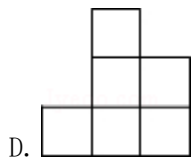
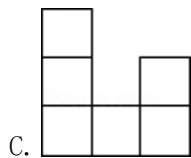
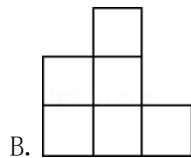
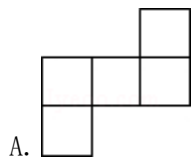
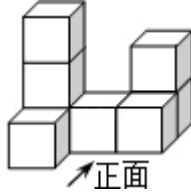


2013 年甘肃省兰州市中考真题数学

一、选择题(本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分)

1. (4 分) 如图是由八个相同小正方体组合而成的几何体，则其左视图是()



解析：从左面可看到从左往右三列小正方形的个数为：2，3，1.

答案：B.

2. (4 分) “兰州市明天降水概率是 30%”，对此消息下列说法中正确的是()

- A. 兰州市明天将有 30%的地区降水
- B. 兰州市明天将有 30%的时间降水
- C. 兰州市明天降水的可能性较小
- D. 兰州市明天肯定不降水

解析：根据概率表示某事情发生的可能性的的大小，分析可得：

- A、兰州市明天降水概率是 30%，并不是有 30%的地区降水，答案：项错误；
- B、兰州市明天降水概率是 30%，并不是有 30%的时间降水，答案：项错误；
- C、兰州市明天降水概率是 30%，即可能性比较小，答案：项正确；
- D、兰州市明天降水概率是 30%，明天有可能降水，答案：项错误.

答案：C.

3. (4 分) 二次函数 $y=2(x-1)^2+3$ 的图象的顶点坐标是()

- A. (1, 3)
- B. (-1, 3)

- C. (1, -3)
D. (-1, -3)

解析: $\because y=2(x-1)^2+3$, \therefore 其顶点坐标是(1, 3).

答案: A.

4. (4分) $\odot O_1$ 的半径为 1cm, $\odot O_2$ 的半径为 4cm, 圆心距 $O_1O_2=3$ cm, 这两圆的位置关系是()

- A. 相交
B. 内切
C. 外切
D. 内含

解析: $\because R-r=4-1=3$, $O_1O_2=3$ cm. \therefore 两圆内切.

答案: B.

5. (4分) 当 $x>0$ 时, 函数 $y=-\frac{5}{x}$ 的图象在()

- A. 第四象限
B. 第三象限
C. 第二象限
D. 第一象限

解析: \because 反比例函数 $y=-\frac{5}{x}$ 中, $k=-5<0$, \therefore 此函数的图象位于二、四象限,

$\because x>0$, \therefore 当 $x>0$ 时函数的图象位于第四象限.

答案: A

6. (4分) 下列命题中是假命题的是()

- A. 平行四边形的对边相等
B. 菱形的四条边相等
C. 矩形的对边平行且相等
D. 等腰梯形的对边相等

解析: A、根据平行四边形的性质得出平行四边形的对边相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

B、根据菱形的性质得出菱形的四条边相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

C、根据矩形的性质得出矩形的对边平行且相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

D、根据等腰梯形的上下底边不相等, 此命题是假命题, 符合题意.

答案: D.

7. (4分) 某校九年级开展“光盘行动”宣传活动, 各班级参加该活动的人数统计结果如下表, 对于这组统计数据, 下列说法中正确的是()

班级	1班	2班	3班	4班	5班	6班
人数	52	60	62	54	58	62

- A. 平均数是 58
B. 中位数是 58
C. 极差是 40

D. 众数是 60

解析：A. $\bar{x} = (52+60+62+54+58+62) \div 6 = 58$ ；故此选项正确；

B. \because 6 个数按大小排列后为：52, 54, 58, 60, 62, 62； \therefore 中位数为： $(60+58) \div 2 = 59$ ；故此选项错误；

C. 极差是 $62-52=10$ ，故此选项错误；

D. 62 出现了 2 次，最多， \therefore 众数为 62，故此选项错误；

答案：A.

8. (4 分) 用配方法解方程 $x^2-2x-1=0$ 时，配方后得的方程为()

A. $(x+1)^2=0$

B. $(x-1)^2=0$

C. $(x+1)^2=2$

D. $(x-1)^2=2$

解析：把方程 $x^2-2x-1=0$ 的常数项移到等号的右边，得到 $x^2-2x=1$ ，

方程两边同时加上一项系数一半的平方，得到 $x^2-2x+1=1+1$ 配方得 $(x-1)^2=2$ 。

答案：D.

