2015年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）数学文

一、选择题(每小题5分,共40分)

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$A=\{2,3,5\}$,集合$B=\{1,3,4,6\}$,则集合$A\cap(\complement_U B)=$

(　　)

A. {3}

B. {2,5}

C. {1,4,6}

D. {2,3,5}

解析：$A=\{2,3,5\}$, $\complement_U B=\{2,5\}$, 则$A\cap(\complement_U B)=\{2,5\}$, 故选B.

2. 设变量x,y满足约束条件$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-2y\leq 0 \\ x+2y-8\leq 0 \end{cases}$,则目标函数$z=3x+y$的最大值为(　　)

A. 7

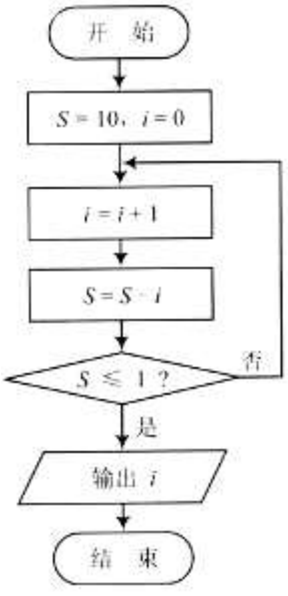
B. 8

C. 9

D. 14

解析：$z=3x+y=\frac{5}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(x+2y-8)+9\leq 9$,当$x=2,y=3$取得最大值9. 故选C.

3. 阅读下边的程序框图,运行相应的程序,则输出i的值为(　　)



第（3）题图

A. 2

B. 3

C. 4
D. 5
解析：由程序框图可知：$i=2,S=8;i=3,S=5;i=4,S=1$. 故选 C.

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的(　　)

A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

解析：由 $|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3$, 可知“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的充分而不必要条件, 故选 A.

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $F(2,0)$, 且双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切, 则双曲线的方程为(　　)

A. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{13}=1$

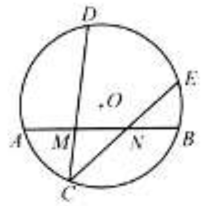
B. $\dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{9}=1$

C. $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

D. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

解析：由双曲线的渐近线 $bx-ay=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切得 $\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$，由 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，解得 a=1，b= $\sqrt{3}$. 故选 D.

6. 如图, 在圆 *O* 中, *M*, *N* 是弦 *AB* 的三等分点, 弦 *CD*, *CE* 分别经过点 *M*, *N*, 若 *CM*=2, *MD*=4, *CN*=3, 则线段 *NE* 的长为(　　)



第（6）题图

A. $\dfrac{8}{3}$

B. 3

C. $\dfrac{10}{3}$

D. $\dfrac{5}{2}$

解析：由相交弦定理可$CM\times MD=CN\times NE=\dfrac{1}{3}AB\times AB\Rightarrow NE=\dfrac{CM\times MD}{CN}=\dfrac{8}{3}$， 故选 A.

7. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$(m为实数)为偶函数,记$a=f(\log_{0.5}3)$,

$b=f(\log_2 5), c=f(2m)$，则 a,b,c，的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$

B. $c<a<b$

C. $a<c<b$

D. $c<b<a$

解析：由 $f\left(x\right)$ 为偶函数得 $m=0$，所以 $a=2,b=4,c=0$，故选 B.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, x\le 2\\(x-2)^2, x>2\end{cases}$，函数 $g(x)=3-f(2-x)$，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点的个数为（　　）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析：当 x＜0 时 $f\left(2-x\right)=x^2$，此时方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=-1-|x|+x^2$ 的小于零的零点为 $x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；当 0≤x≤2 时，$f\left(2-x\right)=2-|2-x|=x$，方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=2-|x|+x=2$ 无零点；当 x＞2 时，$f\left(2-x\right)=2-|2-x|=4-x$，方程

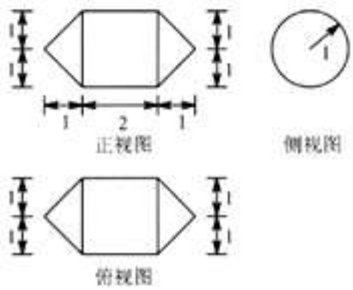
$f(x)-g(x)=-1-|x-2|^2+x-7=x^2-3x-3$ 大于 2 的零点有一个. 故选 A.

