2016年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)数学文

一、选择题(共8小题，每小题5分，满分40分)

1. 已知集合A={x|2＜x＜4}，B={x|x＜3或x＞5}，则A∩B=(　　)

A. {x|2＜x＜5}

B. {x|x＜4或x＞5}

C. {x|2＜x＜3}

D. {x|x＜2或x＞5}

解析：∵集合A={x|2＜x＜4}，B={x|x＜3或x＞5}，∴A∩B={x|2＜x＜3}.

答案：C

2. 复数$\frac{1+2i}{2-i}$=(　　)

A. i

B. 1+i

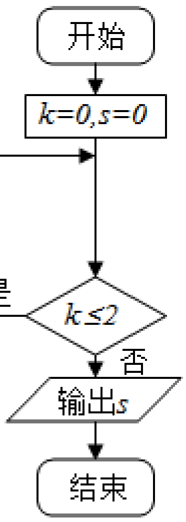
C. −i

D. 1−i

解析：$\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}$=i.

答案：A

3. 执行如图所示的程序框图，输出s的值为(　　)



A. 8

B. 9

C. 27

D. 36

解析：当k=0时，满足进行循环的条件，故S=0，k=1，

当k=1时，满足进行循环的条件，故S=1，k=2，

当k=2时，满足进行循环的条件，故S=9，k=3，

当 k=3 时，不满足进行循环的条件，
故输出的 S 值为 9.
答案：B

4.下列函数中，在区间(-1，1)上为减函数的是(　　)

A. $y=\frac{1}{1-x}$

B. y=cosx

C. y=ln(x+1)

D. $y=2^{-x}$

解析：A. x 增大时，-x 减小，1-x 减小，$\therefore \frac{1}{1-x}$ 增大；∴函数 $y=\frac{1}{1-x}$ 在(-1，1)上为增函数，即该选项错误；

B. y=cosx 在(-1，1)上没有单调性，∴该选项错误；

C. x 增大时，x+1 增大，ln(x+1)增大，∴y=ln(x+1)在(-1，1)上为增函数，即该选项错误；

D. $y=2^{-x}=(\frac{1}{2})^{x}$；∴根据指数函数单调性知，该函数在(-1，1)上为减函数，∴该选项正确.

答案：D.

5.圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 y=x+3 的距离为(　　)

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

解析：∵圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心为(-1，0)，∴圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 y=x+3 的距离为：

$d=\frac{|-1+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

答案：C.

6.从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人，则甲被选中的概率为(　　)

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{8}{25}$

D. $\frac{9}{25}$

解析：从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人，基本事件总数 $n=C_5^2=10$，

甲被选中包含的基本事件的个数 m=$C_1^1C_4^1$=4，∴甲被选中的概率 p=$\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

答案：B

7.已知 A(2，5)，B(4，1).若点 P(x，y)在线段 AB 上，则 2x-y 的最大值为(　　)

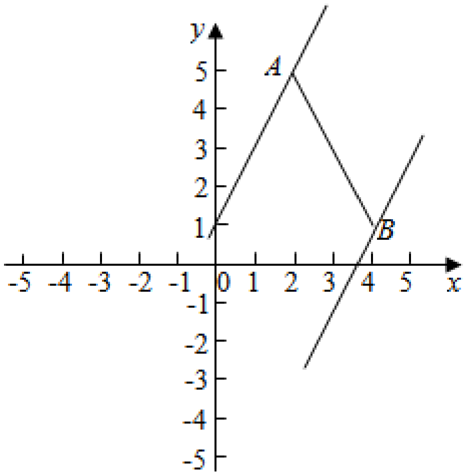
A.-1

B.3

C.7

D.8

解析：如图.



A(2，5)，B(4，1).若点 P(x，y)在线段 AB 上，

令 z=2x-y，则平行 y=2x-z 当直线经过 B 时截距最小，Z 取得最大值，

可得 2x-y 的最大值为：2×4-1=7.

答案：C.

8.某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段，表中为 10 名学生的预赛成绩，其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远(单位：米)	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳(单位：次)	63	a	75	60	63	72	70	a-1	b	65

在这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，则(　　)

A.2 号学生进入 30 秒跳绳决赛

B.5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

C.8 号学生进入 30 秒跳绳决赛

D.9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

解析：∵这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，

故编号为 1，2，3，4，5，6，7，8 的学生进入立定跳远决赛，

又由同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，

则 3，6，7 号同学必进入 30 秒跳绳决赛，

剩下 1，2，4，5，8 号同学的成绩分别为：63，a，60，63，a-1 有且只有 3 人进入 30 秒跳绳决赛，故成绩为 63 的同学必进入 30 秒跳绳决赛.
答案：B

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分)

9. 已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小为______________.