9. (4 分) $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边，如果 $a^2+b^2=c^2$ ，那么下列结论正确的是()

A. $c \sin A = a$

B. $b \cos B = c$

C. $a \tan A = b$

D. $c \tan B = b$

解析： $\because a^2+b^2=c^2$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90^\circ$.

A、 $\sin A = \frac{a}{c}$ ，则 $c \sin A = a$. 故本选项正确；

B、 $\cos B = \frac{a}{c}$ ，则 $\cos B c = a$. 故本选项错误；

C、 $\tan A = \frac{a}{b}$ ，则 $\frac{a}{\tan A} = b$. 故本选项错误；

D、 $\tan B = \frac{b}{a}$ ，则 $a \tan B = b$. 故本选项错误.

答案：A.

10. (4 分) 据调查，2011 年 5 月兰州市的房价均价为 $7600/m^2$ ，2013 年同期将达到 $8200/m^2$ ，假设这两年兰州市房价的平均增长率为 x ，根据题意，所列方程为()

A. $7600(1+x\%)^2=8200$

B. $7600(1-x\%)^2=8200$

C. $7600(1+x)^2=8200$

D. $7600(1-x)^2=8200$

解析：2012 年同期的房价为 $7600 \times (1+x)$ ，

2013 年的房价为 $7600(1+x)(1+x) = 7600(1+x)^2$ ，

即所列的方程为 $7600(1+x)^2=8200$ ，

答案：C.

11. (4分) 已知 $A(-1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 两点在双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$ 上, 且 $y_1 > y_2$, 则 m 的取值范围

是()

A. $m < 0$

B. $m > 0$

C. $m > -\frac{3}{2}$

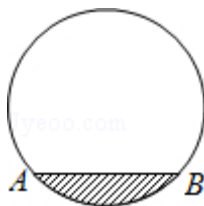
D. $m < -\frac{3}{2}$

解析: 将 $A(-1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 两点分别代入双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$ 得, $y_1 = -2m-3$, $y_2 = \frac{3+2m}{2}$,

$\because y_1 > y_2, \therefore -2m-3 > \frac{3+2m}{2}$, 解得 $m < -\frac{3}{2}$,

答案: D.

12. (4分) 如图是一圆柱形输水管的横截面, 阴影部分为有水部分, 如果水面 AB 宽为 8cm, 水面最深地方的高度为 2cm, 则该输水管的半径为()



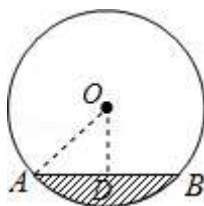
A. 3cm

B. 4cm

C. 5cm

D. 6cm

解析: 如图所示: 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D , 连接 OA ,

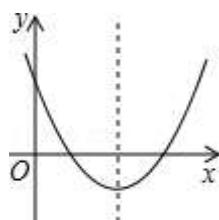


$\because OD \perp AB, \therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm},$

设 $OA = r$, 则 $OD = r - 2$, 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OA^2 = OD^2 + AD^2$, 即 $r^2 = (r-2)^2 + 4^2$, 解得 $r = 5\text{cm}.$

答案: C.

13. (4分) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列说法不正确的是()



- A. $b^2-4ac>0$
- B. $a>0$
- C. $c>0$
- D. $-\frac{b}{2a}<0$

解析：A、正确， \because 抛物线与 x 轴有两个交点， $\therefore \Delta=b^2-4ac>0$ ；
 B、正确， \because 抛物线开口向上， $\therefore a>0$ ；
 C、正确， \because 抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴， $\therefore c>0$ ；
 D、错误， \because 抛物线的对称轴在 x 的正半轴上， $\therefore -\frac{b}{2a}>0$.

答案：D.

