

2016年黑龙江省龙东地区中考真题数学

一、填空题(共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. 2015 年 12 月 6 日第十届全球孔子学院大会在上海召开, 截止到会前, 网络孔子学院注册用户达 800 万人, 数据 800 万人用科学记数法表示为____人.

解析: 将 800 万用科学记数法表示为: 8×10^6 .

答案: 8×10^6 .

2. 在函数 $y = \sqrt{3x-6}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

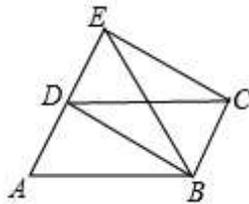
解析: 由题意, 得

$$3x-6 \geq 0,$$

解得 $x \geq 2$,

答案: $x \geq 2$.

3. 如图, 在平行四边形 ABCD 中, 延长 AD 到点 E, 使 $DE=AD$, 连接 EB, EC, DB 请你添加一个条件____, 使四边形 DBCE 是矩形.



解析: 添加 $EB=DC$.理由如下:

\because 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$,

$\therefore DE \parallel BC$,

又 $\because DE=AD$,

$\therefore DE=BC$,

\therefore 四边形 DBCE 为平行四边形.

又 $\because EB=DC$,

\therefore 四边形 DBCE 是矩形.

答案: $EB=DC$.

4. 在一个不透明的袋子中装有除颜色外其他均相同的 4 个红球, 3 个白球, 2 个绿球, 则摸出绿球的概率是_____.

解析: \because 在一个不透明的袋子中装有除颜色外其他均相同的 4 个红球, 3 个白球, 2 个绿球,

\therefore 摸出绿球的概率是: $\frac{2}{4+3+2} = \frac{2}{9}$.

答案: $\frac{2}{9}$.

5. 不等式组 $\begin{cases} x > -1 \\ x < m \end{cases}$ 有 3 个整数解，则 m 的取值范围是_____.

解析：不等式的整数解是 0, 1, 2. 则 m 的取值范围是 $2 < x \leq 3$.

答案： $2 < x \leq 3$.

6. 一件服装的标价为 300 元，打八折销售后可获利 60 元，则该件服装的成本价是_____元.

解析：设该件服装的成本价是 x 元，

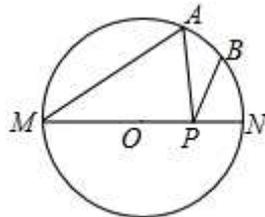
依题意得： $300 \times \frac{8}{10} - x = 60$,

解得： $x = 180$.

\therefore 该件服装的成本价是 180 元.

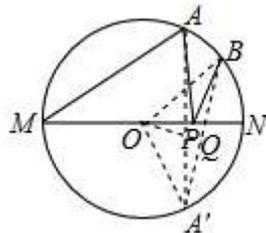
答案： 180.

7. 如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， $MN=4$ ， $\angle AMN=40^\circ$ ，点 B 为弧 AN 的中点，点 P 是直径 MN 上的一个动点，则 $PA+PB$ 的最小值为_____.



解析：过 A 作关于直线 MN 的对称点 A' ，连接 $A'B$ ，由轴对称的性质可知 $A'B$ 即为 $PA+PB$ 的最小值，

连接 OB ， OA' ， AA' ，



$\because AA'$ 关于直线 MN 对称，

$\therefore AN = A'N$ ，

$\because \angle AMN = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle A'ON = 80^\circ$ ， $\angle BON = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle A'OB = 120^\circ$ ，

过 O 作 $OQ \perp A'B$ 于 Q ，

在 $Rt\triangle A'OQ$ 中， $OA' = 2$ ，

$\therefore A'B = 2A'Q = 2\sqrt{3}$ ，

即 $PA+PB$ 的最小值 $2\sqrt{3}$ 。

答案： $2\sqrt{3}$ 。

8.小丽在手工制作课上,想用扇形卡纸制作一个圣诞帽,卡纸的半径为 30cm,面积为 300π cm^2 ,则这个圣诞帽的底面半径为____cm.

解析: 设卡纸扇形的半径和弧长分别为 R 、 l , 圣诞帽底面半径为 r ,

则由题意得 $R=30$, 由 $\frac{1}{2}Rl=300\pi$ 得 $l=20\pi$;

由 $2\pi r=l$ 得 $r=10\text{cm}$.

答案: 10.

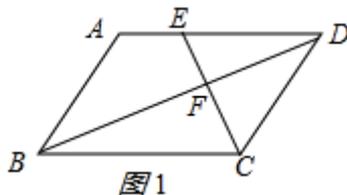
9.已知: 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在直线 AD 上, $AE=\frac{1}{3}AD$, 连接 CE 交 BD 于点 F , 则

$EF:FC$ 的值是_____.

