2011年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学（文）

本试卷共5页，150分.考试时间长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知全集U=R,集合P=｛x｜x^2≤1｝,那么 $\complement_U P=$

A．(-∞, -1]　　　　B．[1, +∞）

C．[-1，1]　　　　D．（-∞，-1] ∪[1，+∞）

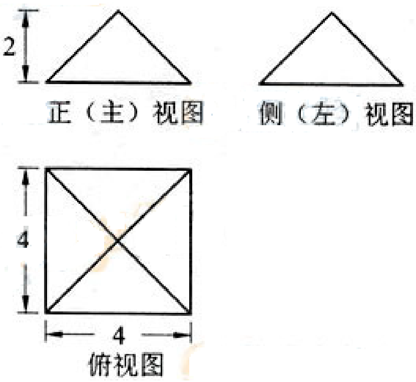
2．复数 $\dfrac{i-2}{1+2i}=$

A．i　　　　B．-i　　　　C．$-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　　　D．$-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

3．如果 $\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y<0$, 那么

A．y< x<1　　　　B．x< y<1

C．1< x<y　　　　D．1<y<x



4．若p是真命题，q是假命题，则

A．p∧q是真命题

B．p∨q是假命题

C．¬p是真命题

D．¬q是真命题

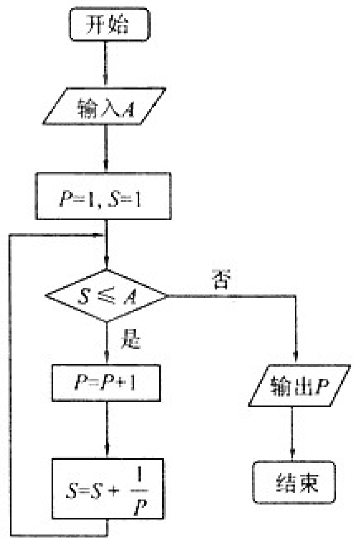
5．某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的表面积是

A．32

B．16+16$\sqrt{2}$

C．48

D．16+32$\sqrt{2}$



6．执行如图所示的程序框图，若输入A的值为2，则输入的P值为

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．5

7．某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元.若每批生产 x 件，则平均仓储时间为 $\dfrac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元.为使平均没见产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品

A．60 件　　B．80 件　　C．100 件　　D．120 件

8．已知点 A（0,2），B（2,0）．若点 C 在函数 y ＝ x 的图像上，则使得 ΔABC 的面积为 2 的点 C 的个数为

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．在 ΔABC 中.若 b=5，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，sinA=$\dfrac{1}{3}$，则 a=__________________.

10．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$b>0$）的一条渐近线的方程为 $y=2x$，则 b =_______________.

11．已知向量 a=（$\sqrt{3}$，1），b=（0，-1），c=（k，$\sqrt{3}$）.若 a-2b 与 c 共线，则 k=________________.

12. 在等比数列{a_n}中，a_1=$\dfrac{1}{2}$，a_4=4，则公比 q=______________；$a_1+a_2+\ldots+a_n$= __________________.

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geq 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$ 若关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是_______

14．设 A（0,0）,B（4,0）,C（t+4,3），D（t,3）（t∈R）.记 N（t）为平行四边形 ABCD 内部（不含边界）的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则 N（0）=___________ N（t）的所有可能取值为__________

三、解答题 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\dfrac{\pi}{6})-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期：

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16.（本小题共 13 分）

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵树.乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 X 表示.

甲组			乙组		
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

（1）如果 X=8，求乙组同学植树棵树的平均数和方差；

（2）如果 X=9，分别从甲、乙两组中随机选取一名同学，求这两名同学的植树总棵数为 19 的概率.

（注：方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\vec{x})^2+(x_2-\vec{x})^2+\cdots(x_n-\vec{x})^2]$，其中 $\vec{x}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

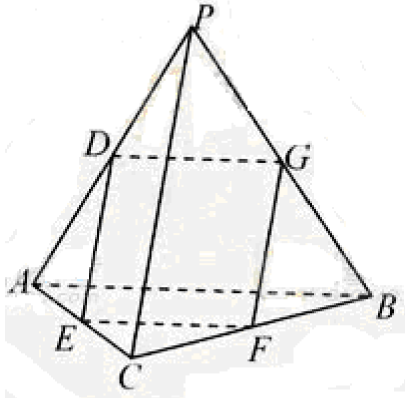
17.（本小题共 14 分）

如图，在四面体 PABC 中，PC⊥AB，PA⊥BC,点 D,E,F,G 分别是棱 AP,AC,BC,PB 的中点.