二、填空题：本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. i 是虚数单位, 计算 $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的结果为________.

解析：$\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}(\mathrm{i}+2)}{2+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

10. 一个几何体的三视图如图所示(单位：m), 则该几何体的体积为________ m^3 .



第（10）题图

解析：该几何体是由两个高为 1 的圆锥与一个高为 2 圆柱组合而成, 所以该几何体的体积为 $2\times\dfrac{1}{3}\times\pi\times1+\pi\times2=\dfrac{8\pi}{3}(\mathrm{m}^3)$.

答案：$\dfrac{8\pi}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=ax\ln x, x\in(0,+\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(1)=3$, 则 a 的值为________.

解析：因为 $f'(x)=a(1+\ln x)$, 所以 $f'(1)=a=3$.

12. 已知 $a>0, b>0, ab=8,$ 则当 a 的值为________时 $\log_2 a\cdot\log_2(2b)$ 取得最大值.

解析：$\log_2 a\cdot\log_2(2b)\le\left(\dfrac{\log_2 a+\log_2(2b)}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(\log_2 2ab)^2=\dfrac{1}{4}(\log_2 16)^2=4,$ 当

$a=2b$ 时取等号, 结合 $a>0, b>0, ab=8,$ 可得 $a=4, b=2.$

13. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB\parallel DC$, $AB=2, BC=1, \angle ABC=60^\circ$, 点 E 和点 F 分别

在线段 BC 和 CD 上, 且 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为________.

解析：在等腰梯形 $ABCD$ 中, 由 $AB\parallel DC$, $AB=2,BC=1,\angle ABC=60^{\circ}$, 得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$, $\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}^{2}+\frac{1}{18}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{29}{18}$$

答案：$\dfrac{29}{18}$

14. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\cos\omega x\left(\omega>0\right),x\in\mathbf{R},$ 若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\omega,\omega\right)$ 内单调递增, 且函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称, 则 ω 的值为________.

解析：由 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\omega,\omega\right)$ 内单调递增, 且 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称, 可得

$2\omega\le\dfrac{\pi}{\omega}$, 且 $f\left(\omega\right)=\sin\omega^{2}+\cos\omega^{2}=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\left(\omega^{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$,

所以 $\omega^{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题, 共 80 分.

15. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18, 先采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员参加比赛.

(1) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员人数；

(2) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 , 从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛.

①用所给编号列出所有可能的结果；

②设 A 为事件“编号为 A_5,A_6 的两名运动员至少有一人被抽到”, 求事件 A 发生的概率.

解析：(1) 应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3, 1, 2；

(2) ①从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛, 所有可能的结果为 $\left\{A_1,A_2\right\}$,

$\left\{A_1,A_3\right\}$, $\left\{A_1,A_4\right\}$, $\left\{A_1,A_5\right\}$, $\left\{A_1,A_6\right\}$, $\left\{A_2,A_3\right\}$, $\left\{A_2,A_4\right\}$, $\left\{A_2,A_5\right\}$, $\left\{A_2,A_6\right\}$,

$\{A_3,A_4\}$, $\{A_3,A_5\}$, $\{A_3,A_6\}$, $\{A_4,A_5\}$, $\{A_4,A_6\}$, $\{A_5,A_6\}$, 共 15 种.

②编号为 A_5,A_6 的两名运动员至少有一人被抽到的结果为 $\{A_1,A_5\}$, $\{A_1,A_6\}$, $\{A_2,A_5\}$, $\{A_2,A_6\}$, $\{A_3,A_5\}$, $\{A_3,A_6\}$, $\{A_4,A_5\}$, $\{A_4,A_6\}$, $\{A_5,A_6\}$, 共 9 种, 所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

答案：(1)由分层抽样方法可知应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3, 1, 2；

(2)①一一列举, 共 15 种；②符合条件的结果有 9 种, 所以 $P(A)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$..

