2017年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)数学

一、填空题(本大题共12题，满分54分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分)

1.已知集合A={1，2，3，4}，集合B={3，4，5}，则A∩B=_____.
解析：利用交集定义直接求解.
∵集合A={1，2，3，4}，集合B={3，4，5}，
∴A∩B={3，4}.
答案：{3，4}.

2.若排列数$P_6^m=6\times5\times4$，则m=_____.

解析：利用排列数公式直接求解.

∵排列数$P_6^m=6\times5\times4$，

∴由排列数公式得$P_6^3=6\times5\times4$，

∴m=3.
答案：3.

3.不等式$\frac{x-1}{x}>1$的解集为_____.
解析：根据分式不等式的解法求出不等式的解集即可.
由$\frac{x-1}{x}>1$得：
$1-\frac{1}{x}>1\Rightarrow\frac{1}{x}<0\Rightarrow x<0$，
故不等式的解集为：(-∞，0).
答案：(-∞，0).

4.已知球的体积为36π，则该球主视图的面积等于_____.
解析：球的体积为36π，
设球的半径为R，可得$\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$，
可得R=3，
该球主视图为半径为3的圆，
可得面积为$\pi R^2=9\pi$.
答案：9π.

5.已知复数z满足$z+\frac{3}{z}=0$，则|z|=_____.

解析：由$z+\frac{3}{z}=0$，

得 $z^2=-3$，
设 $z=a+bi$(a，b∈R)，
由 $z^2=-3$，得 $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=-3$，

即 $\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=0 \\ b=\pm\sqrt{3} \end{cases}$.

∴$z=\pm\sqrt{3}i$.

则 $|z|=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$.

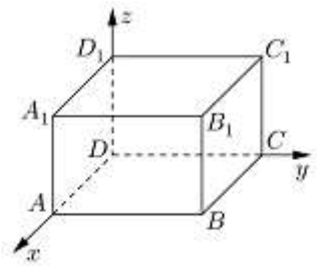
6.设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (b＞0)的焦点为 F_1、F_2，P 为该双曲线上的一点，若 $|PF_1|=5$，则 $|PF_2|=$_____.

解析：根据题意，双曲线的方程为：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

其中 $a=\sqrt{9}=3$，

则有 $||PF_1|-|PF_2||=6$，
又由 $|PF_1|=5$，
解可得 $|PF_2|=11$ 或-1(舍)，
故 $|PF_2|=11$.
答案：11.

7.如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为(4，3，2)，则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是_____.



解析：如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，
过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，

∵$\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为(4，3，2)，

∴$A(4，0，0)$，$C_1(0，3，2)$，

∴$\overrightarrow{AC_1}=(-4，3，2)$.

答案：(-4，3，2).

8.定义在(0，+∞)上的函数 y=f(x)的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，若$g\left(x\right)=\begin{cases}3^{x}-1, & x\le 0\\ f\left(x\right), & x>0\end{cases}$为奇函数，则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为_____.

解析：若若$g\left(x\right)=\begin{cases}3^{x}-1, & x\le 0\\ f\left(x\right), & x>0\end{cases}$为奇函数，

可得当 x＞0 时，-x＜0，即有 $g(-x)=3^{-x}-1$，

由 g(x)为奇函数，可得 g(-x)=-g(x)，

则 $g(x)=f(x)=1-3^{-x}$，x＞0，

由定义在(0，+∞)上的函数 y=f(x)的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，

且 f-1(x)=2，

可由 $f(2)=1-3^{-2}=\dfrac{8}{9}$，

可得 $f^{-1}(x)=2$ 的解为 $x=\dfrac{8}{9}$.

答案：$\dfrac{8}{9}$.

9.已知四个函数：①y=-x，②$y=-\dfrac{1}{x}$，③$y=x^{3}$，④$y=x^{\frac{1}{2}}$，从中任选 2 个，则事件“所选 2 个函数的图象有且仅有一个公共点”的概率为_____.

