

2016 年湖南省衡阳市中考真题数学

一、选择题(共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分)

1. -4 的相反数是()

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. -4

D. 4

解析：直接利用相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，进而得出答案.

-4 的相反数是： 4 .

答案：D.

2. 如果分式 $\frac{3}{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是()

A. 全体实数

B. $x \neq 1$

C. $x=1$

D. $x > 1$

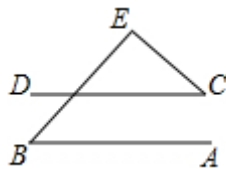
解析： \because 分式 $\frac{3}{x-1}$ 有意义，

$\therefore x-1 \neq 0$,

解得： $x \neq 1$.

答案：B.

3. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle B=50^\circ$ ， $\angle C=40^\circ$ ，则 $\angle E$ 等于()



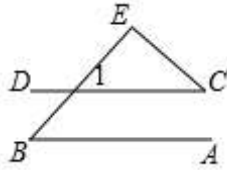
A. 70°

B. 80°

C. 90°

D. 100°

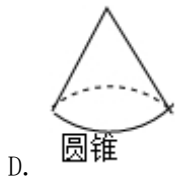
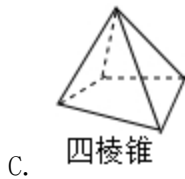
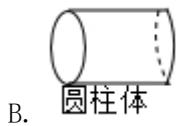
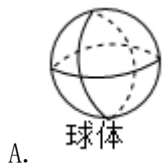
解析：如图



$\because AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle 1 = \angle B = 50^\circ$,
 $\because \angle C = 40^\circ$,
 $\therefore \angle E = 180^\circ - \angle B - \angle 1 = 90^\circ$.

答案：C.

4. 下列几何体中，哪一个几何体的三视图完全相同()



解析：根据各个几何体的三视图的图形易求解.

A、球体的三视图都是圆，故此选项正确；

B、圆柱的主视图和俯视图都是矩形，但左视图是一个圆形，故此选项错误；

C、四棱柱的主视图和左视图是一个三角形，俯视图是一个四边形，故此选项错误；

D、圆锥的主视图和左视图是相同的，都为一个三角形，但是俯视图是一个圆形，故此选项错误.

答案：A.

5. 下列各式中，计算正确的是()

A. $3x+5y=8xy$

B. $x^3 \cdot x^5 = x^8$

C. $x^6 \div x^3 = x^2$

D. $(-x^3)^3 = x^6$

解析：分别利用同底数幂的乘除法运算法则以及合并同类项法则、积的乘方运算法则分别计算得出答案.

A、 $3x+5y$ ，无法计算，故此选项错误；

B、 $x^3 \cdot x^5 = x^8$ ，故此选项正确；

C、 $x^6 \div x^3 = x^3$ ，故此选项错误；

D、 $(-x^3)^3 = -x^9$ ，故此选项错误.

答案：B.

6. 为缓解中低收入人群和新参加工作的大学生住房的需求，某市将新建保障住房 3600000 套，把 3600000 用科学记数法表示应是()

A. 0.36×10^7

B. 3.6×10^6

C. 3.6×10^7

D. 36×10^5

解析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数.

$3600000 = 3.6 \times 10^6$.

答案：B.

7. 要判断一个学生的数学考试成绩是否稳定，那么需要知道他最近连续几次数学考试成绩的()

A. 平均数

B. 中位数

C. 众数

D. 方差

解析：根据方差的意义：方差是反映一组数据波动大小，稳定程度的量；方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，反之也成立. 标准差是方差的平方根，也能反映数据的波动性；故要判断他的数学成绩是否稳定，那么需要知道他最近连续几次数学考试成绩的方差.

答案：D

8. 正多边形的一个内角是 150° ，则这个正多边形的边数为()

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

解析：一个正多边形的每个内角都相等，根据内角与外角互为邻补角，因而就可以求出外角的度数： $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

根据任何多边形的外角和都是 360 度，利用 360 除以外角的度数就可以求出外角和中外角的个数，即多边形的边数： $360^\circ \div 30^\circ = 12$.

则这个正多边形是正十二边形.

答案：C.