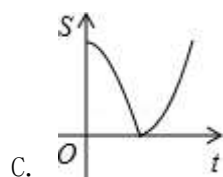
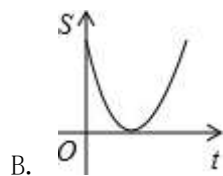
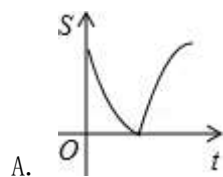
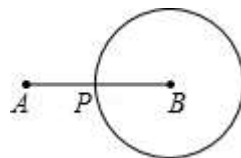
14. (4分)圆锥底面圆的半径为 3cm，其侧面展开图是半圆，则圆锥母线长为()

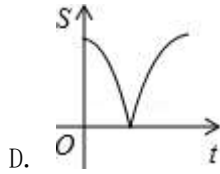
- A. 3cm
- B. 6cm
- C. 9cm
- D. 12cm

解析：圆锥的底面周长是： 6π cm，设母线长是 l ，则 $l\pi=6\pi$ ，解得： $l=6$.

答案：B.

15. (4分)如图，动点 P 从点 A 出发，沿线段 AB 运动至点 B 后，立即按原路返回，点 P 在运动过程中速度不变，则以点 B 为圆心，线段 BP 长为半径的圆的面积 S 与点 P 的运动时间 t 的函数图象大致为()





解析：不妨设线段 AB 长度为 1 个单位，点 P 的运动速度为 1 个单位，则：

(1) 当点 P 在 A→B 段运动时， $PB=1-t$ ， $S=\pi(1-t)^2(0\leq t<1)$ ；

(2) 当点 P 在 B→A 段运动时， $PB=t-1$ ， $S=\pi(t-1)^2(1\leq t\leq 2)$ 。

综上，整个运动过程中，S 与 t 的函数关系式为： $S=\pi(t-1)^2(0\leq t\leq 2)$ ，

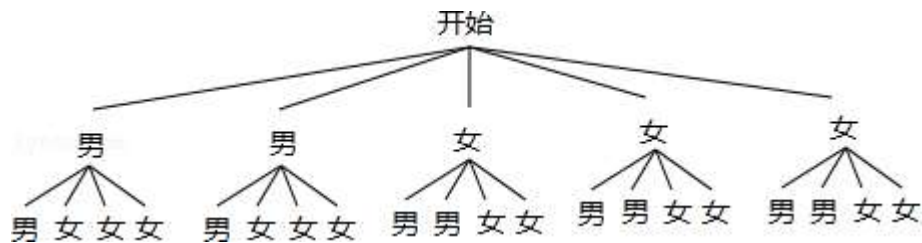
这是一个二次函数，其图象为开口向上的一段抛物线。结合题中各选项，只有 B 符合要求。

答案：B.

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

16. (4 分) 某校决定从两名男生和三名女生中选出两名同学作为兰州国际马拉松赛的志愿者，则选出一男一女的概率是_____。

解析：画树状图得：



∵ 共有 20 种等可能的结果，选出一男一女的有 12 种情况，∴ 选出一男一女的概率是： $\frac{12}{20}$

$\frac{3}{5}$

答案： $\frac{3}{5}$

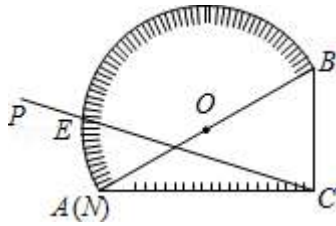
17. (4 分) 若 $|b-1|+\sqrt{a-4}=0$ ，且一元二次方程 $kx^2+ax+b=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是_____。

解析：∵ $|b-1|+\sqrt{a-4}=0$ ，∴ $b-1=0$ ， $\sqrt{a-4}=0$ ，解得， $b=1$ ， $a=4$ ；

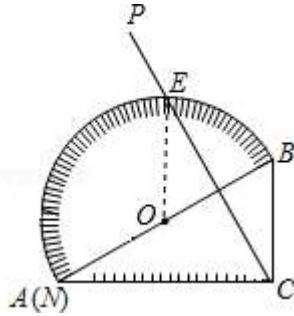
又∵ 一元二次方程 $kx^2+ax+b=0$ 有两个实数根，∴ $\Delta=a^2-4kb\geq 0$ 且 $k\neq 0$ ，
即 $16-4k\geq 0$ ，且 $k\neq 0$ ，解得， $k\leq 4$ 且 $k\neq 0$ ；

答案： $k\leq 4$ 且 $k\neq 0$ 。

18. (4 分) 如图，量角器的直径与直角三角板 ABC 的斜边 AB 重合，其中量角器 0 刻度线的端点 N 与点 A 重合，射线 CP 从 CA 处出发沿顺时针方向以每秒 3 度的速度旋转，CP 与量角器的半圆弧交于点 E，第 24 秒，点 E 在量角器上对应的读数是_____度。

