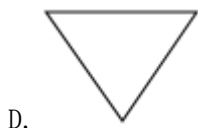
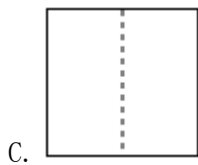
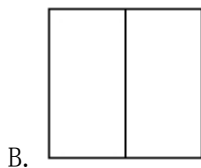
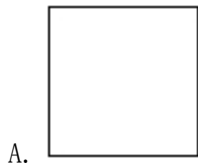
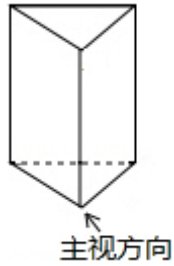


2018 年山东省济宁市汶上县中考三模试卷数学

一、选择题(共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1. 如图所示正三棱柱的主视图是()



解析：如图所示正三棱柱的主视图是平行排列的两个矩形.

答案：B

2. 下列命题中错误的是()

A. -2017 的绝对值是 2017

B. 3 的平方根是 $\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{2}$ 的倒数是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 0 的相反数是 0

解析：A、 -2017 的绝对值是 2017 ，是真命题；

B、3 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$ ，是假命题；

C、 $-\sqrt{2}$ 的倒数是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，是真命题；

D、0 的相反数是 0，是真命题.

答案：B

3. 我市今年中考理、化实验操作考试，采用学生抽签方式决定自己的考试内容，规定：每一位考生必须在三个物理实验(用纸签 A、B、C 表示)和三个化学实验(用纸签 D、E、F 表示)中各抽取一个进行考试，小刚在看不到纸签的情况下，分别从中各随机抽取一个. 小刚抽到物理实验 B 和化学实验 F 的概率是()

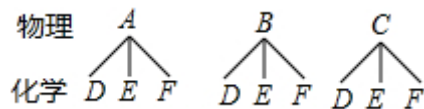
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{2}{9}$

解析：如图所示：



可得，一共有 9 种测试方法，抽到物理实验 B 和化学实验 F 的只有 1 种可能，故小刚抽到物理实验 B 和化学实验 F 的概率是： $\frac{1}{9}$.

答案：C

4. 下列运算正确的是()

A. $\sqrt{6} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

B. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

C. $a \cdot a^2 = a^2$

D. $(2a^3)^2 = 4a^6$

解析：A、 $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ 无法计算，故此选项错误；

B、 $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ，故此选项错误；

C、 $a \cdot a^2 = a^3$ ，故此选项错误；

D、 $(2a^3)^2 = 4a^6$ ，正确.

答案：D

5. 若一个三角形的三边长分别为 6、8、10，则这个三角形最长边上的中线长为()

- A. 3.6
- B. 4
- C. 4.8
- D. 5

解析： $\because 6^2+8^2=100=10^2$ ， \therefore 三边长分别为 6cm、8cm、10cm 的三角形是直角三角形，最大边是斜边为 10cm。 \therefore 最大边上的中线长为 5cm.

答案：D

6. 已知 a, b 都是实数，且 $a < b$ ，则下列不等式的变形正确的是()

- A. $3a < 3b$
- B. $-a+1 < -b+1$
- C. $a+x > b+x$
- D. $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$

解析：A、不等式的两边都乘以 3，不等号的方向不变，故 A 正确；

B、不等式的两边都乘以 -1，不等号的方向改变，故 B 错误；

C、不等式的两边都加同一个整式，不等号的方向不变，故 C 错误；

D、不等式的两边都除以 2，不等号的方向改变，故 D 错误.

答案：A

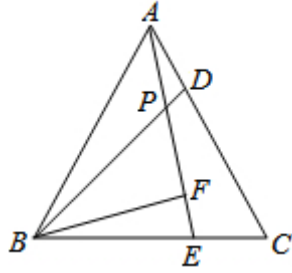
7. 化简 $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a}$ 的结果是()

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{a}{a+1}$
- C. $\frac{a+1}{a}$
- D. $\frac{a+1}{a+2}$

解析：原式 = $\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2} \times \frac{a}{a-1} = \frac{a}{a+1}$.