解析：给出四个函数：①y=-x，②$y=-\dfrac{1}{x}$，③$y=x^{3}$，④$y=x^{\frac{1}{2}}$，

从四个函数中任选 2 个，基本事件总数$n=C_{4}^{2}=6$，

事件 A：“所选 2 个函数的图象有且只有一个公共点”包含的基本事件有：①④，③④，共 2 个，

∴事件 A：“所选 2 个函数的图象有且只有一个公共点”的概率为$P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

答案：$\dfrac{1}{3}$.

10.已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，其中 $a_n=n^2$，n∈N*，$\{b_n\}$的项是互不相等的正整数，若对于任意 n∈N*，$\{b_n\}$的第 a_n 项等于$\{a_n\}$的第 b_n 项，则$\dfrac{lg\left(b_1b_4b_9b_{16}\right)}{lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)}=$_____.

解析：∵a_n=n2，n∈N*，若对于一切 n∈N*，$\{b_n\}$中的第 a_n 项恒等于$\{a_n\}$中的第 b_n 项，

$\therefore b_{a_n}=a_{b_n}=\left(b_n\right)^2$.

∴$b_1=a_1=1$，$(b_2)^2=b_4$，$(b_3)^2=b_9$，$(b_4)^2=b_{16}$.

∴$b_1b_4b_9b_{16}=(b_1b_2b_3b_4)^2$.

∴$\dfrac{lg\left(b_1b_4b_9b_{16}\right)}{lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)}=2$.

答案：2.

11. 设 a_1、$a_2\in R$，且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin\left(2\alpha_2\right)}=2$，则$|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$的最小值等于_____.

解析：根据三角函数的性质，可知 $\sin\alpha_1$，$\sin2\alpha_2$的范围在[-1，1]，

∵$\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin\left(2\alpha_2\right)}=2$，

∴$\sin\alpha_1=-1$，$\sin2\alpha_2=-1$.

则：$\alpha_1=-\dfrac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$k_1\in Z$.

$2\alpha_2=-\dfrac{\pi}{2}+2k_2\pi$，即 $\alpha_2=-\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi$，$k_2\in Z$.

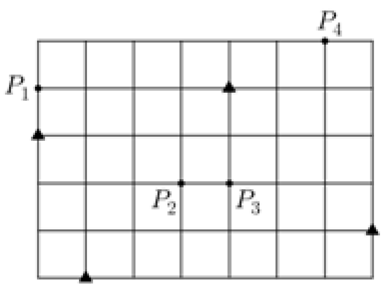
那么：$\alpha_1+\alpha_2=(2k_1+k_2)\pi-\dfrac{3\pi}{4}$

，k_1、$k_2\in Z$.

∴$|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|=|10\pi+\dfrac{3\pi}{4}-(2k_1+k_2)\pi|$的最小值为$\dfrac{\pi}{4}$.

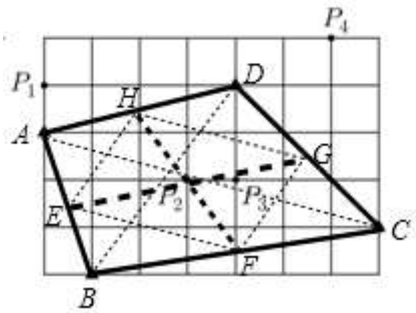
答案：$\dfrac{\pi}{4}$.

12. 如图，用 35 个单位正方形拼成一个矩形，点 P_1、P_2、P_3、P_4以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处，设集合 $\Omega=\{P_1，P_2，P_3，P_4\}$，点 $P\in\Omega$，过 P 作直线 l_P，使得不在 l_P 上的“▲”的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$和 $D_2(l_P)$分别表示 l_P 一侧和另一侧的“▲”的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$，则Ω中所有这样的 P 为_____.



解析：设记为“▲”的四个点为 A，B，C，D，线段 AB，BC，CD，DA 的中点分别为 E，F，G，H，

易知 EFGH 为平行四边形，如图所示：



四边形ABCD两组对边中点的连线交于点P_2，
即符合条件的直线lP一定经过点P_2，
因此：经过点P_2的直线有无数条；
同时经过点P_1和P_2的直线仅有1条，
同时经过点P_3和P_2的直线仅有1条，
同时经过点P_4和P_2的直线仅有1条，
所以符合条件的点为P_1、P_3、P_4.
答案：P_1、P_3、P_4.

