

2017年青海省西宁市高考二模试卷数学文

一、选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $\frac{5i}{1-2i} = (\quad)$

- A. $2-i$
- B. $1-2i$
- C. $-2+i$
- D. $-1+2i$

解析： $\frac{5i}{1-2i} = \frac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -2+i.$

答案：C

2. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{a, a^2\}$ 则使 $M \cap N = N$ 成立的 a 的值是 (\quad)

- A. 1
- B. 0
- C. -1
- D. 1 或 -1

解析： $\because M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{a, a^2\}$, $M \cap N = N$, $\therefore \begin{cases} a = -1, \\ a^2 = 1, \end{cases}$ 解得 $a = -1$.

答案：C

3. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $|\vec{b}|$ 为 (\quad)

- A. $2\sqrt{5}$
- B. 5
- C. $3\sqrt{5}$
- D. 1

解析： $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, 平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, m)$,

$\therefore -2 \times 2 - m = 0$, 解得 $m = -4$. $\therefore \vec{b} = (-2, -4)$, $\therefore |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}.$

答案：A

4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$

- A. $\frac{24}{25}$
 B. $\frac{7}{25}$
 C. $\pm \frac{24}{25}$
 D. $\pm \frac{7}{25}$

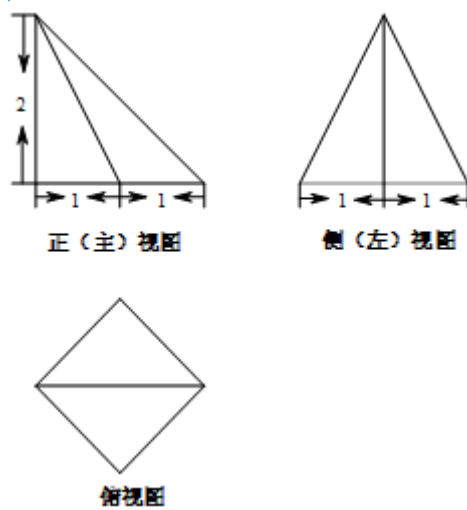
解析：由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{4}{5}$,

可得： $\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ，则 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ，

两边平方，得 $1+\sin 2\alpha=\frac{32}{25}$ ，则 $\sin 2\alpha=\frac{7}{25}$ 。

答案：B

5. 某四棱锥的三视图如图所示，其中正(主)视图是等腰直角三角形，侧(左)视图是等腰三角形，俯视图是正方形，则该四棱锥的体积是()



- A. 8
 B. $\frac{8}{3}$
 C. 4
 D. $\frac{4}{3}$

解析：由三视图可知，几何体是一个底面是正方形的四棱锥，且一条侧棱垂直于底面。

底面对角线的长为 2，底面面积是 $S=\frac{1}{2}\times 2^2=2$ ，

四棱锥高为 $h=2$ ，所以它的体积是 $\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$ 。

答案：D

6. 抛物线 $y^2=16x$ 的焦点为 F ，点 A 在 y 轴上，且满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OF}|$ ，抛物线的准线与 x 轴的

交点是 B ，则 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\quad)$

- A. -4
- B. 4
- C. 0
- D. -4 或 4

解析：抛物线 $y^2=16x$ 的焦点为 $F(4, 0)$ ， $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OF}|$ ，可得 $A(0, \pm 4)$ ，

又 $B(-4, 0)$ ，即有 $\overrightarrow{FA} = (-4, 4)$ ， $\overrightarrow{AB} = (-4, -4)$ ，或 $\overrightarrow{FA} = (-4, -4)$ ， $\overrightarrow{AB} = (-4, 4)$ ，

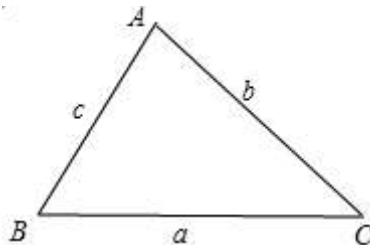
则有 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AB} = 16 - 16 = 0$ 。

答案：C

7. 在 $\triangle ABC$ 中， A, B, C 成等差数列是 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ 的 ()

- A. 充分但不必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析：(1) 如图，若 A, B, C 成等差数列： $2B = A + C$ ，所以 $3B = 180^\circ$ ， $B = 60^\circ$ ；