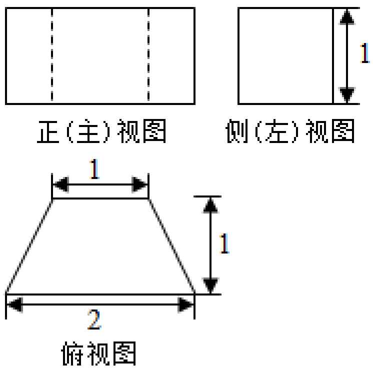
解析：∵向量 a=(1，$\sqrt{3}$)，b=($\sqrt{3}$，1)，∴ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角 θ 满足：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又∵ θ ∈[0， π]，∴ $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，

答案：$\dfrac{\pi}{6}$.

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ (x≥2) 的最大值为____________.
解析：$f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$；∴f(x) 在[2，+∞) 上单调递减；∴x=2 时，f(x) 取最大值 2.
答案：2.

11. 某四棱柱的三视图如图所示，则该四棱柱的体积为____________.



解析：由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，
棱柱的底面面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times1=\dfrac{3}{2}$，棱柱的高为 1，故棱柱的体积 $V=\dfrac{3}{2}$.

答案：$\dfrac{3}{2}$

12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0，b＞0) 的一条渐近线为 2x+y=0，一个焦点为($\sqrt{5}$，0)，则

a=____________，b=____________.

解析：∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1(a＞0，b＞0)的一条渐近线为2x+y=0，一个焦点为(5，0)，

$$\therefore \begin{cases} \frac{b}{a}=2, \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}, \end{cases}$$ 解得 a=1，b=2.

答案：1，2.

13.在△ABC 中，∠A=$\frac{2\pi}{3}$，a=$\sqrt{3}$c，则$\frac{b}{c}$=__________.

解析：在△ABC 中，∠A=$\frac{2\pi}{3}$，a=3c，

由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{\sqrt{3}c}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{c}{\sin C}$，sinC=$\frac{1}{2}$，C=$\frac{\pi}{6}$，则 B=π$-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

三角形是等腰三角形，B=C，则 b=c，则$\frac{b}{c}$=1.

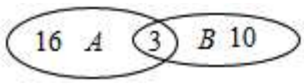
答案：1

14.某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店：

①第一天售出但第二天未售出的商品有__________种；

②这三天售出的商品最少有__________种.

解析：①设第一天售出商品的种类集为 A，第二天售出商品的种类集为 B，第三天售出商品的种类集为 C，如图，



则第一天售出但第二天未售出的商品有 16 种；

②由①知，前两天售出的商品种类为 19+13-3=29 种，

当第三天售出的 18 种商品都是第一天或第二天售出的商品时，这三天售出的商品种类最少为 29 种.

答案：①16；②29

三、解答题(共 6 小题，满分 80 分)

15.已知{a_n}是等差数列，{b_n}是等比数列，且 b_2=3，b_3=9，a_1=b_1，a_{14}=b_4.

(1)求{a_n}的通项公式；

(2)设 c_n=a_n+b_n，求数列{c_n}的前 n 项和.

解析：(1)设{a_n}是公差为 d 的等差数列，{b_n}是公比为 q 的等比数列，运用通项公式可得 q=3，d=2，进而得到所求通项公式；

(2)求得 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，再由数列的求和方法：分组求和，运用等差数列和等比数列的

求和公式，计算即可得到所求和.

答案：(1)设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列，

由 $b_2=3$，$b_3=9$，可得 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=3$，$b_n=b_2q^{n-2}=3\cdot 3^{n-2}=3^{n-1}$；

即有 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，则 $d=\dfrac{a_{14}-a_1}{13}=2$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$；

(2) $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，

则数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 $(1+3+\cdots+(2n-1))+(1+3+9+\cdots+3^{n-1})=\dfrac{1}{2}n\cdot 2n+\dfrac{1-3^n}{1-3}=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x$ ($\omega>0$)的最小正周期为 π.

(1)求 ω 的值；

(2)求 f(x)的单调递增区间.

解析：(1)利用倍角公式结合两角和的正弦化积，再由周期公式列式求得 ω 的值；

(2)直接由相位在正弦函数的增区间内求解 x 的取值范围得 f(x)的单调递增区间.

答案：(1) $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x$

$=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\omega x\right)=\sqrt{2}\sin(2\omega x+\pi 4)$.

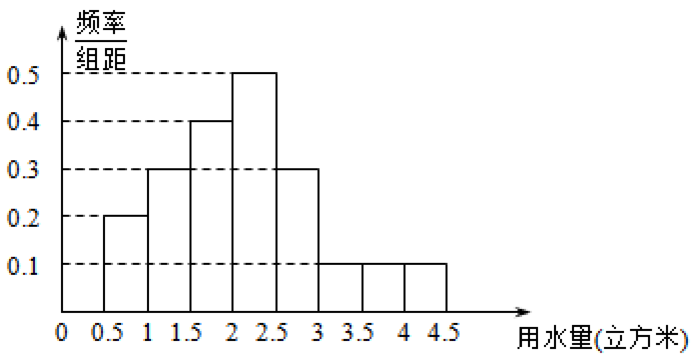
由 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得 $\omega=1$；

(2)由(1)得，$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$.