解析: $\because AE=\frac{1}{3}AD$,

\therefore 分两种情况:

①当点 E 在线段 AD 上时, 如图 1 所示



\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD\parallel BC, AD=BC$,

$\therefore \triangle EFD\sim\triangle CFB$,

$\therefore EF:FC=DE:BC$,

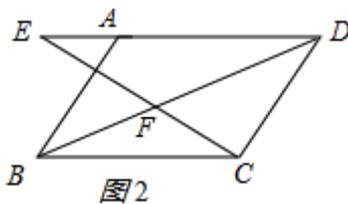
$\because AE=\frac{1}{3}AD$,

$\therefore DE=2AE=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}BC$,

$\therefore DE:BC=2:3$,

$\therefore EF:FC=2:3$;

②当点 E 在线段 DA 的延长线上时, 如图 2 所示:



同①得: $\triangle EFD\sim\triangle CFB$,

$\therefore EF:FC=DE:BC$,

$\because AE=\frac{1}{3}AD$,

$$\therefore DE=4AE=\frac{4}{3}AD=\frac{4}{3}BC,$$

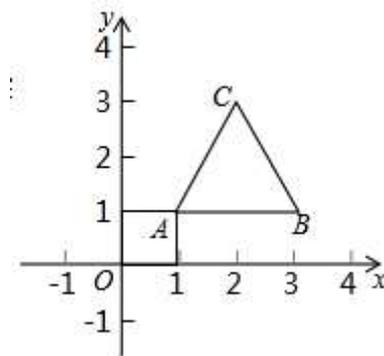
$$\therefore DE:BC=4:3,$$

$$\therefore EF:FC=4:3;$$

综上所述：EF:FC 的值是 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$ ；

答案： $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$.

10.如图，等边三角形的顶点 A(1, 1)、B(3, 1)，规定把等边 $\triangle ABC$ “先沿 x 轴翻折，再向左平移 1 个单位”为一次变换，如果这样连续经过 2016 次变换后，等边 $\triangle ABC$ 的顶点 C 的坐标为_____.



解析： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形 $AB=3-1=2$,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } 1+2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1,$$

横坐标为 2,

$$\therefore A(2, \sqrt{3} + 1),$$

第 2016 次变换后的三角形在 x 轴上方,

点 A 的纵坐标为 $\sqrt{3} + 1$,

横坐标为 $2-2016 \times 1 = -2014$,

所以，点 A 的对应点 A' 的坐标是 $(-2014, \sqrt{3} + 1)$,

答案： $(-2014, \sqrt{3} + 1)$.

二、选择题(共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

11.下列运算中，计算正确的是()

A. $2a \cdot 3a=6a$

B. $(3a^2)^3=27a^6$

C. $a^4 \div a^2=2a$

D. $(a+b)^2=a^2+ab+b^2$

解析： A、 $2a \cdot 3a=6a^2$ ，故此选项错误；

B、 $(3a^2)^3=27a^6$ ，正确；

C、 $a^4 \div a^2 = 2a^2$ ，故此选项错误；

D、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故此选项错误；

答案：B.

12. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是()

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析：A、是轴对称图形.不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，旋转 180 度后它的两部分能够重合；即不满足中心对称图形的定义，故此选项错误；

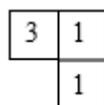
B、是轴对称图形.不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，旋转 180 度后它的两部分能够重合；即不满足中心对称图形的定义，故此选项错误；

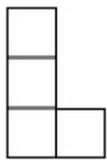
C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

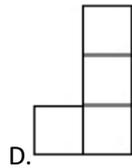
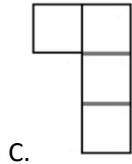
D、是轴对称图形，又是中心对称图形.故此选项正确.

答案：D.

13. 如图，由 5 块完全相同的小正方体所搭成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示在该位置小正方体的个数，其主视图是()



- A. 
- B. 



解析：由分析得该组合体的主视图为：



答案：B.

14.一次招聘活动中，共有 8 人进入复试，他们的复试成绩(百分制)如下：70，100，90，80，70，90，90，80.对于这组数据，下列说法正确的是()

- A.平均数是 80
- B.众数是 90
- C.中位数是 80
- D.极差是 70

解析：依题意得众数为 90；

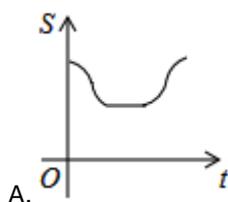
中位数为 $\frac{1}{2}(80+90)=85$ ；

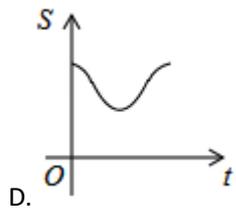
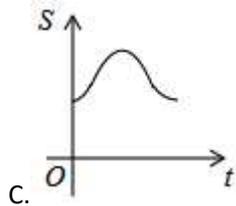
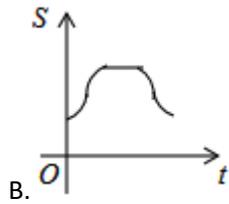
极差为 $100-70=30$ ；

平均数为 $\frac{1}{8}(70 \times 2 + 80 \times 2 + 90 \times 3 + 100) = 83.75$.故 B 正确.

答案：B.