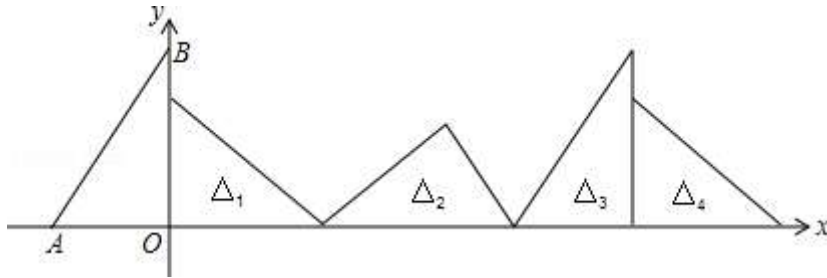


解析：连接 OE，



$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\therefore A, B, C$ 在以点 O 为圆心， AB 为直径的圆上， \therefore 点 E, A, B, C 共圆，
 $\because \angle ACE=3 \times 24=72^\circ$ ， $\therefore \angle AOE=2\angle ACE=144^\circ$ 。 \therefore 点 E 在量角器上对应的读数是： 144° 。
 答案：144.

19. (4分) 如图，在直角坐标系中，已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ，对 $\triangle OAB$ 连续作旋转变换，依次得到 \triangle_1 、 \triangle_2 、 \triangle_3 、 $\triangle_4 \dots$ ，则 \triangle_{2013} 的直角顶点的坐标为_____。

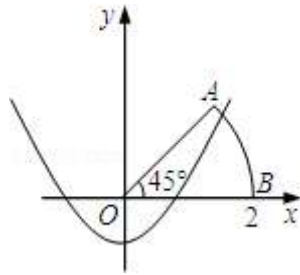


解析： \because 点 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ， $\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

由图可知，每三个三角形为一个循环组依次循环，一个循环组前进的长度为： $4+5+3=12$ ，
 $\because 2013 \div 3=671$ ， $\therefore \triangle_{2013}$ 的直角顶点是第 671 个循环组的最后一个三角形的直角顶点，
 $\because 671 \times 12=8052$ ， $\therefore \triangle_{2013}$ 的直角顶点的坐标为 $(8052, 0)$ 。

答案： $(8052, 0)$ 。

20. (4分) 如图，以扇形 OAB 的顶点 O 为原点，半径 OB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，点 B 的坐标为 $(2, 0)$ ，若抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，则实数 k 的取值范围是_____。



解析：由图可知， $\angle AOB=45^\circ$ ， \therefore 直线 OA 的解析式为 $y=x$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{2}x^2+k \end{cases} \text{ 消掉 } y \text{ 得, } x^2-2x+2k=0, \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times 2k=0,$$

即 $k=\frac{1}{2}$ 时，抛物线与 OA 有一个交点，此交点的横坐标为 1，

\because 点 B 的坐标为 (2, 0)， $\therefore OA=2$ ， \therefore 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ， \therefore 交点在线段 AO 上；

当抛物线经过点 B(2, 0) 时， $\frac{1}{2}\times 4+k=0$ ，解得 $k=-2$ ，

\therefore 要使抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，实数 k 的取值范围是 $-2 < k < \frac{1}{2}$ 。

答案： $-2 < k < \frac{1}{2}$ 。

三、解答题(本大题共 8 小题，共 70 分)

21. (10 分)

(1) 计算： $(-1)^{2013}-2^{-1}+\sin 30^\circ+(\pi-3.14)^0$

(2) 解方程： $x^2-3x-1=0$ 。

解析：(1) 先计算负整数指数幂、零指数幂以及特殊角的三角函数值，然后计算加减法；

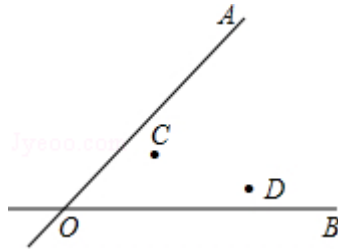
(2) 利于求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 来解方程。