再由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$.

∴f(x)的单调递增区间为 $[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{8}+k\pi]$ ($k\in Z$).

17. 某市居民用水拟实行阶梯水价，每人月用水量中不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费，超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费，从该市随机调查了 10000 位居民，获得了他们某月的用水量数据，整理得到如图频率分布直方图：



(1)如果 w 为整数，那么根据此次调查，为使 80%以上居民在该月的用水价格为 4 元/立方米，w 至少定为多少？

(2)假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，当 w=3 时，估计该市居民该月的人均水费.

解析：(1)由频率分布直方图得：用水量在[0.5，1)的频率为 0.1，用水量在[1，1.5)的频率为 0.15，用水量在[1.5，2)的频率为 0.2，用水量在[2，2.5)的频率为 0.25，用水量在[2.5，3)的频率为 0.15，用水量在[3，3.5)的频率为 0.05，用水量在[3.5，4)的频率为 0.05，用水量在[4，4.5)的频率为 0.05，由此能求出为使 80%以上居民在该用的用水价为 4 元/立方米，w 至少定为 3 立方米.

(2)当 w=3 时，利用频率分布直方图能求出该市居民的人均水费.

答案：(1)由频率分布直方图得：

用水量在[0.5，1)的频率为 0.1，

用水量在[1，1.5)的频率为 0.15，

用水量在[1.5，2)的频率为 0.2，

用水量在[2，2.5)的频率为 0.25，

用水量在[2.5，3)的频率为 0.15，

用水量在[3，3.5)的频率为 0.05，

用水量在[3.5，4)的频率为 0.05，

用水量在[4，4.5)的频率为 0.05，

∵用水量小于等于 3 立方米的频率为 85%，

∴为使 80%以上居民在该用的用水价为 4 元/立方米，

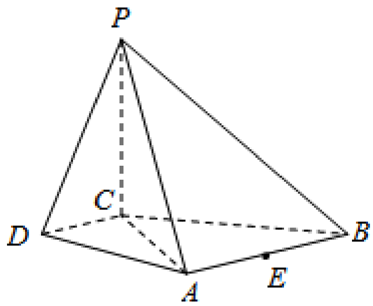
∴w 至少定为 3 立方米.

(2)当 w=3 时，该市居民的人均水费为：

$(0.1\times1+0.15\times1.5+0.2\times2+0.25\times2.5+0.15\times3)\times4+0.05\times3\times4+0.05\times0.5\times10+0.05\times3\times4+0.05\times1\times10+0.05\times3\times4+0.05\times1.5\times10=10.5$，

∴当 w=3 时，估计该市居民该月的人均水费为 10.5 元.

18.如图，在四棱锥 P-ABCD 中，PC⊥平面 ABCD，AB∥DC，DC⊥AC.



(1)求证：DC⊥平面 PAC；

(2)求证：平面 PAB⊥平面 PAC；

(3)设点 E 为 AB 的中点，在棱 PB 上是否存在点 F，使得 PA∥平面 CEF？说明理由.

解析：(1)利用线面垂直的判定定理证明 DC⊥平面 PAC；

(2)利用线面垂直的判定定理证明 AB⊥平面 PAC，即可证明平面 PAB⊥平面 PAC；

(3)在棱 PB 上存在中点 F，使得 PA∥平面 CEF.利用线面平行的判定定理证明.

答案：(1)∵PC⊥平面 ABCD，DC⊂平面 ABCD，∴PC⊥DC，

∵DC⊥AC，PC∩AC=C，∴DC⊥平面 PAC；

(2)∵AB∥DC，DC⊥AC，∴AB⊥AC，

∵PC⊥平面 ABCD，AB⊂平面 ABCD，∴PC⊥AB，

∵PC∩AC=C，∴AB⊥平面PAC，
∵AB⊂平面PAB，∴平面PAB⊥平面PAC;
(3)在棱PB上存在中点F，使得PA∥平面CEF.
∵点E为AB的中点，∴EF∥PA，
∵PA⊄平面CEF，EF⊂平面CEF，∴PA∥平面CEF.

19.已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1过点A(2，0)，B(0，1)两点.

(1)求椭圆C的方程及离心率；
(2)设P为第三象限内一点且在椭圆C上，直线PA与y轴交于点M，直线PB与x轴交于点N，求证：四边形ABNM的面积为定值.