15.如图，直角边长为 1 的等腰直角三角形与边长为 2 的正方形在同一水平线上，三角形沿水平线从左向右匀速穿过正方形.设穿过时间为 t ，正方形与三角形不重合部分的面积为 s (阴影部分)，则 s 与 t 的大致图象为()





解析: \because 直角边长为 1 的等腰直角三角形与边长为 2 的正方形在同一水平线上, 三角形沿水平线从左向右匀速穿过正方形. 设穿过时间为 t , 正方形与三角形不重合部分的面积为 s ,

$\therefore s$ 关于 t 的函数大致图象应为: 三角形进入正方形以前 s 增大,

$$\text{当 } 0 \leq t \leq \sqrt{2} \text{ 时, } s = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times t^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} t^2;$$

$$\text{当 } \sqrt{2} < t \leq 2 \text{ 时, } s = 2^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{7}{2};$$

$$\text{当 } 2 < t \leq 3 \text{ 时, } s = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} (3-t)^2 = -\frac{1}{2} t^2 + 3t - \frac{3}{2};$$

\therefore A 符合要求.

答案: A.

16. 关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x+1} = 3$ 的解是正数, 则字母 m 的取值范围是()

- A. $m > 3$
- B. $m < 3$
- C. $m > -3$
- D. $m < -3$

解析: 分式方程去分母得: $2x-m=3x+3$,

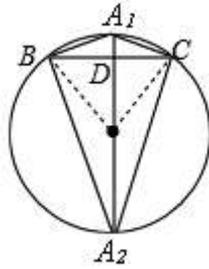
解得: $x=-m-3$,

由分式方程的解为正数, 得到 $-m-3 > 0$, 且 $-m-3 \neq -1$,

解得: $m < -3$,

答案: D

17. 若点 O 是等腰 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\angle BOC = 60^\circ$, 底边 $BC = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为()



A. $2+\sqrt{3}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

解析：由题意可得，如右图所示，

存在两种情况，

当 $\triangle ABC$ 为 $\triangle A_1BC$ 时，连接 OB 、 OC ，

\because 点 O 是等腰 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC=60^\circ$ ，底边 $BC=2$ ， $OB=OC$ ，

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形， $OB=OC=BC=2$ ， $OA_1 \perp BC$ 于点 D ，

$$\therefore CD=1, OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\square A_1BC} = \frac{BC \cdot A_1D}{2} = \frac{2 \times (2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3},$$

当 $\triangle ABC$ 为 $\triangle A_2BC$ 时，连接 OB 、 OC ，

\because 点 O 是等腰 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC=60^\circ$ ，底边 $BC=2$ ， $OB=OC$ ，

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形， $OB=OC=BC=2$ ， $OA_1 \perp BC$ 于点 D ，

$$\therefore CD=1, OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\square A_2BC} = \frac{BC \cdot DA^2}{2} = \frac{2 \times (2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3},$$

由上可得， $\triangle ABC$ 的面积为 $2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$ ，

答案：C.

18. 已知反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ，当 $1 < x < 3$ 时， y 的最小整数值是()

A.3

B.4

C.5

D.6

解析：在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 中 $k=6>0$,

∴该反比例函数在 $x>0$ 内, y 随 x 的增大而减小,

当 $x=3$ 时, $y = \frac{6}{3} = 2$; 当 $x=1$ 时, $y = \frac{6}{1} = 6$.

∴当 $1<x<3$ 时, $2<y<6$.

∴ y 的最小整数值是 3.

答案: A.

19.为了丰富学生课外小组活动,培养学生动手操作能力,王老师让学生把 5m 长的彩绳截成 2m 或 1m 的彩绳,用来做手工编织,在不造成浪费的前提下,你有几种不同的截法()

A.1

B.2

C.3

D.4

解析:截下来的符合条件的彩绳长度之和刚好等于总长 5 米时,不造成浪费,

设截成 2 米长的彩绳 x 根, 1 米长的 y 根,

由题意得, $2x+y=5$,

因为 x, y 都是正整数, 所以符合条件的解为:

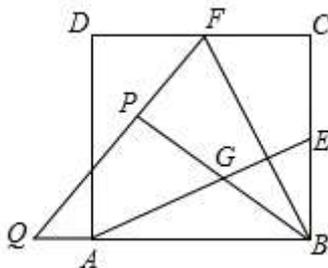
$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

则共有 3 种不同截法,

答案: C.

20.如图,在正方形 ABCD 中, E、F 分别为 BC、CD 的中点, 连接 AE, BF 交于点 G, 将 $\triangle BCF$ 沿 BF 对折, 得到 $\triangle BPF$, 延长 FP 交 BA 延长线于点 Q, 下列结论正确的个数是()

① $AE=BF$; ② $AE \perp BF$; ③ $\sin \angle BQP = \frac{4}{5}$; ④ $S_{\text{四边形 ECFG}} = 2S_{\triangle BGE}$.