答案：B

8. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，D、E 分别是 AC、BC 上的点，且 $AD=CE$ ，AE 与 BD 相交于点 P， $BF \perp AE$ 于点 F. 若 $BP=4$ ，则 PF 的长()



- A. 2
- B. 3
- C. 1
- D. 23

解析：∵△ABC 是等边三角形，∴AB=AC. ∴∠BAC=∠C.

在△ABD 和△CAE 中，
$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAD = \angle C, \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE (SAS). \\ AD = CE, \end{cases}$$

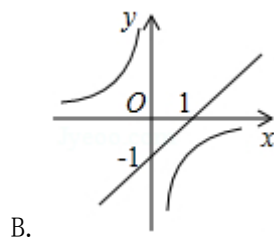
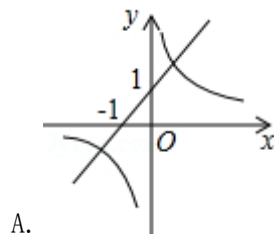
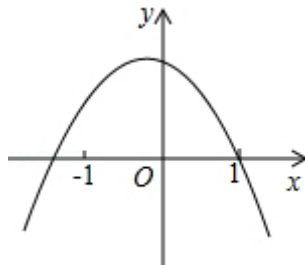
∴∠ABD=∠CAE. ∴∠APD=∠ABP+∠PAB=∠BAC=60° . ∴∠BPF=∠APD=60° .

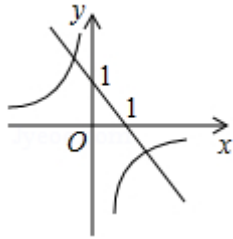
∵∠BFP=90° , ∠BPF=60° , ∴∠PBF=30° . ∴PF=1/2 PB = 1/2 × 4=2.

答案：A.

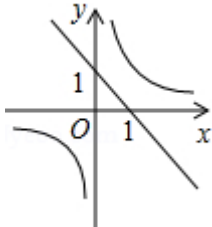
9. 已知函数 $y=-(x-m)(x-n)$ (其中 $m<n$) 的图象如图所示，则一次函数 $y=mx+n$ 与反比例函数

$y = \frac{m+n}{x}$ 的图象可能是()





C.



D.

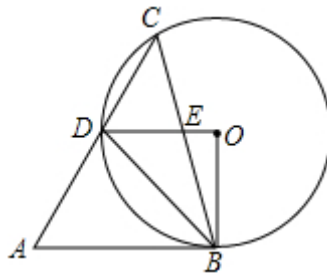
解析：由图可知， $m < -1$ ， $n = 1$ ，所以， $m + n < 0$ ，

所以，一次函数 $y = mx + n$ 经过第二四象限，且与 y 轴相交于点 $(0, 1)$ ，反比例函数 $y = \frac{m+n}{x}$

的图象位于第二四象限，纵观各选项，只有 C 选项图形符合.

答案：C

10. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ，以 BC 为弦作 $\odot O$ ，交 AC 于点 D ， OD 与 BC 交于点 E ，若 AB 与 $\odot O$ 相切，则下列结论：① $\angle BOD = 90^\circ$ ；② $DO \parallel AB$ ；③ $CD = AD$ ；④ $\triangle BDE \sim \triangle BCD$ ；⑤ $\frac{BE}{DE} = \sqrt{2}$ ，正确的有（ ）



A. ①②

B. ①④⑤

C. ①②④⑤

D. ①②③④⑤

解析：∵ $\angle ACB = 45^\circ$ ，∴ 由圆周角定理得： $\angle BOD = 2\angle ACB = 90^\circ$ ，∴ ①正确；

∵ AB 切 $\odot O$ 于 B ，∴ $\angle ABO = 90^\circ$ ，∴ $\angle DOB + \angle ABO = 180^\circ$ ，∴ $DO \parallel AB$ ，∴ ②正确；

假如 $CD = AD$ ，因为 $DO \parallel AB$ ，所以 $CE = BE$ ，

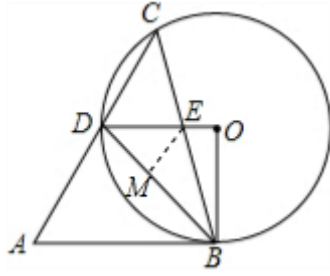
根据垂径定理得： $OD \perp BC$ ，则 $\angle OEB = 90^\circ$ ，