9. 随着居民经济收入的不断提高以及汽车业的快速发展,家用汽车已越来越多地进入普通家庭,抽样调查显示,截止 2015 年底某市汽车拥有量为 16.9 万辆. 已知 2013 年底该市汽车拥有量为 10 万辆, 设 2013 年底至 2015 年底该市汽车拥有量的平均增长率为 x , 根据题意列方程得()

- A. $10(1+x)^2=16.9$
- B. $10(1+2x)=16.9$
- C. $10(1-x)^2=16.9$
- D. $10(1-2x)=16.9$

解析: 设 2013 年底至 2015 年底该市汽车拥有量的平均增长率为 x , 根据题意, 可列方程: $10(1+x)^2=16.9$.

答案: A.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个相等的实根, 则 k 的值为()

- A. $k=-4$
- B. $k=4$
- C. $k \geq -4$
- D. $k \geq 4$

解析: \because 一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个相等的实根,
 $\therefore \Delta=4^2-4k=0$,

解得: $k=4$.

答案: B.

11. 下列命题是假命题的是()

- A. 经过两点有且只有一条直线
- B. 三角形的中位线平行且等于第三边的一半
- C. 平行四边形的对角线相等
- D. 圆的切线垂直于经过切点的半径

解析: 根据直线公理、三角形中位线定理、切线性质定理即可判断 A、B、D 正确.

A、经过两点有且只有一条直线, 正确.

B、三角形的中位线平行且等于第三边的一半, 正确.

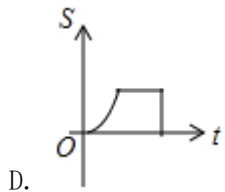
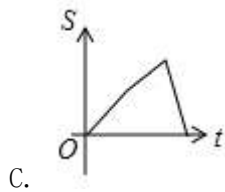
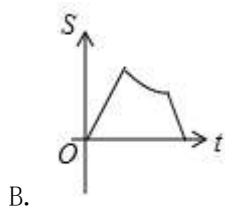
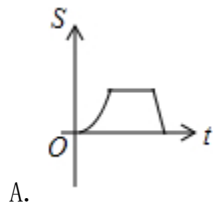
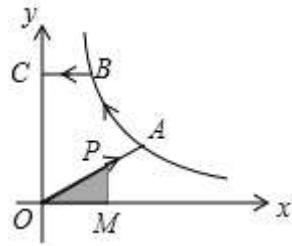
C、平行四边形的对角线相等, 错误. 矩形的对角线相等, 平行四边形的对角线不一定相等.

D、圆的切线垂直于经过切点的半径, 正确.

答案: C.

12. 如图, 已知 A, B 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 图象上的两点, $BC \parallel x$ 轴, 交 y 轴于

点 C, 动点 P 从坐标原点 O 出发, 沿 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ (图中“ \rightarrow ”所示路线) 匀速运动, 终点为 C, 过 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为 M. 设三角形 OMP 的面积为 S, P 点运动时间为 t, 则 S 关于 x 的函数图象大致为()



解析：设 $\angle AOM = \alpha$ ，点 P 运动的速度为 a ，

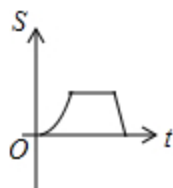
当点 P 从点 O 运动到点 A 的过程中，
$$S = \frac{(at \cos \alpha)(at \sin \alpha)}{2} = \frac{1}{2} a^2 \cos \alpha \sin \alpha t^2,$$

由于 α 及 a 均为常量，从而可知图象本段应为抛物线，且 S 随着 t 的增大而增大；

当点 P 从 A 运动到 B 时，由反比例函数性质可知 $\triangle OPM$ 的面积为 $\frac{1}{2}k$ ，保持不变，

故本段图象应为与横轴平行的线段；

当点 P 从 B 运动到 C 过程中，OM 的长在减少， $\triangle OPM$ 的高与在 B 点时相同，故本段图象应该为一段下降的线段。



$\therefore S$ 关于 x 的函数图象大致为

答案：A.

二、填空题(共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分)

13. 因式分解： $a^2+ab=$ _____.

解析：直接把公因式 a 提出来即可.

$$a^2+ab=a(a+b).$$

答案： $a(a+b)$.

14. 计算： $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=$ _____.

解析：由于两分式的分母相同，分子不同，故根据同分母的分式相加减的法则进行计算即可.

$$\text{原式}=\frac{x-1}{x-1}=1.$$

答案：1.