A.4

B.3

C.2

D.1

解析: ∵E, F 分别是正方形 ABCD 边 BC, CD 的中点,

∴ $CF=BE$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF, \\ BE=CF \end{cases}$$

∴ Rt△ABE ≅ Rt△BCF (SAS),

∴ ∠BAE = ∠CBF, AE = BF, 故①正确;

又 ∵ ∠BAE + ∠BEA = 90°,

∴ ∠CBF + ∠BEA = 90°,

∴ ∠BGE = 90°,

∴ AE ⊥ BF, 故②正确;

根据题意得, FP = FC, ∠PFB = ∠BFC, ∠FPB = 90°

∵ CD // AB,

∴ ∠CFB = ∠ABF,

∴ ∠ABF = ∠PFB,

∴ QF = QB,

令 PF = k (k > 0), 则 PB = 2k

在 Rt△BPQ 中, 设 QB = x,

∴ $x^2 = (x-k)^2 + 4k^2$,

$$\therefore x = \frac{5k}{2},$$

∴ $\sin \angle BQP = \frac{BP}{QB} = \frac{4}{5}$, 故③正确;

∵ ∠BGE = ∠BCF, ∠GBE = ∠CBF,

∴ △BGE ∽ △BCF,

∵ $BE = \frac{1}{2} BC$, $BF = \frac{\sqrt{5}}{2} BC$,

∴ BE : BF = 1 : $\sqrt{5}$,

∴ △BGE 的面积 : △BCF 的面积 = 1 : 5,

∴ $S_{\text{四边形 ECFG}} = 4S_{\triangle BGE}$, 故④错误.

答案: B.

三、解答题(满分 60 分)

21. 先化简, 再求值: $(1 + \frac{1}{x-2}) \div \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2}$, 其中 $x = 4 - \tan 45^\circ$.

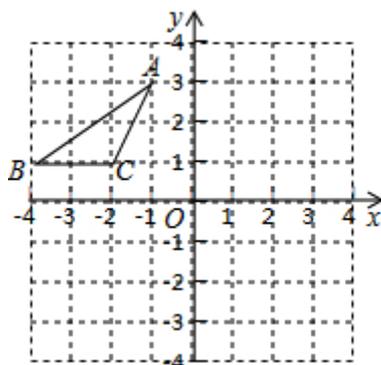
解析: 先算括号里面的, 再算除法, 求出 x 的值代入进行计算即可.

$$\text{答案: 原式} = \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

$$\text{当 } x = 4 - \tan 45^\circ = 4 - 1 = 3 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

22.如图，在平面直角坐标系中，点 A、B、C 的坐标分别为(-1, 3)、(-4, 1)、(-2, 1)，先将△ABC 沿一确定方向平移得到△A₁B₁C₁，点 B 的对应点 B₁的坐标是(1, 2)，再将△A₁B₁C₁ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到△A₂B₂C₂，点 A₁的对应点为点 A₂。



(1)画出△A₁B₁C₁;

(2)画出△A₂B₂C₂;

(3)求出在这两次变换过程中，点 A 经过点 A₁ 到达 A₂ 的路径总长。

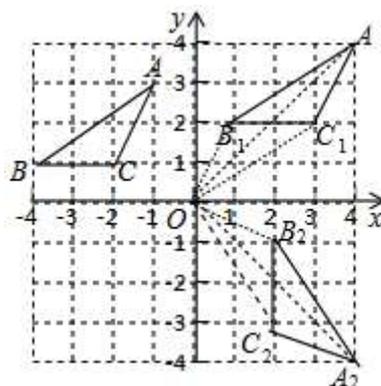
解析：(1)由 B 点坐标和 B₁的坐标得到△ABC 向右平移 5 个单位，再向上平移 1 个单位得到△A₁B₁C₁，则根据点平移的规律写出 A₁ 和 C₁ 的坐标，然后描点即可得到△A₁B₁C₁;

(2)利用网格特点和旋转的性质画出点 A₁ 的对应点为点 A₂，点 B₁ 的对应点为点 B₂，点 C₁ 的对应点为点 C₂，从而得到△A₂B₂C₂;

(3)先利用勾股定理计算平移的距离，再计算以 OA₁ 为半径，圆心角为 90° 的弧长，然后把它们相加即可得到这两次变换过程中，点 A 经过点 A₁ 到达 A₂ 的路径总长。

答案：(1)如图，△A₁B₁C₁ 为所作;

(2)如图，△A₂B₂C₂ 为所作;



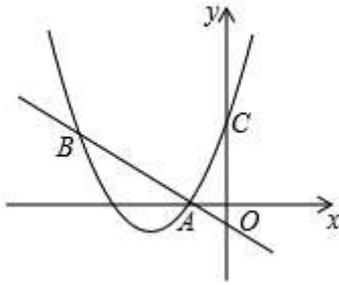
$$(3) OA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{点 A 经过点 } A_1 \text{ 到达 } A_2 \text{ 的路径总长} = \sqrt{5^2 + 1^2} + \frac{90 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{2}}{180} = \sqrt{26} + 2\sqrt{2}\pi.$$

23.如图，二次函数 $y=(x+2)^2+m$ 的图象与 y 轴交于点 C，点 B 在抛物线上，且与点 C 关于抛物线的对称轴对称，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过该二次函数图象上的点 A(-1, 0) 及点 B。

(1)求二次函数与一次函数的解析式;

(2)根据图象，写出满足 $(x+2)^2+m \geq kx+b$ 的 x 的取值范围。



解析: (1)先利用待定系数法先求出 m , 再求出点 B 坐标, 利用方程组求出太阳还是解析式.
 (2)根据二次函数的图象在一次函数的图象上面即可写出自变量 x 的取值范围.