（Ⅰ）求证：DE∥平面 BCP；

（Ⅱ）求证：四边形 DEFG 为矩形；

（Ⅲ）是否存在点 Q，到四面体 PABC 六条棱的中点的距离相等？说明理由.



18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=(x-k)e^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间[0,1]上的最小值.

19．（本小题共 14 分）

已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，右焦点为（$2\sqrt{2}$,0)，斜率为 I 的直线$l$与椭圆 G 交与 A、B 两点，以 AB 为底边作等腰三角形，顶点为 P（-3,2）.

（I）求椭圆G的方程;

（II）求ΔPAB的面积.

20．（本小题共 13 分）

若数列$A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\ge 2)$满足$\left|a_{k+1}-a_k\right|=1(k=1,2,\cdots,n-1)$，则称$A_n$为$E$数列，记$S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（Ⅰ）写出一个 E 数列 A_5 满足$a_1=a_3=0$；

（Ⅱ）若$a_1=12$，n=2000，证明：E 数列A_n是递增数列的充要条件是a_n=2011；

（Ⅲ）在$a_1=4$的 E 数列A_n中，求使得$S\left(A_n\right)$=0 成立得 n 的最小值.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）D　　（2）A　　（3）D　　（4）D

（5）B　　（6）C　　（7）B　　（8）A

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$\frac{5\sqrt{2}}{3}$　　　　（10）2

（11）1　　　　（12）2　　$2^{n-1}-\frac{1}{2}$

（13）（0，1）　　　　（14）6　　　6，7，8，

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$

$=4\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π

（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$,所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$.

于是，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最大值 2;

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最小值—1.

（16）（共 13 分）

解（1）当 X=8 时，由茎叶图可知，乙组同学的植树棵数是：8，8，9，10，

所以平均数为

$\vec{x}=\frac{8+8+9+10}{4}=\frac{35}{4}$;

方差为

$s^2=\frac{1}{4}[(8-\frac{35}{4})^2+(9-\frac{35}{4})^2+(10-\frac{35}{4})^2]=\frac{11}{16}.$

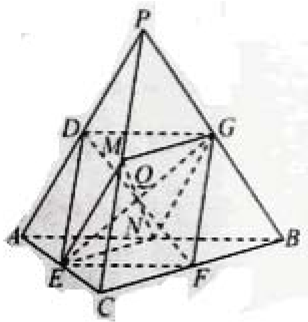
（Ⅱ）记甲组四名同学为 A_1，A_2，A_3，A_4，他们植树的棵数依次为 9，9，11，11；乙组四名同学为 B_1，B_2，B_3，B_4，他们植树的棵数依次为 9，8，9，10，分别从甲、乙两

组中随机选取一名同学，所有可能的结果有 16 个，它们是：

（A_1，B_1），（A_1，B_2），（A_1，B_3），（A_1，B_4），
（A_2，B_1），（A_2，B_2），（A_2，B_3），（A_2，B_4），
（A_3，B_1），（A_2，B_2），（A_3，B_3），（A_1，B_4），
（A_4，B_1），（A_4，B_2），（A_4，B_3），（A_4，B_4），
用 C 表示："选出的两名同学的植树总棵数为 19"这一事件，则 C 中的结果有 4 个，它们是：
（A_1，B_4），（A_2，B_4），（A_3，B_2），（A_4，B_2），故所求概率为 $P(C)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

（17）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 D，E 分别为 AP，AC 的中点，
所以 DE//PC。
又因为 DE$\not\subset$平面 BCP，
所以 DE//平面 BCP。