∵ 已证出 $\angle DOB = 90^\circ$ ，∴ 此时 $\triangle OEB$ 不存在，∴ ③错误；

∵ $\angle DOB = 90^\circ$ ， $OD = OB$ ，∴ $\angle ODB = \angle OBD = 45^\circ = \angle ACB$ ，即 $\angle ODB = \angle C$ ，

∵ $\angle DBE = \angle CBD$ ，∴ $\triangle BDE \sim \triangle BCD$ ，∴ ④正确；

过 E 作 $EM \perp BD$ 于 M ，则 $\angle EMD = 90^\circ$ ，



$\because \angle ODB=45^\circ$, $\therefore \angle DEM=45^\circ = \angle EDM$, $\therefore DM=EM$,

设 $DM=EM=a$, 则由勾股定理得: $DE=\sqrt{2} a$,

$\because \angle ABC=180^\circ - \angle C - \angle A=75^\circ$,

又 $\because \angle OBA=90^\circ$, $\angle OBD=45^\circ$, $\therefore \angle OBC=15^\circ$, $\therefore \angle EBM=30^\circ$,

在 $Rt\triangle EMB$ 中 $BE=2EM=2a$, $\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$, \therefore ⑤正确.

答案: C

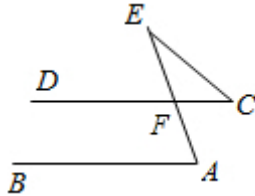
二、填空题(共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

11. 若函数 $y=(m+2)x^{|m|-3}$ 是反比例函数, 则 m 的值为_____.

解析: \because 函数 $y=(m+2)x^{|m|-3}$ 是反比例函数, $\therefore m+2 \neq 0$ 且 $|m|-3=-1$, 解得 $m=\pm 2$, $\therefore m=2$.

答案: 2

12. 如图, 直线 $AB \parallel CD$, $\angle A=70^\circ$, $\angle C=40^\circ$, 则 $\angle E$ 等于_____度.

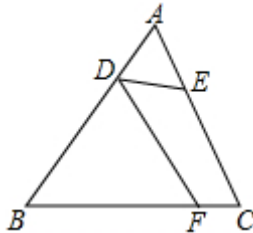


解析: \because 直线 $AB \parallel CD$, $\angle A=70^\circ$, $\therefore \angle EFD=\angle A=70^\circ$,

$\because \angle EFD$ 是 $\triangle CEF$ 的外角, $\therefore \angle E=\angle EFD-\angle C=70^\circ -40^\circ =30^\circ$.

答案: 30

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$. D 、 E 分别为边 AB 、 AC 上的点. $AC=3AD$, $AB=3AE$, 点 F 为 BC 边上一点, 添加一个条件: _____, 可以使得 $\triangle FDB$ 与 $\triangle ADE$ 相似. (只需写出一个)



解析: $DF \parallel AC$, 或 $\angle BFD=\angle A$.

理由：∵ ∠A=∠A, $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$, ∴ $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, ∴ ①当 $DF \parallel AC$ 时, $\triangle BDF \sim \triangle BAC$,
 ∴ $\triangle BDF \sim \triangle EAD$.

②当 $\angle BFD = \angle A$ 时, ∵ $\angle B = \angle AED$, ∴ $\triangle FBD \sim \triangle AED$.

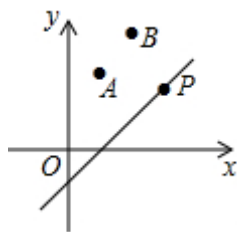
答案：DF ∥ AC, 或 $\angle BFD = \angle A$

14. 关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=2, x_2=-1$, (a, b, m 均为常数, $a \neq 0$), 则方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 的解是_____.

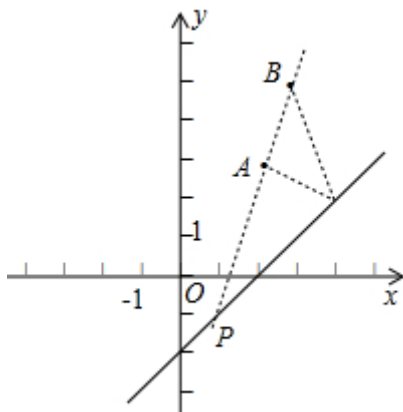
解析：∵ 关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=2, x_2=-1$, (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$),
 ∴ 方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 变形为 $a[(x+2)+m]^2+b=0$, 即此方程中 $x+2=2$ 或 $x+2=-1$,
 解得 $x=0$ 或 $x=-3$.