答案: (1) \because 抛物线 $y=(x+2)^2+m$ 经过点 $A(-1, 0)$,

$$\therefore 0=1+m,$$

$$\therefore m=-1,$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标}(0, 3),$$

\because 对称轴 $x=-2$, B 、 C 关于对称轴对称,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 坐标}(-4, 3),$$

$\because y=kx+b$ 经过点 A 、 B ,

$$\therefore \begin{cases} -4k+b=3 \\ -k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{一次函数解析式为 } y=-x-1,$$

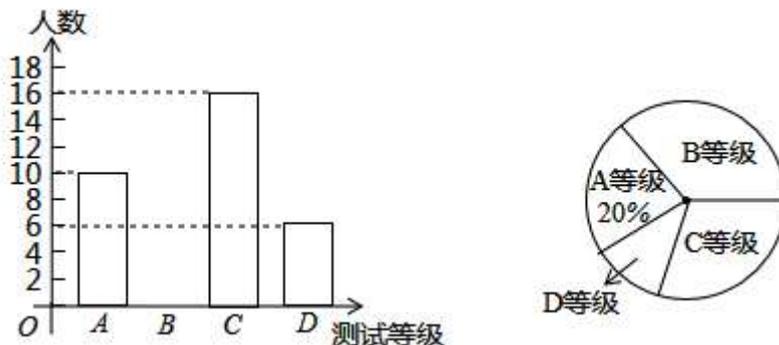
(2)由图象可知, 写出满足 $(x+2)^2+m \geq kx+b$ 的 x 的取值范围为 $x \leq -4$ 或 $x \geq -1$.

24.某学校为了解八年级学生的体能状况, 从八年级学生中随机抽取部分学生进行八百米跑体能测试, 测试结果分为 A 、 B 、 C 、 D 四个等级, 请根据两幅统计图中的信息回答下列问题:

(1)求本次测试共调查了多少名学生?

(2)求本次测试结果为 B 等级的学生数, 并补全条形统计图;

(3)若该中学八年级共有 900 名学生, 请你估计八年级学生中体能测试结果为 D 等级的学生有多少人?



解析: (1)设本次测试共调查了 x 名学生, 根据总体、个体、百分比之间的关系列出方程即可解决.

(2)用总数减去 A 、 C 、 D 中的人数, 即可解决, 画出条形图即可.

(3)用样本估计总体的思想解决问题.

答案: (1)设本次测试共调查了 x 名学生.

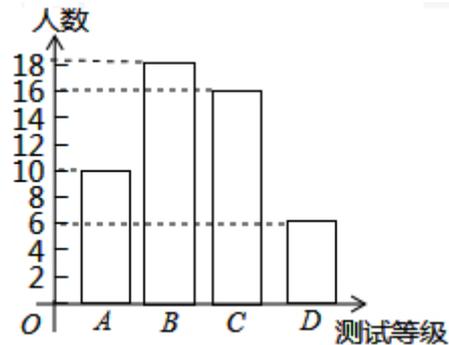
$$\text{由题意 } x \cdot 20\%=10,$$

$x=50$.

∴本次测试共调查了 50 名学生.

(2)测试结果为 B 等级的学生数= $50-10-16-6=18$ 人.

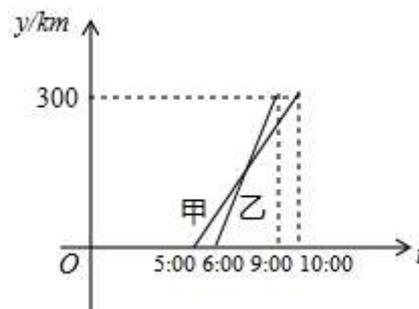
条形统计图如图所示,



(3)∴本次测试等级为 D 所占的百分比为 $\frac{6}{50}=12\%$,

∴该中学八年级共有 900 名学生中测试结果为 D 等级的学生有 $900 \times 12\%=108$ 人.

25.甲、乙两车从 A 城出发前往 B 城,在整个行程中,两车离开 A 城的距离 y 与 t 的对应关系如图所示:



(1)A、B 两城之间距离是多少千米?

(2)求乙车出发多长时间追上甲车?

(3)直接写出甲车出发多长时间,两车相距 20 千米.

解析:(1)根据图象即可得出结论.

(2)先求出甲乙两人的速度,再列出方程即可解决问题.

(3)根据 $y_{甲}-y_{乙}=20$ 或 $y_{乙}-y_{甲}=20$, 列出方程即可解决.

答案:(1)由图象可知 A、B 两城之间距离是 300 千米.

(2)设乙车出发 x 小时追上甲车.

由图象可知,甲的速度= $\frac{300}{5}=60$ 千米/小时.

乙的速度= $\frac{300}{3}=100$ 千米/小时.

由题意 $60(x+1)=100x$

解得 $x=1.5$ 小时.