\therefore 由余弦定理得， $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ ； $\therefore a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ；

$\therefore (b+a-c)(b-a+c) = b^2 - (a-c)^2 = b^2 - a^2 - c^2 + 2ac = -ac + 2ac = ac$ ；即 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ ；

$\therefore A, B, C$ 成等差数列是 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ 的充分条件；

(2) 若 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ ，则： $b^2 - (a-c)^2 = b^2 - a^2 - c^2 + 2ac = ac$ ； $\therefore a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ；

由余弦定理： $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B$ ； $\therefore \cos B = \frac{1}{2}$ ； $\therefore B = 60^\circ$ ；

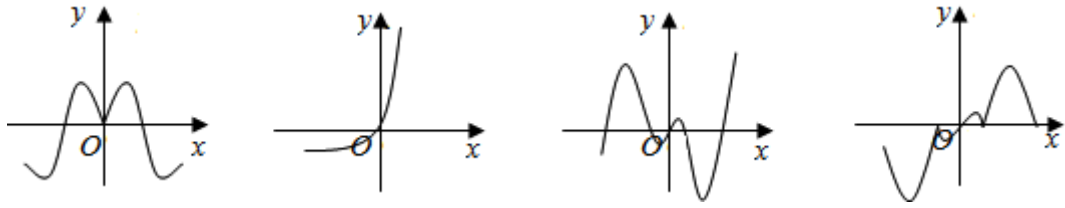
$\therefore 60^\circ - A = 180^\circ - (A + 60^\circ) - 60^\circ$ ；即 $B - A = C - B$ ；

$\therefore A, B, C$ 成等差数列； $\therefore A, B, C$ 成等差数列是 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ 的必要条件；

\therefore 综上得， A, B, C 成等差数列是 $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ 的充要条件。

答案：C

8. 现有四个函数：① $y = x \cdot \sin x$ ；② $y = x \cdot \cos x$ ；③ $y = x \cdot |\cos x|$ ；④ $y = x \cdot 2^x$ 的图象(部分)如图：



则按照从左到右图象对应的函数序号安排正确的一组是()

- A. ①④③②
- B. ③④②①
- C. ④①②③
- D. ①④②③

解析: 根据① $y=x \cdot \sin x$ 为偶函数, 它的图象关于 y 轴对称, 故第一个图象即是;

根据② $y=x \cdot \cos x$ 为奇函数, 它的图象关于原点对称, 它在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的值为正数,

在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上的值为负数, 故第三个图象满足;

根据③ $y=x \cdot |\cos x|$ 为奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 故第四个图象满足;

④ $y=x \cdot 2^x$, 为非奇非偶函数, 故它的图象没有对称性, 故第 2 个图象满足.

答案: D

9. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $a=f(\log_2 3)$, $b=f(\log_4 5)$, $c=f(2^{\frac{3}{2}})$, 则 a, b, c 满足()

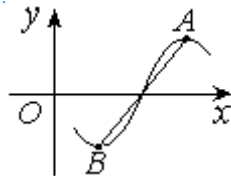
- A. $a < b < c$
- B. $b < a < c$
- C. $c < a < b$
- D. $c < b < a$

解析: \because 偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $\therefore f(x)$ 在 $\{0, +\infty\}$ 上单调递增,

$\because 2 > \log_2 3 = \log_4 9 > \log_4 5$, $2^{\frac{3}{2}} > 2$, $\therefore f(\log_4 5) < f(\log_2 3) < f(2^{\frac{3}{2}})$, $\therefore b < a < c$.

答案: B.

10. 函数 $y=\cos(\omega x+\phi)$ ($\omega > 0, 0 < \phi < \pi$) 为奇函数, 该函数的部分图象如图所示, A、B 分别为最高点与最低点, 且 $|AB|=2\sqrt{2}$, 则该函数图象的一条对称轴为()



- A. $x=\frac{\pi}{2}$
- B. $x=\frac{\pi}{3}$
- C. $x=2$

D. $x=1$

解析：由函数 $y=\cos(\omega x+\phi)$ ($\omega>0, 0<\phi<\pi$) 为奇函数，可得 $\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

再结合 $0<\phi<\pi$ ，可得 $\phi=\frac{\pi}{2}$.