二、选择题(本大题共4题，每题5分，共20分)

13.关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}x+5y=0\\2x+3y=4\end{cases}$的系数行列式D为(　)

A.$\begin{vmatrix}0 & 5\\4 & 3\end{vmatrix}$

B.$\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 4\end{vmatrix}$

C.$\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 3\end{vmatrix}$

D.$\begin{vmatrix}6 & 0\\5 & 4\end{vmatrix}$

解析：利用线性方程组的系数行列式的定义直接求解.

关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}x+5y=0\\2x+3y=4\end{cases}$的系数行列式：D=$\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 3\end{vmatrix}$.

答案：C.

14.在数列$\{a_n\}$中，$a_n=(-\frac{1}{2})^n$，n∈N*，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(　)

A.等于$-\frac{1}{2}$

B. 等于 0

C. 等于 $\frac{1}{2}$

D. 不存在

解析：数列{a_n}中，$a_n=(-\frac{1}{2})^n$，n∈N*，

则根据极限的定义，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

答案：B.

15. 已知 a、b、c 为实常数，数列{x_n}的通项 $x_n=an^2+bn+c$，n∈N*，则“存在 k∈N*，使得 x_{100+k}、x_{200+k}、x_{300+k}成等差数列”的一个必要条件是（　）

A. a≥0

B. b≤0

C. c=0

D. a-2b+c=0

解析：存在 k∈N*，使得 x_{100+k}、x_{200+k}、x_{300+k}成等差数列，可得：$2[a(200+k)^2+b(200+k)+c]=a(100+k)^2+b(100+k)+c+a(300+k)^2+b(300+k)+c$，化为：a=0.

∴使得 x_{100+k}、x_{200+k}、x_{300+k}成等差数列的必要条件是 a≥0.

答案：A.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 和 C_2：$x^2+\frac{y^2}{9}=1$. P 为 C_1 上的动点，Q 为 C_2 上的动点，w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记Ω={(P，Q)|P 在 C_1 上，Q 在 C_2 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$=w}，则Ω中元素个数为（　）

A. 2 个

B. 4 个

C. 8 个

D. 无穷个

解析：设出 P(6cosα，2sinα)，Q(cosβ，3sinβ)，0≤α\β<2π，由向量数量积的坐标表示和两角差的余弦公式和余弦函数的值域，可得最大值及取得的条件，即可判断所求元素的个数.

椭圆 C_1：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 和 C_2：$x^2+\frac{y^2}{9}=1$，P 为 C_1 上的动点，Q 为 C_2 上的动点，

可设 P(6cosα，2sinα)，Q(cosβ，3sinβ)，0≤α\β<2π，

则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$=6cosαcosβ+6sinαsinβ=6cos(α－β)，

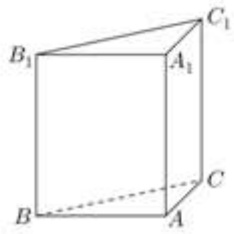
当α－β=2kπ，k∈Z 时，w 取得最大值 6，

则Ω={(P，Q)|P 在 C_1 上，Q 在 C_2 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$=w}中的元素有无穷多对.

答案：D.

三、解答题(本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分)

17.如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形，两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2，侧棱 AA_1 的长为 5.

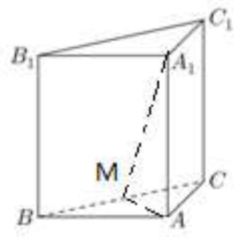


(1)求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.

解析：(1)三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=S_{\triangle ABC}\times AA_1=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times AA_1$，由此能求出结果.

答案：(1)∵直三棱柱 ABC-A1B1C1 的底面为直角三角形，
两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2，侧棱 AA1 的长为 5.
∴三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积：
$V=S_{\triangle ABC}\times AA_1$
$=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times AA_1$
$=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 5=20$.

(2)设 M 是 BC 中点，求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.
解析：(2)连结 AM，$\angle A_1MA$ 是直线 A_1M 与平面 ABC 所成角，由此能求出直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.
答案：(2)连结 AM，



∵直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形，
两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2，侧棱 AA_1 的长为 5，M 是 BC 中点，
∴$AA_1\perp$底面 ABC，$AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{16+4}=\sqrt{5}$，
∴$\angle A_1MA$ 是直线 A_1M 与平面 ABC 所成角，

$$\tan\angle A_1MA=\frac{AA_1}{AM}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},$$

∴直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小为 $\arctan\sqrt{5}$.