15. 点 P(x-2, x+3) 在第一象限，则 x 的取值范围是_____.

解析： \because 点 P(x-2, x+3) 在第一象限，

$$\therefore \begin{cases} x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases},$$

解得： $x>2$.

答案： $x>2$.

16. 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且面积之比为 25: 16，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为_____.

解析：根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出相似比，再根据相似三角形周长的比等于相似比求解.

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且面积之比为 25: 16，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 5: 4；

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为 5: 4.

答案：5:4.

17. 若圆锥底面圆的周长为 8π ，侧面展开图的圆心角为 90° ，则该圆锥的母线长为_____.

解析：设该圆锥的母线长为 l，

$$\text{根据题意得 } 8\pi = \frac{90 \square \pi \square l}{180}, \text{ 解得 } l=16,$$

即该圆锥的母线长为 16.

答案：16.

18. 如图所示，1 条直线将平面分成 2 个部分，2 条直线最多可将平面分成 4 个部分，3 条直线最多可将平面分成 7 个部分，4 条直线最多可将平面分成 11 个部分. 现有 n 条直线最多可

将平面分成 56 个部分，则 n 的值为_____.



解析：依题意有 $\frac{1}{2}n(n+1)+1=56$,

解得 $x_1=-11$ (不合题意舍去), $x_2=10$.

答：n 的值为 10.

答案：10.

三、解答题(共 8 小题，满分 66 分)

19. 先化简，再求值： $(a+b)(a-b)+(a+b)^2$ ，其中 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$.

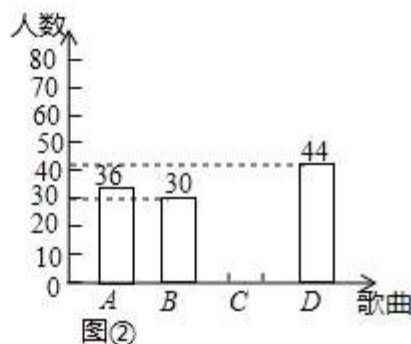
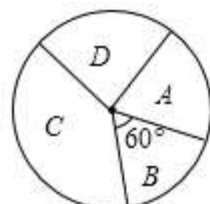
解析：原式利用平方差公式、完全平方公式展开后再合并同类项即可化简，将 a 、 b 的值代入求值即可.

答案：原式 $=a^2-b^2+a^2+2ab+b^2=2a^2+2ab$,

当 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ 时，

原式 $=2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) \times \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$.

20. 为庆祝建党 95 周年，某校团委计划在“七一”前夕举行“唱响红歌”班级歌咏比赛，要确定一首喜欢人数最多的歌曲为每班必唱歌曲. 为此提供代号为 A, B, C, D 四首备选曲目让学生选择，经过抽样调查，并将采集的数据绘制如下两幅不完整的统计图. 请根据图①，图②所提供的信息，解答下列问题：



(1) 本次抽样调查中，选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比为_____.

解析：(1) 根据条形统计图和扇形统计图可以求得选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百

分比.

由题意可得,

本次抽样调查中, 选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比为: $36 \div (30 \div 60^\circ \cdot 360^\circ) \times 100\% = 20\%$.

答案: (1) 20%.

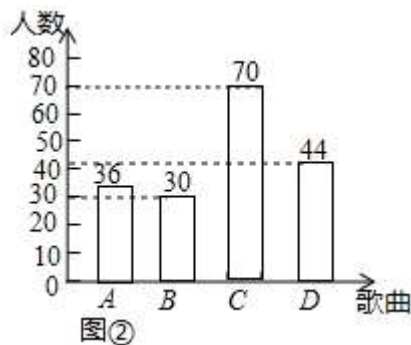
(2) 请将图②补充完整.

解析: (2) 根据条形统计图和扇形统计图可以求得选择 C 的人数, 从而可以将图②补充完整.

答案: (2) 由题意可得,

选择 C 的人数有: $30 \div \frac{60^\circ}{360^\circ} - 36 - 30 - 44 = 70$ (人).

故补全的图②如下图所示.



(3) 若该校共有 1530 名学生, 根据抽样调查的结果估计全校共有多少学生选择此必唱歌曲? (要有解答过程).