16. $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$,

$b-c=2, \cos A=-\dfrac{1}{4}$,

(1)求 a 和 $\sin C$ 的值；

(2)求 $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解析：(1)由面积公式可得 bc=24，结合 b-c=2，可求得解得 b=6，c=4.再由余弦定理求得 a=8.最后由正弦定理求 sinC 的值.

(2)直接展开求值.

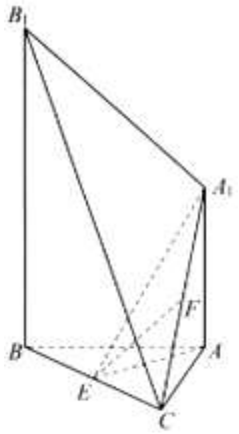
答案：(1)△ABC 中，由 cosA= $-\dfrac{1}{4}$，得 sinA= $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ，由 $\dfrac{1}{2}$ bcsinA= $3\sqrt{5}$ ，得 bc=24.又由 b-c=2，解得 b=6，c=4.由 $a^2=b^2+c^2-2ab\cos A$，可得 a=8.

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 sinC= $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

(2)

$$\cos\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2A\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\cos^2 A-1\right)-\sin A\cos A=\frac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{16}$$

17. 如图, 已知 $AA_1\perp$ 平面 ABC, $BB_1//AA_1$, $AB=AC=3$, $BC=2\sqrt{5}, AA_1=\sqrt{7}$, , $BB_1=2\sqrt{7}$, 点 E, F 分别是 BC, A_1C 的中点.



(1)求证：$EF//$平面 A_1B_1BA.

(2)求证：平面 $AEA_1\perp$平面 BCB_1.

(3)求直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角的大小.

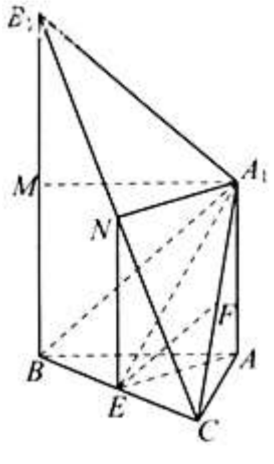
解析：(1)要证明 $EF//$平面 A_1B_1BA，只需证明 $EF//BA_1$ 且 $EF\not\subset$ 平面 A_1B_1BA.

(2)要证明平面 $AEA_1\perp$平面 BCB_1，可证明 $AE\perp BC$，$BB_1\perp AE$.

(3)取 B_1C 中点 N，连接 A_1N，则 $\angle A_1B_1N$ 就是直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角，Rt△

A_1NB_1 中，由 $\sin\angle A_1B_1N=\dfrac{A_1N}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$，得直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角为 30°.

答案：(1)证明：如图，



连接 A_1B，在△ A_1BC 中，

因为 E 和 F 分别是 BC，A_1C 的中点，

所以 $EF//BA_1$，

又因为 $EF\not\subset$ 平面 A_1B_1BA，

所以 $EF//$平面 A_1B_1BA.

(2)因为 $AB=AC$, E 为 BC 中点,
所以 $AE\perp BC$，

因为 $AA_1\perp$平面 ABC, $BB_1//AA_1$,

所以 $BB_1\perp$平面 ABC, 从而 $BB_1\perp AE$，

又 $BC\cap BB_1=B$ ，所以 $AE\perp$平面 BCB_1 ，

又因为 $AE\subset$平面 AEA_1，所以平面 $AEA_1\perp$平面 BCB_1.

(3)取 BB_1 中点 M 和 B_1C 中点 N，连接 A_1M， A_1N .

因为 N 和 E 分别为 B_1C， BC 中点，

所以 NE// BB_1，NE=$\frac{1}{2}BB_1$.故 NE// AA_1，NE= AA_1，

所以 A_1N //AE， A_1N =AE.