答案： $x_3=0, x_4=-3$

15. 已知在平面直角坐标系中, 已知 $A(2, 3), B(3, 5)$, 点 P 为直线 $y=x-2$ 上一个动点, 当 $|PB-PA|$ 值最大时, 点 P 的坐标为_____.



解析：根据三角形的两边之差小于第三边, 当 P 在直线 AB 和直线 $y=x-2$ 的交点上时, $|PA-PB|$ 的值最大, 等于 AB , 如图,



设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$,

把 $A(2, 3), B(3, 5)$ 代入得: $\begin{cases} 2k + b = 3, \\ 3k + b = 5, \end{cases}$ 解得: $k=2, b=-1$,

即直线 AB 的解析式为 $y=2x-1$,

解方程组 $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = x - 2, \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x = -1, \\ y = -3, \end{cases}$ 即 P 的坐标为 $(-1, -3)$,

答案： $(-1, -3)$

三、解答题(共 7 小题, 满分 55 分)

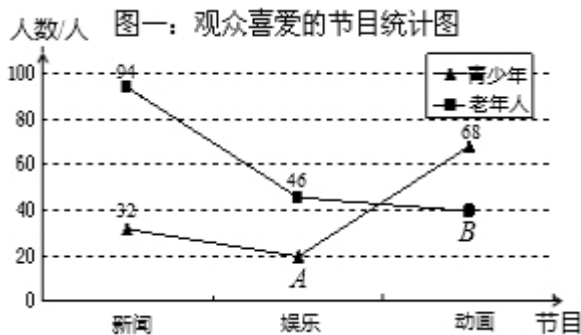
16. 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} x - 2y = -5, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$ 求代数式 $(x-y)^2 - (x+2y)(x-2y)$ 的值.

解析: 根据完全平方公式、平方差公式可以化简题目中的式子, 然后根据 $x-2y=-5$, $2x+y=0$, 可以求得 x, y 的值, 从而可以解答本题.

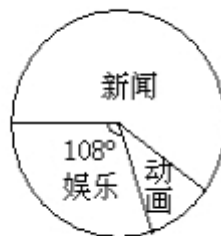
答案: $(x-y)^2 - (x+2y)(x-2y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + 4y^2 = -2xy + 5y^2$,

由 $\begin{cases} x - 2y = -5, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases}$ \therefore 当 $x=-1, y=2$ 时, 原式 $= -2 \times (-1) \times 2 + 5 \times 2^2 = 4 + 20 = 24$.

17. 为了解某地区 30 万电视观众对新闻、动画、娱乐三类节目的喜爱情况, 根据老年人、成年人、青少年各年龄段实际人口的比例 3: 5: 2, 随机抽取一定数量的观众进行调查, 得到如下统计图:



图二：成年人喜爱的节目统计图



- 上面所用的调查方法是_____ (填“全面调查”或“抽样调查”);
- 写出折线统计图中 A、B 所代表的值; A: _____; B: _____;
- 求该地区喜爱娱乐类节目的成年人的人数.

解析: (1) 这次调查是随机抽取一定数量的观众进行调查因而是抽样调查;

(2) 结合折线统计图说出 A、B 的值;

(3) 根据样本估计总体, 首先求出喜欢娱乐节目的成年人的比例, 然后乘以总人数即可求得.

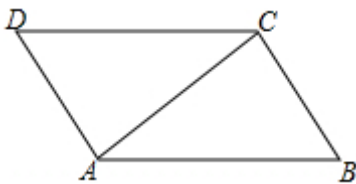
答案: (1) 抽样调查;

(2) $A=20, B=40$;

(3) 成年人有: $300000 \times \frac{5}{3+5+2} = 150000$ (人), $\frac{108}{360} \times 100\% = 30\%$,

喜爱娱乐类节目的成年人有: $150000 \times 30\% = 45000$ (人).