18.已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+\frac{1}{2}$，$x\in(0，\pi)$.

(1)求 $f(x)$的单调递增区间.

解析：(1)由二倍角的余弦公式和余弦函数的递增区间，解不等式可得所求增区间.

答案：(1)函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+\frac{1}{2}=\cos2x+\frac{1}{2}$，$x\in(0，\pi)$，

由 $2k\pi-\pi\leq2x\leq2k\pi$，解得 $k\pi-\frac{1}{2}\pi\leq x\leq k\pi$，$k\in Z$，

$k=1$ 时，$\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\pi$，

可得 $f(x)$的增区间为$[\frac{\pi}{2}，\pi)$.

(2)设△ABC 为锐角三角形，角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对边 $b=5$，若 $f(A)=0$，求△ABC 的面积.

解析：(2)由 $f(A)=0$，解得 A，再由余弦定理解方程可得 c，再由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

答案：(2)设△ABC 为锐角三角形，

角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对边 $b=5$，

若 $f(A)=0$，即有 $\cos2A+\frac{1}{2}=0$，

解得 $2A=\frac{2}{3}\pi$，即 $A=\frac{1}{3}\pi$，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

化为 $c^2-5c+6=0$，

解得 $c=2$ 或 3，

若 $c=2$，则$\cos B=\frac{19+4-25}{2\times\sqrt{19}\times2}<0$，

即有 B 为钝角，$c=2$ 不成立，

则 $c=3$，

△ABC 的面积为$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

19.根据预测，某地第 $n(n\in N*)$个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n(单位：辆)，其中$a_n=\begin{cases}5n^4+15，1\leq n\leq3\\-10n+470，n\geq4\end{cases}$，$b_n=n+5$，第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.

(1)求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量.
解析：(1)计算出$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 4 项和的差即可得出答案.
答案：(1)前 4 个月共投放单车为 $a_1+a_2+a_3+a_4=20+95+420+430=975$，
前 4 个月共损失单车为 $b_1+b_2+b_3+b_4=6+7+8+9=30$，
∴该地区第 4 个月底的共享单车的保有量为 975-30=945.

(2)已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$(单位：辆).设在某月底，共享单车保有量达到最大，问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量？
解析：(2)令 $a_n\geqslant b_n$得出 $n\leqslant 42$，再计算第 42 个月底的保有量和容纳量即可得出结论.
答案：(2)令 $a_n\geqslant b_n$，显然 $n\leqslant 3$ 时恒成立，
当 $n\geqslant 4$ 时，有$-10n+470\geqslant n+5$，解得 $n\leqslant \frac{465}{11}$，
∴第 42 个月底，保有量达到最大.
当 $n\geqslant 4$，$\{a_n\}$为公差为-10 等差数列，而$\{b_n\}$为等差为 1 的等比数列，
∴到第 42 个月底，单车保有量为
$\frac{a_4+a_{42}}{2}\times 39+535-\frac{b_1+b_{42}}{2}\times 42=\frac{430+50}{2}\times 39+535-\frac{6+47}{2}\times 42=8782$.
$S_{42}=-4\times 16+8800=8736$.
∵8782＞8736，
∴第 42 个月底单车保有量超过了容纳量.

20.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆Γ：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，A 为Γ的上顶点，P 为Γ上异于上、下顶点的动点，M 为 x 正半轴上的动点.

(1)若 P 在第一象限，且$|OP|=\sqrt{2}$，求 P 的坐标.

解析：(1)设 P(x，y)(x＞0，y＞0)，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}$，能求出 P 点坐标.

答案：(1)设 P(x，y)(x＞0，y＞0)，

∵椭圆Γ：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，A 为Γ的上顶点，

P 为Γ上异于上、下顶点的动点，

P 在第一象限，且$|OP|=\sqrt{2}$，

∴联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}$，

解得 P($\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$).

(2)设 P($\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{3}{5}$)，若以 A、P、M 为顶点的三角形是直角三角形，求 M 的横坐标.