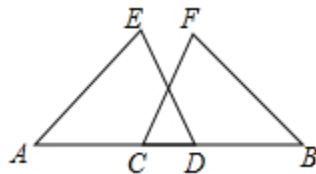
解析: (3) 根据条形统计图和扇形统计图可以估计全校选择此必唱歌曲的人数.

答案: (3) 由题意可得,

全校选择此必唱歌曲共有: $1530 \times \frac{70}{30 \div \frac{60}{360}} = 595$ (人).

即全校共有 595 名学生选择此必唱歌曲.

21. 如图, 点 A、C、D、B 四点共线, 且 $AC=BD$, $\angle A=\angle B$, $\angle ADE=\angle BCF$, 求证: $DE=CF$.



解析: 求出 $AD=BC$, 根据 ASA 推出 $\triangle AED \cong \triangle BFC$, 根据全等三角形的性质得出即可.

答案: $\because AC=BD$,

$\therefore AC+CD=BD+CD$,

$\therefore AD=BC$,

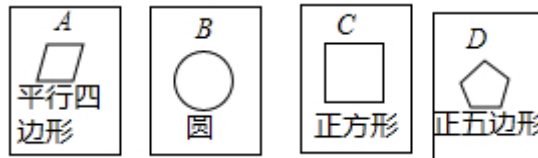
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ AD = BC \\ \angle ADE = \angle BCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFC$ (ASA),

$\therefore DE = CF$.

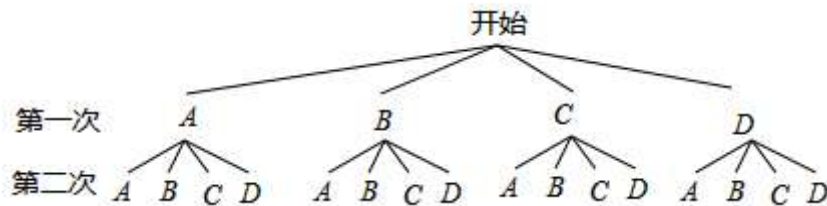
22. 在四张背面完全相同的纸牌 A、B、C、D，其中正面分别画有四个不同的几何图形(如图)，小华将这 4 张纸牌背面朝上洗匀后摸出一张，放回洗匀后再摸一张。



(1) 用树状图(或列表法)表示两次摸牌所有可能出现的结果(纸牌可用 A、B、C、D 表示)。

解析：(1) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果。

答案：(1) 画树状图得：



则共有 16 种等可能的结果。

(2) 求摸出两张纸牌牌面上所画几何图形，既是轴对称图形又是中心对称图形的概率。

解析：(2) 由既是轴对称图形又是中心对称图形的有 4 种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案。

答案：(2) \because 既是中心对称又是轴对称图形的只有 B、C，

\therefore 既是轴对称图形又是中心对称图形的有 4 种情况，

\therefore 既是轴对称图形又是中心对称图形的概率为： $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ 。

23. 为保障我国海外维和部队官兵的生活，现需通过 A 港口、B 港口分别运送 100 吨和 50 吨生活物资。已知该物资在甲仓库存有 80 吨，乙仓库存有 70 吨，若从甲、乙两仓库运送物资到港口的费用(元/吨)如表所示：

港口	运费（元/台）	
	甲库	乙库
A港	14	20
B港	10	8

(1) 设从甲仓库运送到 A 港口的物资为 x 吨，求总运费 y (元) 与 x (吨) 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围.

解析：(1) 根据题意表示出甲仓库和乙仓库分别运往 A、B 两港口的物资数，再由等量关系：总运费=甲仓库运往 A 港口的费用+甲仓库运往 B 港口的费用+乙仓库运往 A 港口的费用+乙仓库运往 B 港口的费用列式并化简；最后根据不等式组

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 80 - x \geq 0 \\ x - 30 \geq 0 \\ 100 - x \geq 0 \end{cases}$$

得出 x 的取值.