18. 如图, AC 是平行四边形 ABCD 的对角线.



(1) 请按如下步骤在图中完成作图(保留作图痕迹):

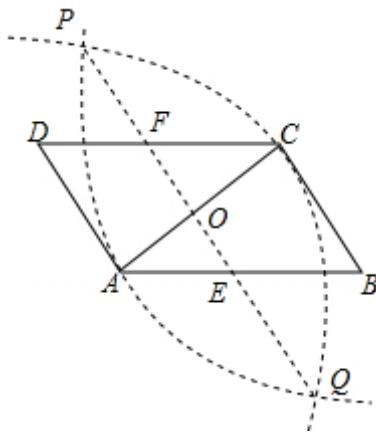
- ① 分别以 A, C 为圆心, 以大于 AC 长为半径画弧, 弧在 AC 两侧的交点分别为 P, Q.
- ② 连接 PQ, PQ 分别与 AB, AC, CD 交于点 E, O, F;

(2) 求证: $AE=CF$.

解析: (1) 根据题意画出图形即可;

(2) 由作图可知 PQ 是线段 AC 的垂直平分线, 故可得出 $OA=OC$, 再由平行四边形的性质得出 $\angle OCF=\angle OAE$, 故可得出 $\triangle OCF \cong \triangle OAE$, 据此可得出结论.

答案: (1) 如图;



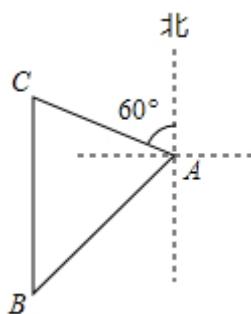
(2) \because 由作图可知, PQ 是线段 AC 的垂直平分线, $\therefore OA=OC$.

$\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle OCF=\angle OAE$.

在 $\triangle OCF$ 与 $\triangle OAE$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OC = OA, \\ \angle COF = \angle AOE, \end{cases} \therefore \triangle OCF \cong \triangle OAE \text{ (ASA)}, \therefore AE=CF.$$

19. 如图, 海中一小岛有一个观测点 A , 某天上午观测到某渔船在观测点 A 的西南方向上的 B 处跟踪鱼群由南向北匀速航行. B 处距离观测点 $30\sqrt{6}$ 海里, 若该渔船的速度为每小时 30 海里, 问该渔船多长时间到达观测点 A 的北偏西 60° 方向上的 C 处? (计算结果用根号表示, 不取近似值)

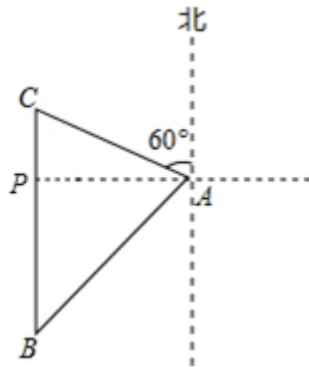


解析: 过点 A 作 $AP \perp BC$, 垂足为 P , 在 $Rt\triangle APB$ 利用三角函数求的 AP 和 PB 的长, 则在直角 $\triangle APC$ 中利用三角函数即可求得 PC 的长, 即可求得 BC 的长, 然后根据速度公式求解.

答案: 过点 A 作 $AP \perp BC$, 垂足为 P .

在 $Rt\triangle APB$ 中, $\because \angle APB=90^\circ$, $\angle PAB=45^\circ$, $AB=30\sqrt{6}$, $\therefore BP=AP=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=30\sqrt{3}$.

在 Rt△APC 中，∵∠APC=90°，∠PAC=30°，∴ $\tan\angle PAC=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，



∴ $CP=AP \cdot \tan\angle PAC=30$.

∵ $PC+BP=BC=30+30\sqrt{3}$ ，∴航行时间： $(30+30\sqrt{3}) \div 30=1+\sqrt{3}$ (小时).

答：该渔船从 B 处开始航行 $(1+\sqrt{3})$ 小时到达 C 处.