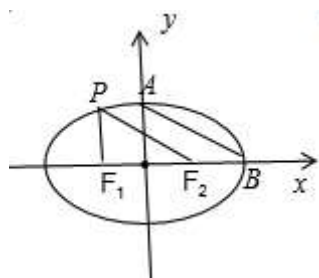
再根据 $AB^2=8=4+(\frac{\pi}{\omega})^2$ ，求得 $\omega=\frac{\pi}{2}$ ， \therefore 函数 $y=\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}x$ ，故它的一条对称轴方程为 $x=1$.

答案：D

11. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的中心在原点， F_1, F_2 分别为左、右焦点， A, B 分别是椭圆的上顶点和右顶点， P 是椭圆上一点，且 $PF_1\perp x$ 轴， $PF_2\parallel AB$ ，则此椭圆的离心率等于()

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解析：如图所示，把 $x=-c$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)，可得 $P(-c, \frac{b^2}{a})$ ，



又 $A(0, b)$, $B(a, 0)$, $F_2(c, 0)$, $\therefore k_{AB}=-\frac{b}{a}$, $k_{PF_2}=-\frac{b^2}{2ac}$,

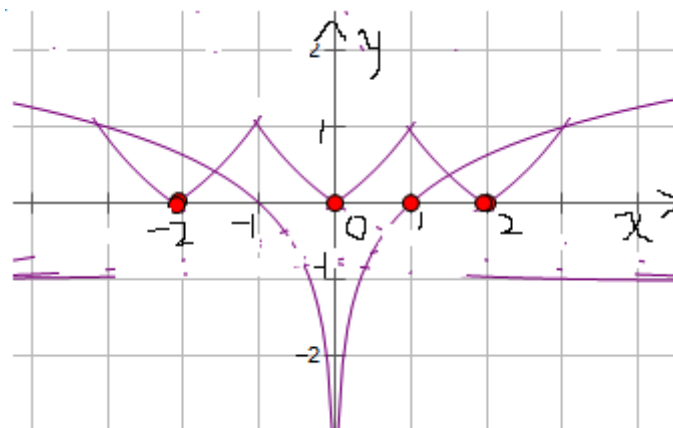
$\because PF_2\parallel AB$, $\therefore -\frac{b}{a}=-\frac{b^2}{2ac}$ ，化为： $b=2c$. $\therefore 4c^2=b^2=a^2-c^2$ ，即 $a^2=5c^2$ ， $\therefore e=\frac{c^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

答案：D

12. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足：① $f(x)=f(4-x)$ ，② $f(x+2)=f(x)$ ，③ 在 $[0, 1]$ 上表达式为 $f(x)=2^x-1$ ，则函数 $g(x)=f(x)-\log_3|x|$ 的零点个数为()

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

解析：函数 $f(x)$ 满足：① $f(x)=f(4-x)$ ， $\therefore f(x+2)=f(2-x)$ ，



\therefore 函数的对称轴为 $x=2$ ，
 $\therefore f(x+2)=f(x)$ ， \therefore 函数的周期为 2，
 \therefore 在 $[0, 1]$ 上表达式为 $f(x)=2^x-1$ ，
 做出函数的图象和 $y=\log_3|x|$ 的图象，
 通过图象得出交点的个数为 4.

答案：A

二、填空题(每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上)

13. 2016 年夏季大美青海又迎来了旅游热，甲、乙、丙三位游客被询问是否去过陆心之海青海湖，海北百里油菜花海，茶卡天空之境三个地方时，

甲说：我去过的地方比乙多，但没去过海北百里油菜花海；

乙说：我没去过茶卡天空之境；

丙说：我们三人去过同一个地方.

由此可判断乙去过的地方为_____.

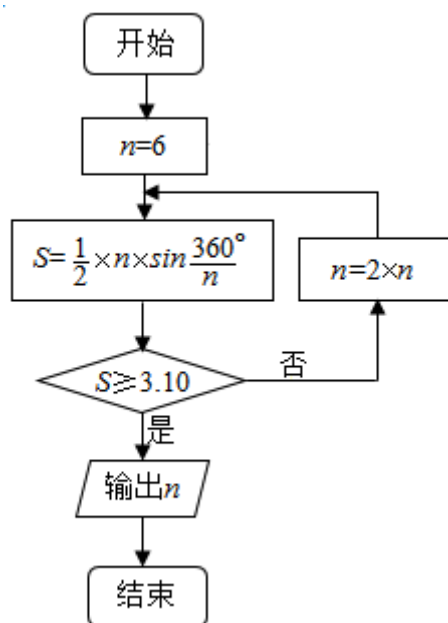
解析：由乙说：我没去过茶卡天空之境，则乙可能去过陆心之海青海湖或茶卡天空之境，但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过海北百里油菜花海，则乙只能是去过陆心之海青海湖，茶卡天空之境中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一个地方，

则由此可判断乙去过的地方为陆心之海青海湖.