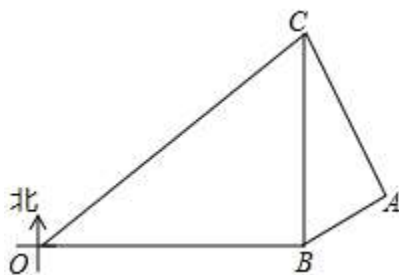
答案：(1) 设从甲仓库运 x 吨往 A 港口，则从甲仓库运往 B 港口的有 $(80-x)$ 吨，从乙仓库运往 A 港口的有 $(100-x)$ 吨，运往 B 港口的有 $50-(80-x)=(x-30)$ 吨，所以 $y=14x+20(100-x)+10(80-x)+8(x-30)=-8x+2560$ ， x 的取值范围是 $30 \leq x \leq 80$.

(2) 求出最低费用，并说明费用最低时的调配方案.

解析：(2) 因为所得的函数为一次函数，由增减性可知： y 随 x 增大而减少，则当 $x=80$ 时， y 最小，并求出最小值，写出运输方案.

答案：(2) 由(1)得 $y=-8x+2560$ 随 x 增大而减少，所以当 $x=80$ 时总运费最小，当 $x=80$ 时， $y=-8 \times 80+2560=1920$ ，此时方案为：把甲仓库的全部运往 A 港口，再从乙仓库运 20 吨往 A 港口，乙仓库的余下的全部运往 B 港口.

24. 在某次海上军事学习期间，我军为确保 $\triangle OBC$ 海域内的安全，特派遣三艘军舰分别在 O、B、C 处监控 $\triangle OBC$ 海域，在雷达显示图上，军舰 B 在军舰 O 的正东方向 80 海里处，军舰 C 在军舰 B 的正北方向 60 海里处，三艘军舰上装载有相同的探测雷达，雷达的有效探测范围是半径为 r 的圆形区域。(只考虑在海平面上的探测)



(1) 若三艘军舰要对 $\triangle OBC$ 海域进行无盲点监控, 则雷达的有效探测半径 r 至少为多少海里?

解析: (1) 求出 OC , 由题意 $r \geq \frac{1}{2} OC$, 由此即可解决问题.

答案: (1) 在 $RT\triangle OBC$ 中, $\because BO=80, BC=60, \angle OBC=90^\circ$,

$$\therefore OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100,$$

$$\therefore \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} \times 100 = 50$$

\therefore 雷达的有效探测半径 r 至少为 50 海里.

(2) 现有一艘敌舰 A 从东部接近 $\triangle OBC$ 海域, 在某一时刻军舰 B 测得 A 位于北偏东 60° 方向上, 同时军舰 C 测得 A 位于南偏东 30° 方向上, 求此时敌舰 A 离 $\triangle OBC$ 海域的最短距离为多少海里?

解析: (2) 作 $AM \perp BC$ 于 M , 求出 AM 即可解决问题.

答案: (2) 作 $AM \perp BC$ 于 M ,

$$\because \angle ACB=30^\circ, \angle CBA=60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB=90^\circ,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} BC = 30,$$

在 $RT\triangle ABM$ 中, $\because \angle AMB=90^\circ, AB=30, \angle BAM=30^\circ$,

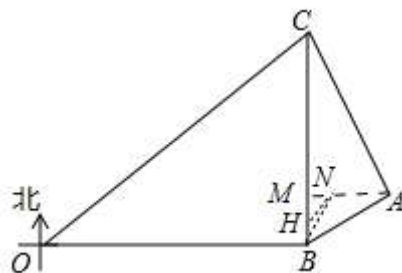
$$\therefore BM = \frac{1}{2} AB = 15, AM = \sqrt{3} BM = 15\sqrt{3}.$$

\therefore 此时敌舰 A 离 $\triangle OBC$ 海域的最短距离为 $15\sqrt{3}$ 海里.

(3) 若敌舰 A 沿最短距离的路线以 $20\sqrt{2}$ 海里/小时的速度靠近 $\triangle OBC$ 海域, 我军军舰 B 沿北偏东 15° 的方向行进拦截, 问 B 军舰速度至少为多少才能在此方向上拦截到敌舰 A ?

解析: (3) 假设 B 军舰在点 N 处拦截到敌舰. 在 BM 上取一点 H , 使得 $HB=HN$, 设 $MN=x$, 先列出方程求出 x , 再求出 BN, AN 利用不等式解决问题.