20. 为改善生态环境，防止水土流失，某村计划在江汉堤坡种植白杨树，现甲、乙两家林场有相同的白杨树苗可供选择，其具体销售方案如下：

| 甲林场 | | 乙林场 | |
|------------|--------|------------|--------|
| 购树苗数量 | 销售单价 | 购树苗数量 | 销售单价 |
| 不超过1000棵时 | 4元/棵 | 不超过2000棵时 | 4元/棵 |
| 超过1000棵的部分 | 3.8元/棵 | 超过2000棵的部分 | 3.6元/棵 |

设购买白杨树苗 x 棵，到两家林场购买所需费用分别为 $y_{甲}$ (元)、 $y_{乙}$ (元).

(1) 该村需要购买 1500 棵白杨树苗，若都在甲林场购买所需费用为_____元，若都在乙林场购买所需费用为_____元；

(2) 分别求出 $y_{甲}$ 、 $y_{乙}$ 与 x 之间的函数关系式；

(3) 如果你是该村的负责人，应该选择到哪家林场购买树苗合算，为什么？

解析：(1) 由单价×数量就可以得出购买树苗需要的费用；

(2) 根据分段函数的表示法，分别当 $0 \leq x \leq 1000$ ，或 $x > 1000$. $0 \leq x \leq 2000$ ，或 $x > 2000$ ，由由单价×数量就可以得出购买树苗需要的费用表示出 $y_{甲}$ 、 $y_{乙}$ 与 x 之间的函数关系式；

(3) 分类讨论，当 $0 \leq x \leq 1000$ ， $1000 < x \leq 2000$ 时， $x > 2000$ 时，表示出 $y_{甲}$ 、 $y_{乙}$ 的关系式，就可以求出结论.

答案：(1) 由题意，得，

$$y_{甲}=4 \times 1000+3.8(1500-1000)=5900 \text{ 元,}$$

$$y_{乙}=4 \times 1500=6000 \text{ 元;}$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 1000$ 时， $y_{甲}=4x$ ，

$x > 1000$ 时.

$$y_{甲} = 4000 + 3.8(x - 1000) = 3.8x + 200,$$

$$\therefore y_{甲} = \begin{cases} 4x (0 \leq x \leq 1000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ 3.8x + 200 (x > 1000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}); \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq 2000$ 时, $y_{乙} = 4x$,

$$\text{当 } x > 2000 \text{ 时, } y_{乙} = 8000 + 3.6(x - 2000) = 3.6x + 800,$$

$$\therefore y_{乙} = \begin{cases} 4x (0 \leq x \leq 2000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ 3.6x + 800 (x > 2000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}); \end{cases}$$

(3) 由题意, 得

当 $0 \leq x \leq 1000$ 时, 两家林场单价一样, \therefore 到两家林场购买所需要的费用一样.

当 $1000 < x \leq 2000$ 时, 甲林场有优惠而乙林场无优惠, \therefore 当 $1000 < x \leq 2000$ 时, 到甲林场优惠;

当 $x > 2000$ 时, $y_{甲} = 3.8x + 200$, $y_{乙} = 3.6x + 800$,

当 $y_{甲} = y_{乙}$ 时, $3.8x + 200 = 3.6x + 800$, 解得: $x = 3000$.

\therefore 当 $x = 3000$ 时, 到两家林场购买的费用一样;

当 $y_{甲} < y_{乙}$ 时, $3.8x + 200 < 3.6x + 800$, $x < 3000$. $\therefore 2000 < x < 3000$ 时, 到甲林场购买合算;

当 $y_{甲} > y_{乙}$ 时, $3.8x + 200 > 3.6x + 800$, 解得: $x > 3000$. \therefore 当 $x > 3000$ 时, 到乙林场购买合算.

综上所述, 当 $0 \leq x \leq 1000$ 或 $x = 3000$ 时, 两家林场购买一样,

当 $1000 < x < 3000$ 时, 到甲林场购买合算;

当 $x > 3000$ 时, 到乙林场购买合算.

21. 【问题提出】若一个四边形的两组对边乘积之和等于它的两条对角线的乘积, 则称这个四边形为巧妙四边形

【初步思考】

(1) 写出你所知道的四边形是巧妙四边形的两种图形的名称: _____, _____;

(2) 小敏对巧妙四边形进行了研究, 发现圆的内接四边形一定是巧妙四边形

如图 1, 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形, 求证: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

①下面是小敏不完整证明过程, 请你帮她补充完整.