答案：陆心之海青海湖

14. 公元 263 年左右，我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积可无限逼近圆的面积，并创立了“割圆术”. 利用“割圆术”刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14，这就是著名的“徽率”. 如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图，则输出 n 的值为_____. (参考数据： $\sin 15^\circ = 0.2588$ ， $\sin 7.5^\circ = 0.1305$)



解析：模拟执行程序，可得 $n=6$ ， $S=3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

不满足条件 $S \geq 3.10$ ， $n=12$ ， $S=6 \times \sin 30^\circ = 3$ ，

不满足条件 $S \geq 3.10$ ， $n=24$ ， $S=12 \times \sin 15^\circ = 12 \times 0.2588 = 3.1056$ ，

满足条件 $S \geq 3.10$ ，退出循环，输出 n 的值为 24。

答案：24

15. 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 k ，使直线 $y=k(x+2)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点的概率为_____。

解析：圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $(0, 0)$ ，

圆心到直线 $y=k(x+2)$ 的距离为 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，

要使直线 $y=k(x+2)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点，则 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

\therefore 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 k ，使直线 $y=k(x+2)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点的概率为

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1 - (-1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

答案： $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 中， $SA=2\sqrt{3}$ ，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为_____。

解析：设底面边长为 a ，则高 $h = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{a^2}{2}}$ ，所以体积 $V =$

$$\frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\sqrt{12a^4 - \frac{a^6}{2}},$$

设 $y = 12a^4 - \frac{1}{2}a^6$ ，则 $y' = 48a^3 - 3a^5$ ，当 y 取最大值时， $y' = 48a^3 - 3a^5 = 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = 4$ 时，当

$a = 4$ 时，体积最大，此时 $h = \sqrt{12 - \frac{a^2}{2}} = 2$.

答案：2

三、解答题(本大题共 5 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2 = 3$ ， $b_3 = 9$ ， $a_1 = b_1$ ， $a_{14} = b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = a_n + b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

解析：(1) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，运用通项公式可得 $q = 3$ ， $d = 2$ ，进而得到所求通项公式；

(2) 求得 $c_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 3^{n-1}$ ，再由数列的求和方法：分组求和，运用等差数列和等比数列的求和公式，计算即可得到所求和.

答案：(1) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，

由 $b_2 = 3$ ， $b_3 = 9$ ，可得 $q = \frac{b_3}{b_2} = 3$ ， $b_n = b_2 q^{n-2} = 3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1}$ ；

即有 $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_{14} = b_4 = 27$ ，则 $d = \frac{a_{14} - a_1}{13} = 2$ ，则 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ ；

(2) $c_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 3^{n-1}$ ，

则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $(1+3+\dots+(2n-1)) + (1+3+9+\dots+3^{n-1}) = \frac{1}{2}n \cdot 2n + \frac{1-3^n}{1-3} = n^2 + \frac{3^n - 1}{2}$.

18. 为选拔选手参加“中国谜语大会”，某中学举行了一次“谜语大赛”活动. 为了了解本次竞赛学生的成绩情况，从中抽取了部分学生的分数(得分取正整数，满分为 100 分)作为样本(样本容量为 n)进行统计. 按照 $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ 的分组作出频率分布直方图，并作出样本分数的茎叶图(图中仅列出了得分在 $[50, 60)$ ， $[90, 100]$ 的数据).