答案: (3) 假设 B 军舰在点 N 处拦截到敌舰. 在 BM 上取一点 H , 使得 $HB=HN$, 设 $MN=x$,



$$\begin{aligned} \because \angle HBN = \angle HNB = 15^\circ, \\ \therefore \angle MHN = \angle HBN + \angle HNB = 30^\circ, \end{aligned}$$

$$\therefore HN = HB = 2x, \quad MH = \sqrt{3}x,$$

$$\because BM = 15,$$

$$\therefore 15 = \sqrt{3}x + 2x,$$

$$x = 30 - 15\sqrt{3},$$

$$\therefore AN = 30\sqrt{3} - 30,$$

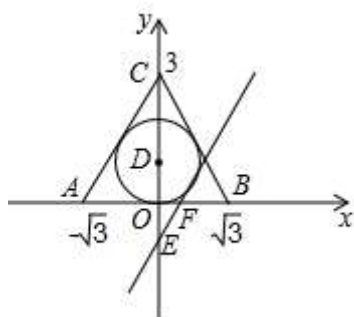
$$BN = \sqrt{MN^2 + BM^2} = 15(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad \text{设 B 军舰速度为 } a \text{ 海里/小时,}$$

$$\text{由题意 } \frac{15(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{a} \leq \frac{30\sqrt{3} - 30}{20\sqrt{2}},$$

$$\therefore a \geq 20.$$

\therefore B 军舰速度至少为 20 海里/小时.

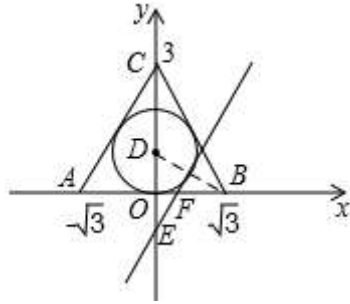
25. 在平面直角坐标中, $\triangle ABC$ 三个顶点坐标为 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $B(\sqrt{3}, 0)$ 、 $C(0, 3)$.



(1) 求 $\triangle ABC$ 内切圆 $\odot D$ 的半径.

解析: (1) 由 A、B、C 三点坐标可知 $\angle CBO = 60^\circ$, 又因为点 D 是 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 BD 平分 $\angle CBO$, 然后利用锐角三角函数即可求出 OD 的长度.

答案: (1) 连接 BD,



$$\therefore B(\sqrt{3}, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore OB = \sqrt{3}, OC = 3,$$

$$\therefore \tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle CBO = 60^\circ$$

\therefore 点 D 是 $\triangle ABC$ 的内心,

\therefore BD 平分 $\angle CBO$,

$$\therefore \angle DBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DBO = \frac{OD}{OB},$$

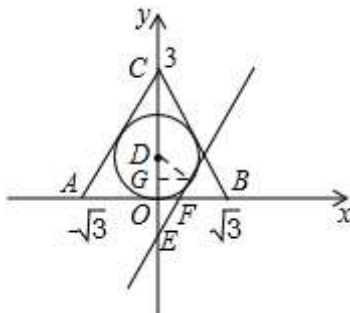
$$\therefore OD = 1,$$

$\therefore \triangle ABC$ 内切圆 $\odot D$ 的半径为 1.

(2) 过点 E(0, -1) 的直线与 $\odot D$ 相切于点 F (点 F 在第一象限), 求直线 EF 的解析式.

解析: (2) 根据题意可知, DF 为半径, 且 $\angle DFE = 90^\circ$, 过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G, 求得 FG 和 OG 的长度, 即可求出点 F 的坐标, 然后将 E 和 F 的坐标代入一次函数解析式中, 即可求出直线 EF 的解析式.

答案: (2) 连接 DF,



过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G,

$$\therefore E(0, -1)$$

$$\therefore OE = 1, DE = 2,$$

\therefore 直线 EF 与 $\odot D$ 相切,

$$\therefore \angle DFE = 90^\circ, DF = 1,$$

$$\therefore \sin \angle DEF = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore \angle DEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF = 60^\circ,$$

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中,

$$\angle DFG = 30^\circ,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2},$$

由勾股定理可求得: $GF = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\therefore F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

设直线 EF 的解析式为: $y = kx + b,$

$$\therefore \begin{cases} b = -1 \\ \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k + b \end{cases},$$

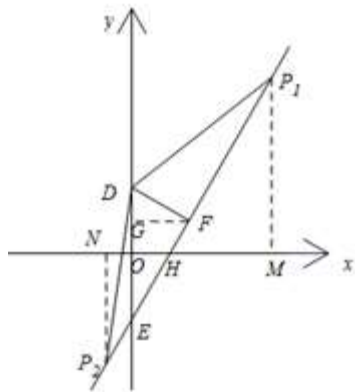
\therefore 直线 EF 的解析式为: $y = \sqrt{3}x - 1.$

(3) 以 (2) 为条件, P 为直线 EF 上一点, 以 P 为圆心, 以 $2\sqrt{7}$ 为半径作 $\odot P$. 若 $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 求此时圆心 P 的坐标.