(3)设 $y_{甲}=kx+b$, 则 $\begin{cases} 5k+b=0 \\ 10k+b=300 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=60 \\ b=-300 \end{cases}$,

$$\therefore y_{甲}=60x-300,$$

$$\text{设 } y_{乙}=k'x+b', \text{ 则 } \begin{cases} 6k'+b'=0 \\ 9k'+b'=300 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k'=100 \\ b'=-600 \end{cases},$$

$$\therefore y_{乙}=100x-600,$$

\therefore 两车相距 20 千米,

$$\therefore y_{甲}-y_{乙}=20 \text{ 或 } y_{乙}-y_{甲}=20 \text{ 或 } y_{甲}=20 \text{ 或 } y_{乙}=280,$$

$$\text{即 } 60x-300-(100x-600)=20 \text{ 或 } 100x-600-(60x-300)=20 \text{ 或 } 60x-300=20 \text{ 或 } 60x-300=280$$

$$\text{解得 } x=7 \text{ 或 } 8 \text{ 或 } \frac{16}{3} \text{ 或 } \frac{29}{3},$$

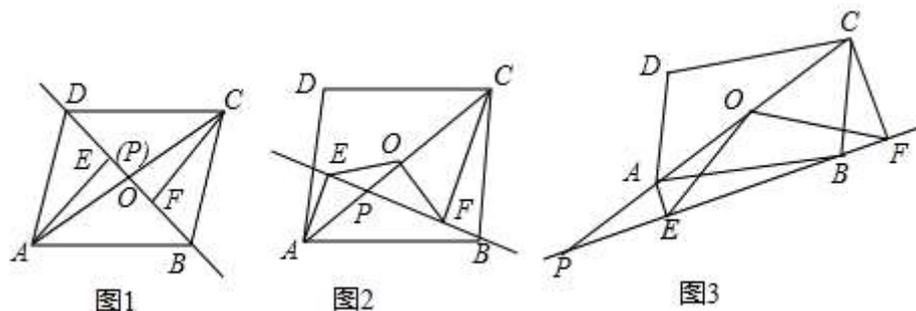
$$\therefore 7-5=2, 8-5=3, \frac{16}{3}-5=\frac{1}{3}, \frac{29}{3}-\left(\frac{\quad}{\quad}\right)5=\frac{14}{3}$$

\therefore 甲车出发 2 小时或 3 小时或 $\frac{1}{3}$ 小时或 $\frac{14}{3}$ 小时, 两车相距 20 千米.

26. 已知: 点 P 是平行四边形 ABCD 对角线 AC 所在直线上的一个动点(点 P 不与点 A、C 重合), 分别过点 A、C 向直线 BP 作垂线, 垂足分别为点 E、F, 点 O 为 AC 的中点.

(1) 当点 P 与点 O 重合时如图 1, 易证 $OE=OF$ (不需证明)

(2) 直线 BP 绕点 B 逆时针方向旋转, 当 $\angle OFE=30^\circ$ 时, 如图 2、图 3 的位置, 猜想线段 CF、AE、OE 之间有怎样的数量关系? 请写出你对图 2、图 3 的猜想, 并选择一种情况给予证明.



解析: (1) 由 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ 即可得出结论.

(2) 图 2 中的结论为: $CF=OE+AE$, 延长 EO 交 CF 于点 G, 只要证明 $\triangle EOA \cong \triangle GOC$, $\triangle OFG$ 是等边三角形, 即可解决问题.

图 3 中的结论为: $CF=OE-AE$, 延长 EO 交 FC 的延长线于点 G, 证明方法类似.

答案: (1) $\because AE \perp PB, CF \perp BP,$

$$\therefore \angle AEO = \angle CFO = 90^\circ,$$

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle CFO \\ \angle AOE = \angle COF, \\ AO = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO,$$

$$\therefore OE = OF.$$

(2) 图 2 中的结论为: $CF=OE+AE$.

图 3 中的结论为: $CF=OE-AE$.

选图 2 中的结论证明如下：

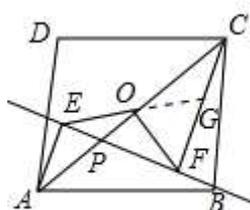


图2

延长 EO 交 CF 于点 G，

$\because AE \perp BP, CF \perp BP,$

$\therefore AE \parallel CF,$

$\therefore \angle EAO = \angle GCO,$

在 $\triangle EOA$ 和 $\triangle GOC$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle GCO \\ AO = OC \\ \angle AOE = \angle COG \end{cases},$$

$\therefore \triangle EOA \cong \triangle GOC,$

$\therefore EO = GO, AE = CG,$

在 $\text{RT}\triangle EFG$ 中， $\because EO = OG,$

$\therefore OE = OF = GO,$

$\because \angle OFE = 30^\circ,$

$\therefore \angle OFG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$

$\therefore \triangle OFG$ 是等边三角形，

$\therefore OF = GF,$

$\because OE = OF,$

$\therefore OE = FG,$

$\because CF = FG + CG,$

$\therefore CF = OE + AE.$

选图 3 的结论证明如下：

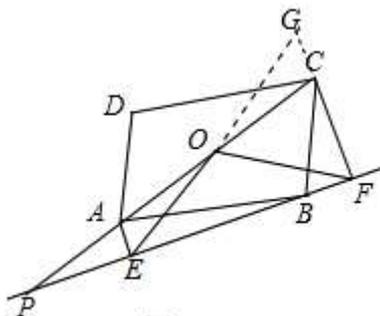


图3

延长 EO 交 FC 的延长线于点 G，

$\because AE \perp BP, CF \perp BP,$

$\therefore AE \parallel CF,$

$\therefore \angle AEO = \angle G,$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COG$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle G \\ \angle AOE = \angle GOC, \\ AO = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COG,$