证明: 在 BD 上取点 M, 使 $\angle MCB = \angle DCA$,

$$\because \angle CAD = \angle CBD, \therefore \triangle ACD \sim \triangle CBM, \therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BM},$$

$$\therefore AD \cdot BC = AC \cdot BM,$$

同理可证 _____ \sim _____,

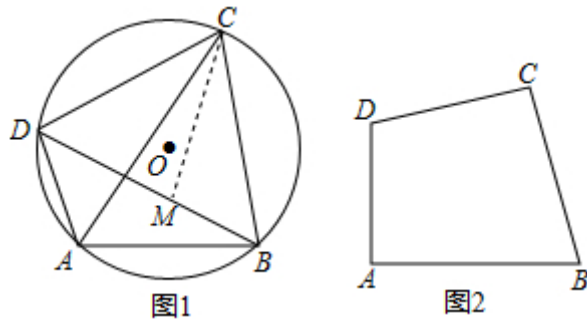
$$\therefore \frac{DC}{AC} = \frac{DM}{AB},$$

\therefore _____.

$$\therefore AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BM + AC \cdot DM = AC \cdot BD.$$

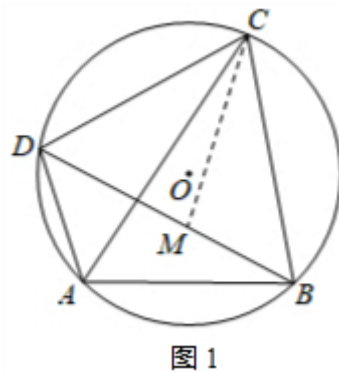
【推广运用】

②如图 2, 在四边形 ABCD 中, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$, $CD = 2$, 求 AC 的长.

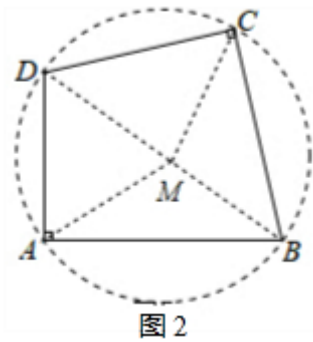


解析：(1)借助于勾股定理，可得出：正方形、矩形均为巧妙四边形；
 (2)①根据圆周角定理可得出 $\angle DAC = \angle DBC$ 、 $\angle CDB = \angle CAB$ ，结合 $\angle MCB = \angle DCA$ 、 $\angle DCM = \angle ACB$ 即可得出 $\triangle MCB \sim \triangle DCA$ 、 $\triangle DCM \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质可得出 $BC \cdot AD = AC \cdot BM$ 、 $AB \cdot CD = AC \cdot DM$ ，进而即可证出 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (DM + BM)$ ，即 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ ；
 ②连接BD.取BD中点M，连接AM、CM，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，利用勾股定理可求出BD、BC的长度，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得出 $AM = \frac{1}{2}BD$ 、 $CM = \frac{1}{2}BD$ ，进而可得出 $AM = CM = MB = MD$ ，即四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，套用①的结论即可求出AC的值.

答案：(1)常见四边形是巧妙四边形的有矩形和正方形，
 (2)①如图1，



\because 在 $\odot O$ 中， $\angle DAC$ 和 $\angle DBC$ 是 CD 所对的圆周角， $\therefore \angle DAC = \angle DBC$ ，
 又 $\because \angle MCB = \angle DCA$ ， $\therefore \triangle MCB \sim \triangle DCA$ 。 $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BM}{AD}$ ，即 $BC \cdot AD = AC \cdot BM$ 。
 \because 在 $\odot O$ 中， $\angle CDB$ 和 $\angle CAB$ 是 BC 所对的圆周角， $\therefore \angle CDB = \angle CAB$ 。
 又 $\because \angle DCM = \angle ACB$ ， $\therefore \triangle DCM \sim \triangle ACB$ 。 $\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{DM}{AB}$ ，即 $AB \cdot CD = AC \cdot DM$ 。
 $\therefore AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot DM + AC \cdot BM = AC \cdot (DM + BM)$ ，即 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ 。
 故答案为： $\triangle BCM$ 、 $\triangle DCM$ 、 $\triangle ACB$ 、 $AB \cdot CD = AC \cdot DM$ ；
 ②如图2所示.连接BD.取BD中点M，连接AM、CM，



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3$. 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{5}$.