解析：(2)设 M(x_0，0)，A(0，1)，P($\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{3}{5}$)，由∠P=90°，求出 $x_0=\dfrac{29}{20}$；由∠M=90°，求出 x_0=1 或 $x_0=\dfrac{3}{5}$；由∠A=90°，则 M 点在 x 轴负半轴，不合题意. 由此能求出点 M 的横坐标.

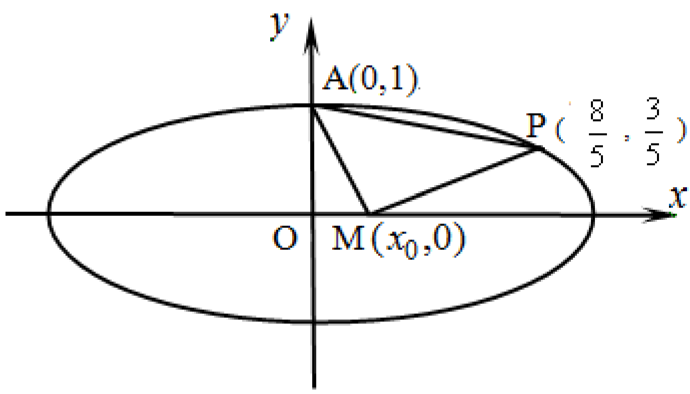
答案：(2)设 M(x_0，0)，A(0，1)，

P($\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{3}{5}$)，

若∠P=90°，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}$，即 $\left(x_0-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{8}{5},\dfrac{2}{5}\right)=0$，

$\therefore\left(-\dfrac{8}{5}\right)x_0+\dfrac{64}{25}-\dfrac{6}{25}=0$，解得 $x_0=\dfrac{29}{20}$.

如图，若∠M=90°，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，即 $(-x_0,1)\cdot\left(\dfrac{8}{5}-x_0,\dfrac{3}{5}\right)=0$，



$\therefore x_0^{\ 2}-\dfrac{8}{5}x_0+\dfrac{3}{5}=0$，解得 x_0=1 或 $x_0=\dfrac{3}{5}$，

若∠A=90°，则 M 点在 x 轴负半轴，不合题意.

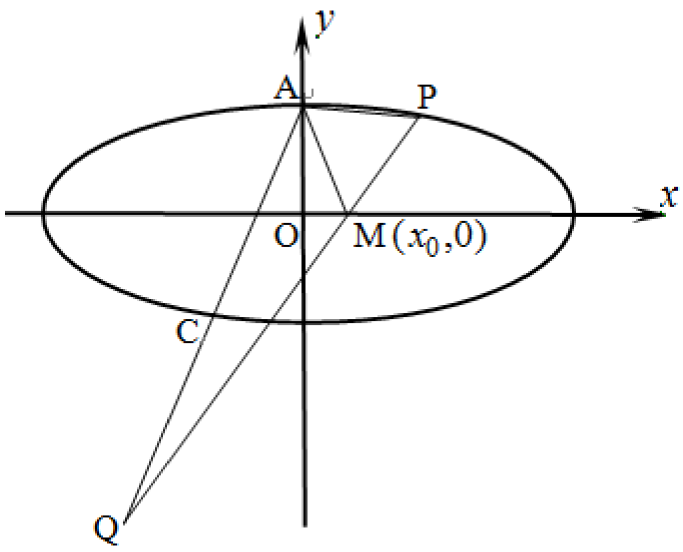
∴点 M 的横坐标为 $\dfrac{29}{20}$，或 1，或 $\dfrac{3}{5}$.

(3)若|MA|=|MP|，直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C，且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$，求直线 AQ 的方程.

解析：(3)设 C(2cosα，sinα)，推导出 Q(4cosα，2sinα-1)，设 P(2cosβ，sinβ)，M(x_0，0)推导出 $x_0=\dfrac{3}{4}$cosβ，从而 4cosα-2cosβ=-5cosβ，且 2sinα-sinβ-1=-4sinβ，cosβ

$=-\frac{4}{3}\cos\alpha$，且 $\sin\alpha=\frac{1}{3}(1-2\sin\alpha)$，由此能求出直线 AQ.