又因为 AE⊥平面 BCB_1，

所以 $A_1N\perp$平面 BCB_1，从而$\angle A_1B_1N$ 就是直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角.

在△ABC 中，可得 AE=2，所以 A_1N =AE=2.

因为 BM// AA_1，BM= AA_1，

所以 A_1M //AB， A_1M =AB，

又由 AB⊥ BB_1，有 $A_1M\perp BB_1$.

在 Rt△ A_1MB_1 中，可得 A_1B_1 =4.

在 Rt△ A_1NB_1 中，$\sin\angle A_1B_1N=\frac{A_1N}{A_1B}=\frac{1}{2}$，因此$\angle A_1B_1N$ =30° ，

所以直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角为 30° .

18. 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列, $\{b_n\}$是等差数列, 且 $a_1=b_1=1, b_2+b_3=2a_3$，

$a_5 - 3b_2 = 7$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = a_n b_n, n?\ \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

解析：(1) 列出关于 q 与 d 的方程组, 通过解方程组求出 q, d, 即可确定通项.
(2) 用错位相减法求和.

答案：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, $\{b_n\}$ 的公差为 d, 由题意 $q > 0$, 由已知, 有 $\begin{cases} 2q^2 - 3d = 2, \\ q^4 - 3d = 10, \end{cases}$

消去 d 得 $q^4 - 2q^2 - 8 = 0,$ 解得 $q = 2, d = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$,

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 由 (1) 有 $c_n = (2n-1)2^{n-1}$, 设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$S_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n-1},$

$2S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \times 2^n,$

两式相减得 $-S_n = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (2n-1) \times 2^n = -(2n-3) \times 2^n - 3,$

所以 $S_n = (2n-3)2^n + 3$.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(\mathrm{a} > \mathrm{b} > 0)$ 的上顶点为 B, 左焦点为 F , 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

(1) 求直线 BF 的斜率.
(2) 设直线 BF 与椭圆交于点 P(P 异于点 B), 故点 B 且垂直于 BF 的直线与椭圆交于点 Q(Q 异于点 B) 直线 PQ 与 x 轴交于点 M, $|PM| = l\,|MQ|$.
①求 l 的值.

②若 $|PM|\sin Ð BQP = \dfrac{7\sqrt{5}}{9}$, 求椭圆的方程.

解析：(1) 先由 $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 及 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $a = \sqrt{5}c, b = 2c$, 直线 BF 的斜率

$k = \dfrac{b-0}{0-(-c)} = \dfrac{b}{c} = 2$.

(2) 先把直线 BF, BQ 的方程与椭圆方程联立, 求出点 P, Q 横坐标, 可得 $\lambda = \dfrac{|PM|}{|MQ|}$

$=\dfrac{|x_M-x_P|}{|x_Q-x_M|}=\dfrac{|x_P|}{|x_Q|}=\dfrac{7}{8}$. ②先由 $|PM|$sinÐBQP=$\dfrac{7\sqrt{5}}{9}$ 得 $|BP|$=$|PQ|$sinÐBQP =

$\dfrac{15}{7}|PM|$sin? BQP $\quad \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$, 由此求出 c=1, 故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

答案：(1) $F(-c,0)$ ，由已知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 及 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a=\sqrt{5}c,b=2c$ ，又因为

$B(0,b)$ ，故直线 BF 的斜率 $k=\dfrac{b-0}{0-(-c)}=\dfrac{b}{c}=2$.

(2) 设点 $P(x_P,y_P),Q(x_Q,y_Q),M(x_M,y_M)$ ，①由 (1) 可得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{5c^2}+\dfrac{y^2}{4c^2}=1$，直线 BF 的方程为 $y=2x+2c$ ，两方程联立消去 y 得 $3x^2+5cx=0$，解得 $x_P=-\dfrac{5c}{3}$. 因为 $BQ\perp BP$，所以直线 BQ 方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2c$ ，与椭圆方程联立消去 y 得

$21x^2-40cx=0$ ，解得 $x_Q=\dfrac{40c}{21}$. 又因为 $\lambda=\dfrac{|PM|}{|MQ|}$ ，及 $x_M=0$ 得

$\lambda=\dfrac{|x_M-x_P|}{|x_Q-x_M|}=\dfrac{|x_P|}{|x_Q|}=\dfrac{7}{8}$.