$\therefore OE = OG, AE = CG,$

在 $RT\triangle EFG$ 中, $\because OE = OG,$

$\therefore OE = OF = OG,$

$\because \angle OFE = 30^\circ,$

$\therefore \angle OFG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$

$\therefore \triangle OFG$ 是等边三角形,

$\therefore OF = FG,$

$\because OE = OF,$

$\therefore OE = FG,$

$\because CF = FG - CG,$

$\therefore CF = OE - AE.$

27. 某中学开学初到商场购买 A、B 两种品牌的足球, 购买 A 种品牌的足球 50 个, B 种品牌的足球 25 个, 共花费 4500 元, 已知购买一个 B 种品牌的足球比购买一个 A 种品牌的足球多花 30 元.

(1) 求购买一个 A 种品牌、一个 B 种品牌的足球各需多少元.

(2) 学校为了响应习总书记“足球进校园”的号召, 决定再次购进 A、B 两种品牌足球共 50 个, 正好赶上商场对商品价格进行调整, A 品牌足球售价比第一次购买时提高 4 元, B 品牌足球按第一次购买时售价的 9 折出售, 如果学校此次购买 A、B 两种品牌足球的总费用不超过第一次花费的 70%, 且保证这次购买的 B 种品牌足球不少于 23 个, 则这次学校有哪几种购买方案?

(3) 请你求出学校在第二次购买活动中最多需要多少资金?

解析: (1) 设 A 种品牌足球的单价为 x 元, B 种品牌足球的单价为 y 元, 根据“总费用=买 A 种足球费用+买 B 种足球费用, 以及 B 种足球单价比 A 种足球贵 30 元”可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组, 解方程组即可得出结论;

(2) 设第二次购买 A 种足球 m 个, 则购买 B 种足球 $(50-m)$ 个, 根据“总费用=买 A 种足球费用+买 B 种足球费用, 以及 B 种足球不小于 23 个”可得出关于 m 的一元一次不等式组, 解不等式组可得出 m 的取值范围, 由此即可得出结论;

(3) 分析第二次购买时, A、B 种足球的单价, 即可得出那种方案花钱最多, 求出花费最大值即可得出结论.

答案: (1) 设 A 种品牌足球的单价为 x 元, B 种品牌足球的单价为 y 元,

$$\text{依题意得: } \begin{cases} 50x + 25y = 4500 \\ y = x + 30 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 50 \\ y = 80 \end{cases}.$$

答: 购买一个 A 种品牌的足球需要 50 元, 购买一个 B 种品牌的足球需要 80 元.

(2) 设第二次购买 A 种足球 m 个, 则购买 B 种足球 $(50-m)$ 个,

$$\text{依题意得: } \begin{cases} (50 + 4)m + 80 \times 0.9(50 - m) \leq 4500 \times 70\% \\ 50 - m \geq 23 \end{cases},$$

解得： $25 \leq m \leq 27$.

故这次学校购买足球有三种方案：

方案一：购买 A 种足球 25 个，B 种足球 25 个；

方案二：购买 A 种足球 26 个，B 种足球 24 个；

方案三：购买 A 种足球 27 个，B 种足球 23 个.

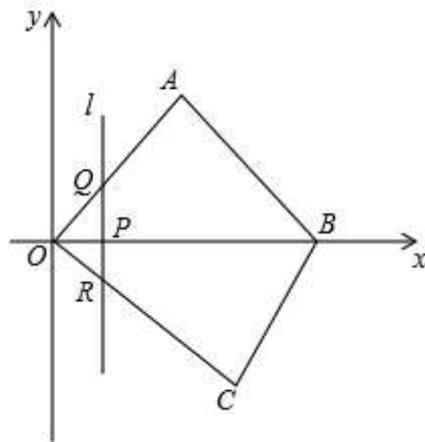
(3) ∵ 第二次购买足球时，A 种足球单价为 $50+4=54$ (元)，B 种足球单价为 $80 \times 0.9=72$ (元)，

∴ 当购买方案中 B 种足球最多时，费用最高，即方案一花钱最多.

∴ $25 \times 54 + 25 \times 72 = 3150$ (元).

答：学校在第二次购买活动中最多需要 3150 元资金.

28. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 OABC 的顶点 O 是坐标原点，点 A 在第一象限，点 C 在第四象限，点 B 在 x 轴的正半轴上. $\angle OAB = 90^\circ$ 且 $OA = AB$ ，OB，OC 的长分别是一元二次方程 $x^2 - 11x + 30 = 0$ 的两个根 ($OB > OC$).



(1) 求点 A 和点 B 的坐标.

(2) 点 P 是线段 OB 上的一个动点 (点 P 不与点 O，B 重合)，过点 P 的直线 l 与 y 轴平行，直线 l 交边 OA 或边 AB 于点 Q，交边 OC 或边 BC 于点 R. 设点 P 的横坐标为 t，线段 QR 的长度为 m. 已知 $t=4$ 时，直线 l 恰好过点 C. 当 $0 < t < 3$ 时，求 m 关于 t 的函数关系式.

(3) 当 $m=3.5$ 时，请直接写出点 P 的坐标.