答案：(3)设 C(2cosα，sinα)，



$\because \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$，A(0，1)，

∴Q(4cosα，2sinα-1)，

又设 P(2cosβ，sinβ)，M(x_0，0)，

∵|MA|=|MP|，∴$x_0^2+1=(2\cos\beta-x_0)^2+(\sin\beta)^2$，

整理得：$x_0=\frac{3}{4}\cos\beta$，

$\because \overrightarrow{PQ}$=(4cosα-2cosβ，2sinα-sinβ-1)，$\overrightarrow{PM}=(-\frac{5}{4}\cos\beta$，-sinβ)，$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$，

∴4cosα-2cosβ=-5cosβ，

且 2sinα-sinβ-1=-4sinβ，

∴$\cos\beta=-\frac{4}{3}\cos\alpha$，且 $\sin\alpha=\frac{1}{3}(1-2\sin\alpha)$，

以上两式平方相加，整理得 $3(\sin\alpha)^2+\sin\alpha-2=0$，∴$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，或 sinα=-1(舍去)，

此时，直线 AC 的斜率 $k_{AC}=-\frac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{10}$（负值已舍去)，如图.

∴直线 AQ 为 $y=\frac{\sqrt{5}}{10}x+1$.

21.设定义在 R 上的函数 f(x)满足：对于任意的 x_1、x_2∈R，当 $x_1<x_2$时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

(1)若 $f(x)=ax^3+1$，求 a 的取值范围.

解析：(1)直接由 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant 0$ 求得 a 的取值范围.

答案：由 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，得 $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1^3-x_2^3)\leqslant 0$，

∵$x_1<x_2$，∴$x_1^3-x_2^3<0$，得 $a\geq 0$.
故 a 的范围是$[0,+\infty)$.

(2)若 f(x)是周期函数，证明：f(x)是常值函数.
解析：(2)若 f(x)是周期函数，记其周期为 T_k，任取 $x_0\in R$，则有 $f(x_0)=f(x_0+T_k)$，证明对任意 $x\in[x_0,x_0+T_k]$，$f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0+T_k)$，可得 $f(x_0)=f(x_0+nT_k)$，$n\in Z$，再由$\cdots\cup[x_0-3T_k,x_0-2T_k]\cup[x_0-2T_k,x_0-T_k]\cup[x_0-T_k,x_0]\cup[x_0,x_0+T_k]\cup[x_0+T_k,x_0+2T_k]\cup\cdots=R$，可得对任意 $x\in R$，$f(x)=f(x_0)=C$，为常数.
答案：(2)若 f(x)是周期函数，记其周期为 T_k，任取 $x_0\in R$，则有
$f(x_0)=f(x_0+T_k)$，
由题意，对任意 $x\in[x_0,x_0+T_k]$，$f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0+T_k)$，
∴$f(x0)=f(x)=f(x_0+T_k)$.
又∵$f(x_0)=f(x_0+nT_k)$，$n\in Z$，并且
$\cdots\cup[x_0-3T_k,x_0-2T_k]\cup[x_0-2T_k,x_0-T_k]\cup[x_0-T_k,x_0]\cup[x_0,x_0+T_k]\cup[x_0+T_k,x_0+2T_k]\cup\cdots=R$，
∴对任意 $x\in R$，$f(x)=f(x_0)=C$，为常数.

