{2}{4^2-(4^2-1)})+\cdots+(1-\frac{1}{4^n}-\frac{n}{(4^n-1)})$$

$$=n-(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})-(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^2(4^2-1)})-\cdots-(\frac{1}{4^n}+\frac{n}{4^n(4^n-1)})$$

$$\leq n-(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})=n-\frac{1}{3}.$$