解析：(1) 先利用因式分解法解方程 $x^2 - 11x + 30 = 0$ 可得到 $OB=6$ ， $OC=5$ ，则 B 点坐标为 $(6, 0)$ ，作 $AM \perp x$ 轴于 M，如图，利用等腰直角三角形的性质得 $OM=BM=AM = \frac{1}{2}OB=3$ ，于是可写出

B 点坐标：

(2) 作 $CN \perp x$ 轴于 N，如图，先利用勾股定理计算出 CN 得到 C 点坐标为 $(4, -3)$ ，再利用待定系数法分别求出直线 OC 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x$ ，直线 OA 的解析式为 $y=x$ ，则根据一次函数图

象上点的坐标特征得到 $Q(t, t)$ ， $R(t, -\frac{3}{4}t)$ ，所以 $QR = t - (-\frac{3}{4}t)$ ，从而得到 m 关于 t 的函数关系式.

(3) 利用待定系数法求出直线 AB 的解析式为 $y = -x + 6$ ，直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x - 9$ ，然后分类

讨论：当 $0 < t < 3$ 时，利用 $\frac{7}{4}t = 3.5$ 可求出 t 得到 P 点坐标；

当 $3 \leq t < 4$ 时, 则 $Q(t, -t+6)$, $R(t, -\frac{3}{4}t)$, 于是得到 $-t+6-(-\frac{3}{4}t)=3.5$, 解得 $t=10$, 不满足 t 的

范围舍去; 当 $4 \leq t < 6$ 时, 则 $Q(t, -t+6)$, $R(t, \frac{3}{2}t-9)$, 所以 $-t+6-(\frac{3}{2}t-9)=3.5$, 然后解方程求

出 t 得到 P 点坐标.

答案: (1) \because 方程 $x^2-11x+30=0$ 的解为 $x_1=5$, $x_2=6$,

$\therefore OB=6$, $OC=5$,

$\therefore B$ 点坐标为 $(6, 0)$,

作 $AM \perp x$ 轴于 M , 如图,

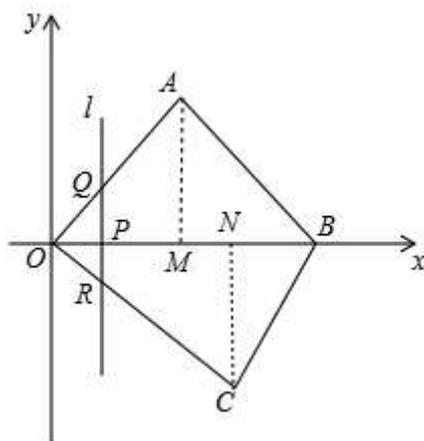
$\because \angle OAB=90^\circ$ 且 $OA=AB$,

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore OM=BM=AM=\frac{1}{2}OB=3$,

$\therefore B$ 点坐标为 $(3, 3)$;

(2) 作 $CN \perp x$ 轴于 N , 如图,



$\because t=4$ 时, 直线 l 恰好过点 C ,

$\therefore ON=4$,

在 $Rt\triangle OCN$ 中, $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(4, -3)$,

设直线 OC 的解析式为 $y=kx$,

把 $C(4, -3)$ 代入得 $4k=-3$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$,

\therefore 直线 OC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x$,

设直线 OA 的解析式为 $y=ax$,

把 $A(3, 3)$ 代入得 $3a=3$, 解得 $a=1$,

\therefore 直线 OA 的解析式为 $y=x$,

$\therefore P(t, 0) (0 < t < 3)$,

$\therefore Q(t, t)$, $R(t, -\frac{3}{4}t)$,

$\therefore QR=t-(-\frac{3}{4}t)=\frac{7}{4}t$,

即 $m = \frac{7}{3}t (0 < t < 3)$;

(3) 设直线 AB 的解析式为 $y = px + q$,

把 A(3, 3), B(6, 0) 代入得 $\begin{cases} 3p + q = 36 \\ p + q = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = -1 \\ q = 6 \end{cases}$,

\therefore 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 6$,

同理可得直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x - 9$,

当 $0 < t < 3$ 时, $m = \frac{7}{3}t$, 若 $m = 3.5$, 则 $\frac{7}{3}t = 3.5$, 解得 $t = 2$, 此时 P 点坐标为 (2, 0);

当 $3 \leq t < 4$ 时, Q(t, -t+6), R(t, $-\frac{3}{4}t$),

$\therefore m = -t + 6 - (-\frac{3}{4}t) = -\frac{1}{4}t + 6$, 若 $m = 3.5$, 则 $-\frac{1}{4}t + 6 = 3.5$, 解得 $t = 10$ (不合题意舍去);

当 $4 \leq t < 6$ 时, Q(t, -t+6), R(t, $\frac{3}{2}t - 9$),

$\therefore m = -t + 6 - (\frac{3}{2}t - 9) = -\frac{5}{2}t + 15$, 若 $m = 3.5$, 则 $-\frac{5}{2}t + 15 = 3.5$, 解得 $t = \frac{23}{5}$, 此时 P 点坐标为 ($\frac{23}{5}$,

0),

综上所述, 满足条件的 P 点坐标为 (2, 0) 或 ($\frac{23}{5}$, 0).