答案：(1) 原式 $=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=0$ ；

(2) 关于 x 的方程 $x^2-3x-1=0$ 的二次项系数 $a=1$ ，一次项系数 $b=-3$ ，常数项 $c=-1$ ，则

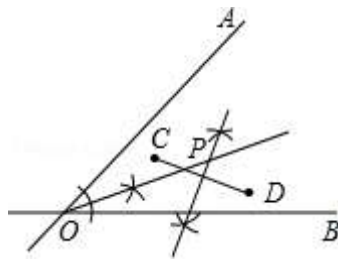
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}, \text{ 解得, } x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

22. (5 分) 如图，两条公路 OA 和 OB 相交于 O 点，在 $\angle AOB$ 的内部有工厂 C 和 D，现要修建一个货站 P，使货站 P 到两条公路 OA、OB 的距离相等，且到两工厂 C、D 的距离相等，用尺规作出货站 P 的位置。(要求：不写作法，保留作图痕迹，写出结论)

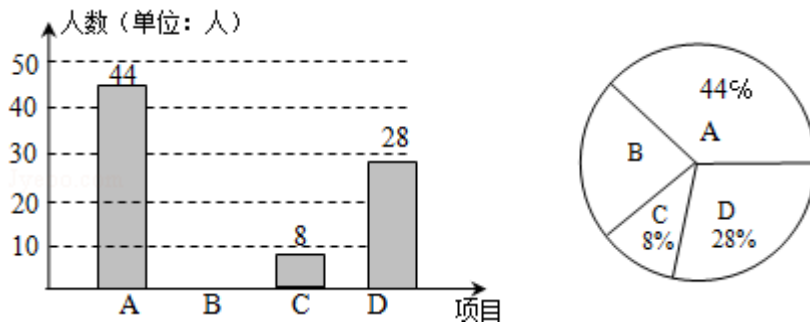


解析：根据点 P 到 $\angle AOB$ 两边距离相等，到点 C、D 的距离也相等，点 P 既在 $\angle AOB$ 的角平分线上，又在 CD 垂直平分线上，即 $\angle AOB$ 的角平分线和 CD 垂直平分线的交点处即为点 P.

答案：如图所示：作 CD 的垂直平分线， $\angle AOB$ 的角平分线的交点 P 即为所求，此时货站 P 到两条公路 OA、OB 的距离相等.



23. (6分) 在兰州市开展的“体育、艺术 2+1”活动中，某校根据实际情况，决定主要开设 A：乒乓球，B：篮球，C：跑步，D：跳绳这四种运动项目. 为了解学生喜欢哪一种项目，随机抽取了部分学生进行调查，并将调查结果绘制成如图甲、乙所示的条形统计图和扇形统计图. 请你结合图中的信息解答下列问题：



(1) 样本中喜欢 B 项目的人数百分比是_____，其所在扇形统计图中的圆心角的度数是_____；

(2) 把条形统计图补充完整；

(3) 已知该校有 1000 人，根据样本估计全校喜欢乒乓球的人数是多少？

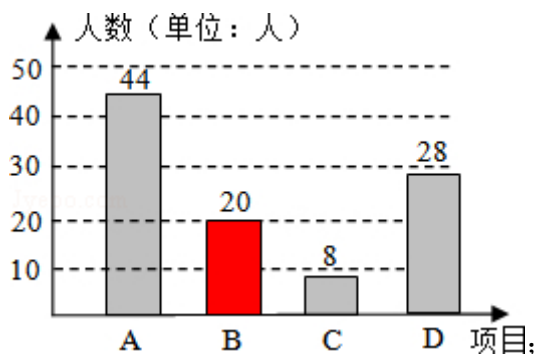
解析：(1) 利用 1 减去其它各组所占的比例即可求得喜欢 B 项目的人数百分比，利用百分比乘以 360 度即可求得扇形的圆心角的度数；

(2) 根据喜欢 A 的有 44 人，占 44% 即可求得调查的总人数，乘以对应的百分比即可求得喜欢 B 的人数，作出统计图；

(3) 总人数 1000 乘以喜欢乒乓球的人数所占的百分比即可求解.