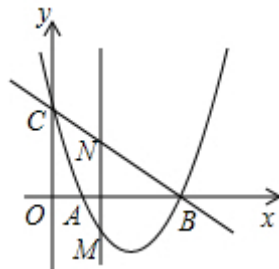
\because 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, M 是 BD 中点, $\therefore AM = \frac{1}{2} BD$.

\because 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, M 是 BD 中点, $\therefore CM = \frac{1}{2} BD$. $\therefore AM = CM = MB = MD$.

$\therefore A, B, C, D$ 四点在以点 M 为圆心, MA 为半径的圆上, 即四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形.

由(2)的结论可知 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. $\therefore AC = \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{6}}{3}$.

22. 如图, 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴, y 轴分别交于 B, C 两点, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 $A(1, 0), B, C$ 三点.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 M 是抛物线在 x 轴下方图形上的动点, 过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交直线 BC 于点 N , 求线段 MN 的最大值.

(3) 在(2)的条件下, 当 MN 取得最大值时, 在抛物线的对称轴 l 上是否存在点 P , 使 $\triangle PBN$ 是以 BN 为腰的等腰三角形? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 由点 A, B, C 的坐标利用待定系数法即可求出抛物线的解析式;

(2) 设出点 M 的坐标以及直线 BC 的解析式, 由点 B, C 的坐标利用待定系数法即可求出直线 BC 的解析式, 结合点 M 的坐标即可得出点 N 的坐标, 由此即可得出线段 MN 的长度关于 m 的函数关系式, 再结合点 M 在 x 轴下方可找出 m 的取值范围, 利用二次函数的性质即可解决最值问题;

(3) 假设存在, 设出点 P 的坐标为 $(2, n)$, 结合(2)的结论可求出点 N 的坐标, 结合点 N, B 的坐标利用两点间的距离公式求出线段 PN, PB, BN 的长度, 根据等腰三角形的性质分类讨论即可求出 n 值, 从而得出点 P 的坐标.

答案: (1) 由题意点 $A(1, 0), B(3, 0), C(0, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 中,

$$\text{得: } \begin{cases} a+b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=3, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a=1, \\ b=-4, \\ c=3, \end{cases} \therefore \text{抛物线的解析式为 } y=x^2-4x+3.$$

(2) 设点 M 的坐标为 (m, m^2-4m+3) , 设直线 BC 的解析式为 $y=kx+3$,
把点 B(3, 0) 代入 $y=kx+3$ 中,

得: $0=3k+3$, 解得: $k=-1$, \therefore 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$.

$\because MN \parallel y$ 轴, \therefore 点 N 的坐标为 $(m, -m+3)$.

\because 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$, \therefore 抛物线的对称轴为 $x=2$,

\therefore 点 $(1, 0)$ 在抛物线的图象上, $\therefore 1 < m < 3$.

$$\because \text{线段 } MN = -m+3 - (m^2-4m+3) = -m^2+3m = -\left(m-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

\therefore 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 线段 MN 取最大值, 最大值为 $\frac{9}{4}$.

(3) 假设存在. 设点 P 的坐标为 $(2, n)$.

当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 点 N 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

\therefore

$$PB = \sqrt{(2-3)^2 + (n-0)^2} = \sqrt{1+n^2}, \quad PN = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{3}{2}\right)^2}, \quad BN = \sqrt{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle PBN$ 为等腰三角形分三种情况:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } PB=BN \text{ 时, 即 } \sqrt{1+n^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得: } n = \pm \frac{\sqrt{14}}{2},$$

此时点 P 的坐标为 $(2, -\frac{\sqrt{14}}{2})$ 或 $(2, \frac{\sqrt{14}}{2})$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } PN=BN \text{ 时, 即 } \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得: } n = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

此时点 P 的坐标为 $(2, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$ 或 $(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

综上所述: 在抛物线的对称轴 1 上存在点 P, 使 $\triangle PBN$ 是等腰三角形, 点 P 的坐标为 $(2, -\frac{\sqrt{14}}{2})$

或 $(2, \frac{\sqrt{14}}{2})$ 或 $(2, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$ 或 $(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$.