解析: (3) $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 该点是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, 即为点 D , 所以 $DP = 2\sqrt{7}$, 又因为点 P 在直线 EF 上, 所以这样的点 P 共有 2 个, 且由勾股定理

可知 $PF = 3\sqrt{3}$.

答案: (3) 如图



∵ ⊙P 上存在一点到△ABC 三个顶点的距离相等，

∴ 该点必为△ABC 外接圆的圆心，

由(1)可知：△ABC 是等边三角形，

∴ △ABC 外接圆的圆心为点 D

$$\therefore DP = 2\sqrt{7},$$

设直线 EF 与 x 轴交于点 H，

$$\therefore \text{令 } y=0 \text{ 代入 } y = \sqrt{3}x - 1,$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore H\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right),$$

$$\therefore FH = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

当 P 在 x 轴上方时，

过点 P₁ 作 P₁M ⊥ x 轴于 M，

由勾股定理可求得：P₁F = 33，

$$\therefore P_1H = P_1F + FH = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

∵ ∠DEF = ∠HP₁M = 30°，

$$\therefore HM = \frac{1}{2}P_1H = \frac{5\sqrt{3}}{3}, P_1M = 5,$$

$$\therefore OM = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore P_1(2\sqrt{3}, 5),$$

当 P 在 x 轴下方时，

过点 P₂ 作 P₂N ⊥ x 轴于点 N，

由勾股定理可求得：P₂F = 3√3，

$$\therefore P_2H = P_2F - FH = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

∴ ∠DEF = 30°

∴ ∠OHE = 60°

$$\therefore \sin \angle OHE = \frac{P_2N}{P_2H},$$

$$\therefore P_2 N = 4,$$

$$\text{令 } y = -4 \text{ 代入 } y = \sqrt{3}x - 1,$$

$$\therefore x = -\sqrt{3},$$

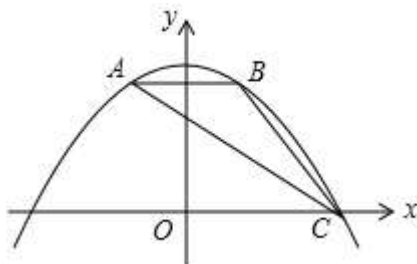
$$\therefore P_2(-\sqrt{3}, -4),$$

综上所述, 若 $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 此时圆心 P 的坐标为 $(2\sqrt{3},$

5) 或 $(-\sqrt{3}, -4)$.

26. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 与 y 轴相交于 $(0, \frac{9}{4})$, 点 A 坐标为

$(-1, 2)$, 点 B 是点 A 关于 y 轴的对称点, 点 C 在 x 轴的正半轴上.



(1) 求该抛物线的函数关系表达式.

解析: (1) 易得抛物线的顶点为 $(0, \frac{9}{4})$, 然后只需运用待定系数法, 就可求出抛物线的函

数关系表达式.

答案: (1) \because 点 B 是点 A 关于 y 轴的对称点,

\therefore 抛物线的对称轴为 y 轴,

\therefore 抛物线的顶点为 $(0, \frac{9}{4})$,

故抛物线的解析式可设为 $y = ax^2 + \frac{9}{4}$.

$\because A(-1, 2)$ 在抛物线 $y = ax^2 + \frac{9}{4}$ 上,

$$\therefore a + \frac{9}{4} = 2,$$

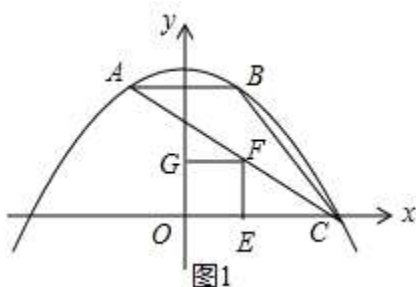
解得 $a = -\frac{1}{4}$,

\therefore 抛物线的函数关系表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$.