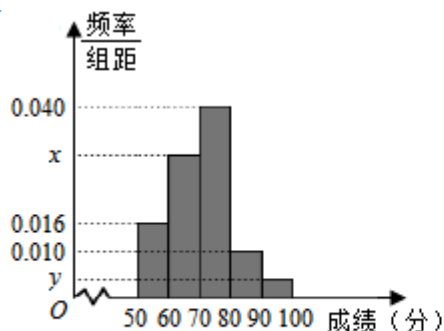


图1

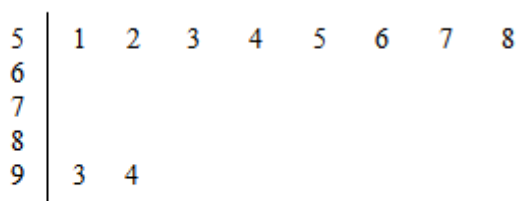


图2

(I) 求样本容量 n 和频率分布直方图中的 x 、 y 的值；

(II) 在选取的样本中，从竞赛成绩在 80 分以上(含 80 分)的学生中随机抽取 2 名学生参加“中国谜语大会”，求所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在 $[90, 100]$ 内的概率。

解析：(I) 由样本容量和频数频率的关系易得答案；

(II) 由题意可知，分数在 $[80, 90)$ 内的学生有 5 人，记这 5 人分别为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ，分数在 $[90, 100]$ 内的学生有 2 人，记这 2 人分别为 b_1, b_2 ，列举法易得。

答案：(I) 由题意可知，样本容量 $n \frac{8}{0.016 \times 10} = 50$ ， $y \frac{2}{50 \times 10} = 0.004$ ， $x = 0.100 - 0.004 - 0.010 - 0.016 - 0.040 = 0.030$ ；

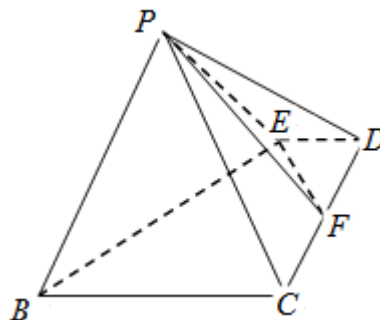
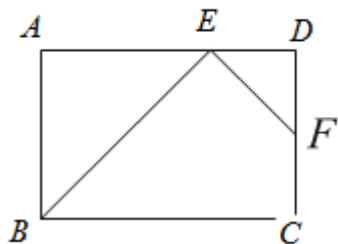
(II) 由题意可知，分数在 $[80, 90)$ 内的学生有 5 人，记这 5 人分别为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ，分数在 $[90, 100]$ 内的学生有 2 人，记这 2 人分别为 b_1, b_2 。抽取的 2 名学生的所有情况有 21 种，分别为： $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, a_5), (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_5, b_1), (a_5, b_2), (b_1, b_2)$ 。

其中 2 名同学的分数都不在 $[90, 100]$ 内的情况有 10 种，分别为：

$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_5)$ 。

\therefore 所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在 $[90, 100]$ 内的概率 $P = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$ 。

19. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 为边 AD 上的点，点 F 为边 CD 的中点， $AB = AE = \frac{2}{3}AD = 4$ ，现将 $\triangle ABE$ 沿 BE 边折至 $\triangle PBE$ 位置，且平面 $PBE \perp$ 平面 $BCDE$ 。



(1) 求证：平面 $PBE \perp$ 平面 PEF ；

(2) 求四棱锥 $P-BCEF$ 的体积。

解析：(1)在 Rt△DEF 中，由已知可得∠DEF=45°，在 Rt△ABE 中，得到∠AEB=45°，则可得到 EF⊥BE，结合平面 PBE⊥平面 BCDE，可得 EF⊥平面 PBE，从而得到平面 PBE⊥平面 PEF；

(2)过 P 做 PO⊥BE，由面面垂直的性质及线面垂直的判定得到 PO⊥平面 BCDE，即 PO 为四棱锥 P-BCFE 的高. 把 S_{四边形BCFE} 转化为 S_{矩形ABCD}-S_{△ABE}-S_{△DEF}，求值后代入棱锥的体积公式得答案.

答案：(1)在 Rt△DEF 中，∵ED=DF，∴∠DEF=45°.

在 Rt△ABE 中，∵AE=AB，∴∠AEB=45°，∴∠BEF=90°，则 EF⊥BE.