(3)设 f(x)恒大于零，g(x)是定义在 R 上的、恒大于零的周期函数，M 是 g(x)的最大值.函数 h(x)=f(x)g(x).证明："h(x)是周期函数"的充要条件是"f(x)是常值函数".
解析：(3)分充分性及必要性证明.类似(2)证明充分性；必要性先证明 f(x)符号不变，然后分类证明.
答案：(3)充分性：若 f(x)是常值函数，记 $f(x)=c_1$，设 g(x)的一个周期为 T_g，则
$h(x)=c_1\cdot g(x)$，则对任意 $x_0\in R$，
$h(x_0+T_g)=c_1\cdot g(x_0+T_g)=c_1\cdot g(x_0)=h(x_0)$，
故 h(x)是周期函数.
必要性：若 h(x)是周期函数，记其一个周期为 T_h，首先证明 f(x)符号不变.
①设集合 $A=\{x|g(x)=m\}$，若存在 $x_0\in R$，使得 $f(x_0)=0$，则
$h(x_0)=0$，且对任意 $k\in Z$，有 $h(x_0+kT_h)=0$，
∵$g(x)>0$，∴$f(x_0+kT_h)=0$，即对任意 $x\in[x_0+kT_h,x_0+(k+1)T_h]$，$k\in Z$，$f(x)=0$ 恒成立，
∴$f(x)=0$ 是常值函数；
②若存在 x_1，x_2，使得 $f(x_1)>0$，且 $f(x_2)<0$，则由题意可知，
$x_1>x_2$，那么必然存在正整数 N_1，使得 $x_2+N_1T_k>x_1$，
∴$f(x_2+N_1T_k)>f(x_1)>0$，且 $h(x_2+N_1T_k)=h(x_2)$.
又 $h(x_2)=g(x_2)f(x_2)<0$，而
$h(x_2+N_1T_k)=g(x_2+N_1T_k)f(x_2+N_1T_k)>0\neq h(x_2)$，矛盾.
综上，$f(x)=0$ 或 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 恒成立.
1°、若 $f(x)>0$ 恒成立，
任取 $x_0\in A$，则必存在 $N_2\in N$，使得 $x_0-N_2T_h\leq x_0-T_g$，
即$[x_0-T_g,x_0]\subset[x_0-N_2T_h,x_0]$，
∵$\cdots\cup[x_0-3T_k,x_0-2T_k]\cup[x_0-2T_k,x_0-T_k]\cup[x_0-T_k,x_0]\cup[x_0,x_0+T_k]\cup[x_0+T_k,x_0+2T_k]\cup\cdots=R$，
∴$\cdots\cup[x_0-2N_2T_h,x_0-N_2T_h]\cup[x_0-N_2T_h,x_0]\cup[x_0,x_0+N_2T_h]\cup[x_0+N_2T_h,x_0+2N_2T_h]\cup\cdots=R$.
$h(x_0)=g(x_0)\cdot f(x_0)=h(x_0-N_2T_h)=g(x_0-N_2T_h)\cdot f(x_0-N_2T_h)$，
∵$g(x_0)=M\geq g(x_0-N_2T_h)>0$，$f(x_0)\geq f(x_0-N_2T_h)>0$.
因此若 $h(x_0)=h(x_0-N_2T_h)$，必有 $g(x_0)=M=g(x_0-N_2T_h)$，且 $f(x_0)=f(x_0-N_2T_h)=c$.
而由(2)证明可知，对任意 $x\in R$，$f(x)=f(x_0)=C$，为常数.

2°、若 $f(x)<0$ 恒成立，

任取 $x_0\in A$，则必存在 $N_3\in N$，使得 $x_0+N_3T_h\geqslant x_0+T_g$.

即 $[x_0, x_0+T_g]\subset[x_0, x_0+N_3T_g]$，

∵ $\cdots\cup[x_0-3T_k, x_0-2T_k]\cup[x_0-2T_k, x_0-T_k]\cup[x_0-T_k, x_0]\cup[x_0, x_0+T_k]\cup[x_0+T_k, x_0+2T_k]\cup\cdots=R$，

∴ $\cdots\cup[x_0-2N_3T_h, x_0-N_3T_h]\cup[x_0-N_3T_h, x_0]\cup[x_0, x_0+N_3T_h]\cup[x_0+N_3T_h, x_0+2N_3T_h]\cup\cdots=R$.

$h(x_0)=g(x_0)\cdot f(x_0)=h(x_0+N_3T_h)=g(x_0+N_3T_h)\cdot f(x_0+N_3T_h)$.

∵ $g(x_0)=M\geqslant g(x_0+N_3T_h)>0$，$f(x_0)\leqslant f(x_0+N_3T_h)<0$.

因此若 $h(x_0)=h(x_0+N_3T_h)$，

必有 $g(x_0)=M=g(x_0+N_3T_h)$，且 $f(x_0)=f(x_0+N_3T_h)=c$，

而由(2)证明可知，对任意 $x\in R$，$f(x)=f(x_0)=C$，为常数.

综上，必要性得证.