（Ⅱ）因为 D，E，F，G 分别为
AP，AC，BC，PB 的中点，
所以 DE//PC//FG，DG//AB//EF。
所以四边形 DEFG 为平行四边形，
又因为 PC⊥AB，
所以 DE⊥DG，
所以四边形 DEFG 为矩形。
（Ⅲ）存在点 Q 满足条件，理由如下：
连接 DF，EG，设 Q 为 EG 的中点
由（Ⅱ）知，DF∩EG=Q，且 QD=QE=QF=QG=$\frac{1}{2}$EG.
分别取 PC，AB 的中点 M，N，连接 ME，EN，NG，MG，MN。
与（Ⅱ）同理，可证四边形 MENG 为矩形，其对角线点为 EG 的中点 Q，
且 QM=QN=$\frac{1}{2}$EG，
所以 Q 为满足条件的点.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=(x-k+1)e^3$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=k-1$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	（$-\infty,k-k$ ）	$k-1$	（$(k-1,+\infty)$
$f'(x)$	——	0	+
$f(x)$	↗	$-e^{k-1}$	↗

所以，$f(x)$ 的单调递减区间是（$-\infty, k-1$）；单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$

（Ⅱ）当 $k-1 \le 0$，即 $k \le 1$ 时，函数 $f(x)$ 在[0，1]上单调递增，

所以 f（x）在区间[0，1]上的最小值为 $f(0) = -k;$

当 $0 < k-1 < 1$,即$1 < k < 2$ 时，

由（Ⅰ）知 $f(x)$在$[0, k-1]$ 上单调递减，在 $(k-1, 1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间[0，1]上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$；

当 $k-1 \ge t$,即$k = 2$ 时，函数 $f(x)$ 在[0，1]上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间[0，1]上的最小值为 $f(1) = (1-k)e.$

（19）（共 14 分）

解:（Ⅰ）由已知得 $c = 2\sqrt{2}, \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

解得 $a = 2\sqrt{3}.$

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 4.$

所以椭圆 G 的方程为 $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y = x + m.$

由 $\begin{cases} y = x + m \\ \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得

$4x^2 + 6mx + 3m^2 - 12 = 0.$

设 A、B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)(x_1 < x_2)$, AB 中点为 E$(x_0, y_0)$，

则 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{3m}{4},$

$y_0 = x_0 + m = \dfrac{m}{4}$

因为 AB 是等腰△PAB 的底边，

所以 PE⊥AB.

所以PE的斜率$k=\dfrac{2-\dfrac{m}{4}}{-3+\dfrac{3m}{4}}=-1.$

解得m=2。

此时方程①为$4x^2+12x=0.$

解得$x_1=-3,x_2=0.$

所以$y_1=-1,y_2=2.$

所以|AB|=$3\sqrt{2}$.

此时，点P（—3，2）到直线AB：$x-y+2=0$的距离$d=\dfrac{|-3-2+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},$

所以△PAB的面积S=$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{9}{2}.$

（20）（共13分）

解：（Ⅰ）0，1，0，1，0是一具满足条件的E数列A_5.

（答案不唯一，0，—1，0，1，0；0，±1，0，1，2；0，±1，0，—1，—2；0，±1，0，—1，—2，0，±1，0，—1，0都是满足条件的E的数列A_5）

（Ⅱ）必要性：因为E数列A_5是递增数列，

所以$a_{k+1}-a_k=1(k=1,2,\cdots,1999)$.

所以A_5是首项为12，公差为1的等差数列.

所以a_{2000}=12+（2000—1）×1=2011．

充分性，由于a_{2000}—a_{1000}≤1，

a_{2000}—a_{1000}≤1

……

a_2—a_1≤1

所以a_{2000}—a_t≤19999，即a_{2000}≤a_1+1999．

又因为a_1=12，a_{2000}=2011,

所以a_{2000}=a_1+1999．

故$a_{n+1}-a_n=1>0(k=1,2,\cdots,1999)$,即$A_n$是递增数列.

综上，结论得证.

（Ⅲ）对首项为4的E数列A_k，由于

$a_2\ge a_1-1=3,$

$a_3\ge a_2-1\ge 2,$

……

$a_5\ge a_7-1\ge -3.$

……

所以$a_1+a_2+\cdots+a_k>0(k=2,3,\cdots,8)$

所以对任意的首项为 4 的 E 数列 A_m，若$S(A_m)=0$,

则必有$n\geq 9$.

又$a_1=4$的 E 数列$A_1:4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4$满足$S(A_1)=0$,

所以 n 是最小值是 9.