∵平面 PBE⊥平面 BCDE，且平面 PBE∩平面 BCDE=BE，∴EF⊥平面 PBE，

∵EF⊂平面 PEF，∴平面 PBE⊥平面 PEF；

(2)过 P 做 PO⊥BE，

∵PO⊂平面 PBE，平面 PBE⊥平面 BCDE 且平面 PBE∩平面 BCDE=BE，∴PO⊥平面 BCDE，

四棱锥 P-BCFE 的高 h=PO=2√2. S_{四边形BCFE}=S_{矩形ABCD}-S_{△ABE}-S_{△DEF}=6×4- $\frac{1}{2}$ ×4×4- $\frac{1}{2}$ ×2×2=14，

$$\text{则 } V_{P-BCFE} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形BCFE}} \cdot h = \frac{1}{3} \times 14 \times 2\sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$

20. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a>b>0) 的右焦点为 F(1, 0)，且点 P(1, $\frac{3}{2}$) 在椭圆 C 上，O

为坐标原点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程；

(II) 设过定点 T(0, 2) 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A、B，且∠AOB 为锐角，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解析：(I) 利用已知条件求出 c=1，得到 a²=b²+1. 通过点 P(1, $\frac{3}{2}$) 在椭圆 C 上，得到 $\frac{1}{a^2} + \frac{94}{b^2} = 1$ ，可解椭圆 C 的标准方程.

(II) 设直线 l 的方程为 y=kx+2，点 A(x₁, y₁), B(x₂, y₂)，通过联立直线与椭圆方程，利用韦达定理以及 x₁x₂+y₁y₂>0. 判别式的符号，求解 k 的范围即可.

答案：(I) 由题意，得 c=1，所以 a²=b²+1.

因为点 P(1, $\frac{3}{2}$) 在椭圆 C 上，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{94}{b^2} = 1$ ，可解得 a²=4, b²=3.

则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 设直线 l 的方程为 y=kx+2，点 A(x₁, y₁), B(x₂, y₂)，

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{ 得 } (4k^2+3)x^2+16kx+4=0.$$

因为 Δ=48(4k²-1)>0，所以 k²> $\frac{1}{4}$ ，

由根与系数的关系，得 x₁+x₂= $\frac{-16k}{4k^2+3}$ ，x₁x₂= $\frac{4}{4k^2+3}$.

因为∠AOB 为锐角，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ ，即 x₁x₂+y₁y₂>0.

所以 $x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)>0$,

即 $(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4>0$, $(1+k^2)\cdot\frac{4}{4k^2+3}+2k\cdot\frac{-16k}{4k^2+3}+4>0\Rightarrow\frac{-12k^2+16}{4k^2+3}>0$, 所

以 $k^2<\frac{4}{3}$.

综上 $14<k^2<\frac{4}{3}$, 解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

21. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-ax-x^2$.

(1) 若 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 求 a 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 在定义域上的单调性.

解析: (1) 求函数的导数, 根据 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 建立方程 $f'(1)=0$, 进行求解即可.

(2) 求函数的导数, 讨论 a 的取值范围, 结合函数单调性和导数之间的关系进行讨论即可.

答案: (1) 因为 $f'(x)=\frac{a}{x+1}-a-2x$,

令 $f'(1)=0$, 即 $\frac{a}{2}-a-2=0$, 解得 $a=-4$,

经检验: 此时, $x\in(0, 1)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增;

$x\in(1, +\infty)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值. 满足题意.

$$(2) f'(x)=\frac{a}{x+1}-a-2x=\frac{-2x\left(x+\frac{a+2}{2}\right)}{x+1},$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$, 或 $x=-\frac{a+2}{2}$, 又 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

① 当 $-\frac{a+2}{2}\leq-1$, 即 $a\geq 0$ 时, 若 $x\in(-1, 0)$, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增;

若 $x\in(0, +\infty)$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减;

② 当 $-1<-\frac{a+2}{2}<0$, 即 $-2<a<0$ 时, 若 $x\in(-1, -\frac{a+2}{2})$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减;

若 $x\in(-\frac{a+2}{2}, 0)$, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增; 若 $x\in(0, +\infty)$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减;

③ 当 $-\frac{a+2}{2}=0$, 即 $a=-2$ 时, $f'(x)\leq 0$, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内递减,

④ 当 $-\frac{a+2}{2}>0$, 即 $a<-2$ 时, 若 $x\in(-1, 0)$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减;

若 $x\in(0, -\frac{a+2}{2})$, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增;

若 $x\in(-\frac{a+2}{2}, +\infty)$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减.