(2) 点 F 为线段 AC 上一动点, 过 F 作 $FE \perp x$ 轴, $FG \perp y$ 轴, 垂足分别为 E、G, 当四边形 OEFG 为正方形时, 求出 F 点的坐标.

解析: (2) ①当点 F 在第一象限时, 如图 1, 可求出点 C 的坐标, 直线 AC 的解析式, 设正方形 OEFG 的边长为 p, 则 $F(p, p)$, 代入直线 AC 的解析式, 就可求出点 F 的坐标; ②当点 F 在第二象限时, 同理可求出点 F 的坐标, 此时点 F 不在线段 AC 上, 故舍去.

答案: (2) ①当点 F 在第一象限时, 如图 1,



令 $y=0$ 得, $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} = 0$,

解得: $x_1=3$, $x_2=-3$,

\therefore 点 C 的坐标为 $(3, 0)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+n$,

$$\text{则有 } \begin{cases} -m+n=2 \\ 3m+n=0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=-\frac{1}{2} \\ n=\frac{3}{2} \end{cases},$$

\therefore 直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

设正方形 OEFG 的边长为 p, 则 $F(p, p)$.

\therefore 点 $F(p, p)$ 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} = p,$$

解得 $p=1$,

∴点 F 的坐标为 (1, 1).

②当点 F 在第二象限时,

同理可得: 点 F 的坐标为 (-3, 3),

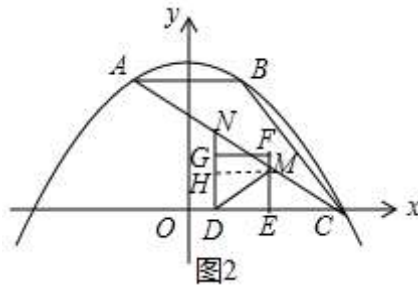
此时点 F 不在线段 AC 上, 故舍去.

综上所述: 点 F 的坐标为 (1, 1).

(3) 将 (2) 中的正方形 OEFG 沿 OC 向右平移, 记平移中的正方形 OEFG 为正方形 DEFG, 当点 E 和点 C 重合时停止运动, 设平移的距离为 t , 正方形的边 EF 与 AC 交于点 M, DG 所在的直线与 AC 交于点 N, 连接 DM, 是否存在这样的 t , 使 $\triangle DMN$ 是等腰三角形? 若存在, 求 t 的值; 若不存在请说明理由.

解析: (3) 过点 M 作 $MH \perp DN$ 于 H, 如图 2, 由题可得 $0 \leq t \leq 2$. 然后只需用 t 的式子表示 DN、 DM^2 、 MN^2 , 分三种情况 (① $DN=DM$, ② $ND=NM$, ③ $MN=MD$) 讨论就可解决问题.

答案: (3) 过点 M 作 $MH \perp DN$ 于 H, 如图 2,



则 $OD=t$, $OE=t+1$.

∵点 E 和点 C 重合时停止运动, ∴ $0 \leq t \leq 2$.

当 $x=t$ 时, $y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$, 则 $N(t, -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})$, $DN = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$.

当 $x=t+1$ 时, $y = -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}t + 1$, 则 $M(t+1, -\frac{1}{2}t + 1)$, $ME = -\frac{1}{2}t + 1$.

在 $Rt\triangle DEM$ 中, $DM^2 = 1^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)^2 = \frac{1}{4}t^2 - t + 2$.

在 $Rt\triangle NHM$ 中, $MH=1$, $NH = \left(-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}t + 1\right) = \frac{1}{2}$,

∴ $MN^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

① $DN=DM$ 时,

$\left(-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}t^2 - t + 2$,

解得 $t = \frac{1}{2}$;

②当 $ND=NM$ 时,

$$-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

解得 $t = 3 - \sqrt{5}$;

③当 $MN=MD$ 时,

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4}t^2 - t + 2,$$

解得 $t_1=1$, $t_2=3$.

$\because 0 \leq t \leq 2$, $\therefore t=1$.

综上所述: 当 $\triangle DMN$ 是等腰三角形时, t 的值为 $\frac{1}{2}$, $3 - \sqrt{5}$ 或 1 .