②由①得 $\dfrac{|PM|}{|MQ|}=\dfrac{7}{8}$，所以 $\dfrac{|PM|}{|PM|+|MQ|}=\dfrac{7}{7+8}=\dfrac{7}{15}$，即 $|PQ|=\dfrac{15}{7}|PM|$ ，又因为

$|PM|$sinÐBQP=$\dfrac{7\sqrt{5}}{9}$，所以 $|BP|$=$|PQ|$sinÐBQP = $\dfrac{15}{7}|PM|$sin? BQP $\quad \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

又因为 $y_P=2x_P+2c=-\dfrac{4}{3}c$，所以 $|BP|=\sqrt{\left(0+\dfrac{5c}{3}\right)^2+\left(2c+\dfrac{4c}{3}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}c$，因此

$\dfrac{5\sqrt{5}}{3}c=\dfrac{5\sqrt{5}}{3},c=1$，所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

20. 已知函数 $f(x)=4x-x^4,x$? $\mathbf{R}$,

(1) 求 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P, 曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$, 求证：对于任意的正实数 x, 都有 $f(x)$ £ $g(x)$.

(3) 若方程 $f(x)=a$(a为实数) 有两个正实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1<-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

解析：(1) 由 $f'(x)=4-4x^3$，可得 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

(2) $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，$F(x)=f(x)-g(x)$，证明 $F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减，所以对任意的实数 x，$F(x)\le F(x_0)=0$，对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\le g(x)$.

(3) 设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=-\frac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$. 由 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，得 $g(x_2)\ge f(x_2)=a=g(x_2')$，所以 $x_2\le x_2'$. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线为

$y=h(x)$，方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\frac{a}{4}$，

由 $h(x)=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增且 $h(x_1')=a=f(x_1)\le h(x_1)$，可得 $x_1'\le x_1$，

所以 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'=-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

答案：(1) 由 $f(x)=4x-x^4$，可得 $f'(x)=4-4x^3$，当 $f'(x)>0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $f'(x)<0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

(2) 设 $P(x_0,0)$，则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$，$f'(x_0)=-12$，曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$ 即 $F(x)=f(x)-f'(x)(x-x_0)$ 则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

由于 $f(x)=4-4x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，故 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，又因为 $F'(x_0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$F'(x)>0$，所以当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减，所以对任意的实数 x，

$F\left(x\right)\le F\left(x_0\right)=0$ ，对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\pounds g(x)$.

(3)由(2)知 $g\left(x\right)=-12\left(x-4^{\frac{1}{3}}\right)$，设方程 $g\left(x\right)=a$ 的根为 $x_2{}'$，可得 $x_2{}'=-\dfrac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$.

因为 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递减，又由(2)知 $g\left(x_2\right)\ge f\left(x_2\right)=a=g\left(x_2{}'\right)$，

所以 $x_2\le x_2{}'$.

类似的设曲线 $y=f\left(x\right)$ 在原点处的切线为 $y=h\left(x\right)$，可得 $h\left(x\right)=4x$，对任意的 $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$，有 $f\left(x\right)-h\left(x\right)=-x^4\le 0$ 即 $f\left(x\right)\le h\left(x\right)$.

设方程 $h\left(x\right)=a$ 的根为 $x_1{}'$，可得 $x_1{}'=\dfrac{a}{4}$，

因为 $h\left(x\right)=4x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递增且 $h\left(x_1{}'\right)=a=f\left(x_1\right)\le h\left(x_1\right)$，因此，$x_1{}'\le x_1$，

所以 $x_2-x_1\le x_2{}'-x_1{}'=-\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.