解析：(1)由题意可得a=2，b=1，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，则椭圆C的方程可求，

离心率为e=$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

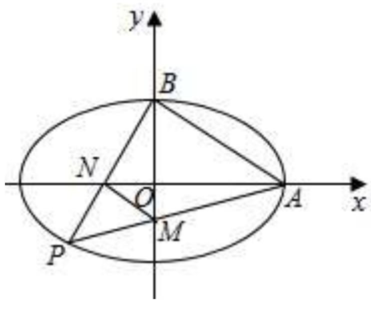
(2)设P(x_0，y_0)，求出PA、PB所在直线方程，得到M，N的坐标，求得|AN|，|BM|.由S_{ABNM}=$\frac{1}{2}$·|AN|·|BM|，结合P在椭圆上求得四边形ABNM的面积为定值2.

答案：(1)∵椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1过点A(2，0)，B(0，1)两点，

∴a=2，b=1，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2$=1，离心率为e=$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2)证明：如图，



设P(x_0，y_0)，则k_{PA}=$\frac{y_0}{x_0-2}$，PA所在直线方程为y=$\frac{y_0}{x_0-2}\left(x-2\right)$，

取x=0，得y_M=$-\frac{2y_0}{x_0-2}$；

$k_{PB}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，PB 所在直线方程为 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，

取 y=0，得 $x_N=\dfrac{x_0}{1-y_0}$.

∴$|AN|=2-x_N=2-\dfrac{x_0}{1-y_0}=\dfrac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}$，$|BM|=1-x_M=1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}=\dfrac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}$.

∴$S_{ABNM}=\dfrac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}\cdot\dfrac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(x_0+2y_0-2)^2}{(1-y_0)(x_0-2)}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x_0+2y_0)^2-4(x_0+2y_0)+4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}=\dfrac{1}{2}\dfrac{x_0{}^2+4x_0y_0+4y_0{}^2-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{4(x_0y_0+2-x_0-2y_0)}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}=\dfrac{1}{2}\times4=2$.

∴四边形 ABNM 的面积为定值 2.

20. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.
(1)求曲线 y=f(x)在点(0，f(0))处的切线方程；
(2)设 a=b=4，若函数 f(x)有三个不同零点，求 c 的取值范围；
(3)求证：$a^2-3b>0$ 是 f(x)有三个不同零点的必要而不充分条件.
解析：(1)求出 f(x)的导数，求得切线的斜率和切点，进而得到所求切线的方程；
(2)由 f(x)=0，可得 $-c=x^3+4x^2+4x$，由 $g(x)=x^3+4x^2+4x$，求得导数，单调区间和极值，由-c 介于极值之间，解不等式即可得到所求范围；
(3)先证若 f(x)有三个不同零点，令 f(x)=0，可得单调区间有 3 个，求出导数，由导数的图象与 x 轴有两个不同的交点，运用判别式大于 0，可得 $a^2-3b>0$；再由 a=b=4，c=0，可得若 $a^2-3b>0$，不能推出 f(x)有 3 个零点.
答案：(1)函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，
可得 y=f(x)在点(0，f(0))处的切线斜率为 $k=f'(0)=b$，
切点为(0，c)，可得切线的方程为 y=bx+c；
(2)设 a=b=4，即有 $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，
由 f(x)=0，可得 $-c=x^3+4x^2+4x$，
由 $g(x)=x^3+4x^2+4x$ 的导数 $g'(x)=3x^2+8x+4=(x+2)(3x+2)$，
当 $x>-\dfrac{2}{3}$ 或 $x<-2$ 时，$g'(x)>0$，g(x)递增；

当 $-2<x<-\dfrac{2}{3}$ 时，$g'(x)<0$，g(x)递减.

即有 g(x)在 x=-2 处取得极大值，且为 0；g(x)在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 处取得极小值，且为 $-\dfrac{32}{27}$.

由函数 f(x)有三个不同零点，可得 $-\dfrac{32}{27}<-c<0$，解得 $0<c<\dfrac{32}{27}$，

则 c 的取值范围是 $(0, \frac{32}{27})$；

(3)若 f(x)有三个不同零点，令 f(x)=0，

可得 f(x)的图象与 x 轴有三个不同的交点.

即有 f(x)有 3 个单调区间，

即为导数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 的图象与 x 轴有两个交点，

可得△＞0，即 $4a^2-12b>0$，即为 $a^2-3b>0$；

若 $a^2-3b>0$，即有导数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 的图象与 x 轴有两个交点，

当 c=0，a=b=4 时，满足 $a^2-3b>0$，

即有 $f(x)=x(x+2)^2$，图象与 x 轴交于(0，0)，(-2，0)，则 f(x)的零点为 2 个.

故 $a^2-3b>0$ 是 f(x)有三个不同零点的必要而不充分条件.