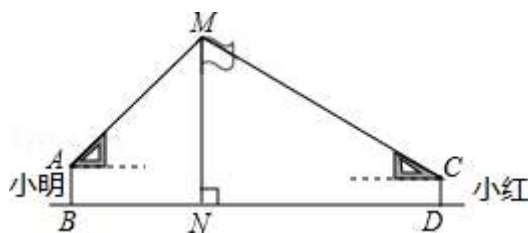
答案：(1) $1-44\%-8\%-28\%=20\%$ ，所在扇形统计图中的圆心角的度数是： $360 \times 20\%=72^\circ$ ；

(2) 调查的总人数是： $44 \div 44\%=100$ (人)，则喜欢 B 的人数是： $100 \times 20\%=20$ (人)，



(3) 全校喜欢乒乓球的人数是 $1000 \times 44\% = 440$ (人).

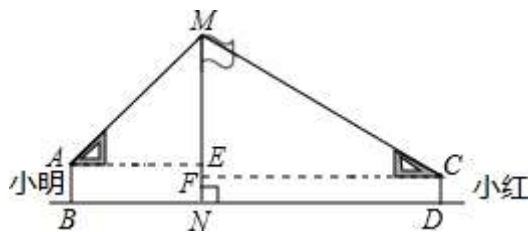
24. (8分) 如图, 在活动课上, 小明和小红合作用一副三角板来测量学校旗杆高度. 已知小明的眼睛与地面的距离 (AB) 是 1.7m, 他调整自己的位置, 设法使得三角板的一条直角边保持水平, 且斜边与旗杆顶端 M 在同一条直线上, 测得旗杆顶端 M 仰角为 45° ; 小红眼睛与地面的距离 (CD) 是 1.5m, 用同样的方法测得旗杆顶端 M 的仰角为 30° . 两人相距 28 米且位于旗杆两侧 (点 B、N、D 在同一条直线上). 求出旗杆 MN 的高度. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$, 结果保留整数.)



解析: 过点 A 作 $AE \perp MN$ 于 E, 过点 C 作 $CF \perp MN$ 于 F, 则 $EF = 0.2$ m. 由 $\triangle AEM$ 是等腰直角三角形得出 $AE = ME$, 设 $AE = ME = x$ m, 则 $MF = (x + 0.2)$ m, $FC = (28 - x)$ m. 在 $\text{Rt}\triangle MFC$ 中, 由 $\tan \angle MCF = \frac{MF}{FC}$,

得出 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x + 0.2}{28 - x}$, 解方程求出 x 的值, 则 $MN = ME + EN$.

答案: 过点 A 作 $AE \perp MN$ 于 E, 过点 C 作 $CF \perp MN$ 于 F,



则 $EF = AB - CD = 1.7 - 1.5 = 0.2$ (m),

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中, $\because \angle AEM = 90^\circ$, $\angle MAE = 45^\circ$, $\therefore AE = ME$.

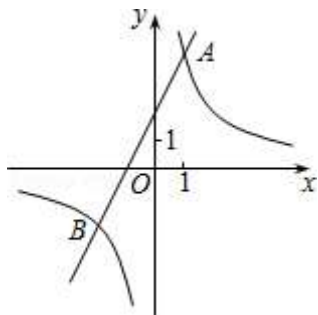
设 $AE = ME = x$ m, 则 $MF = (x + 0.2)$ m, $FC = (28 - x)$ m.

在 $\text{Rt}\triangle MFC$ 中, $\because \angle MFC = 90^\circ$, $\angle MCF = 30^\circ$,

$\therefore MF = CF \cdot \tan \angle MCF$, $\therefore x + 0.2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(28 - x)$, 解得 $x = 10$, $\therefore MN = ME + EN = 10 + 1.7 \approx 12$ 米.

答: 旗杆 MN 的高度约为 12 米.

25. (9分) 已知反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y_2 = ax + b$ 的图象交于点 A(1, 4) 和点 B(m, -2),



- (1) 求这两个函数的关系式;
- (2) 观察图象, 写出使得 $y_1 > y_2$ 成立的自变量 x 的取值范围;
- (3) 如果点 C 与点 A 关于 x 轴对称, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析: (1) 先根据点 A 的坐标求出反比例函数的解析式为 $y_1 = \frac{4}{x}$, 再求出 B 的坐标是 (-2, -2),

利用待定系数法求一次函数的解析式;

(2) 当一次函数的值小于反比例函数的值时, 直线在双曲线的下方, 直接根据图象写出一一次函数的值小于反比例函数的值 x 的取值范围 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$.

(3) 根据坐标与线段的转换可得出: AC、BD 的长, 然后根据三角形的面积公式即可求出答案.

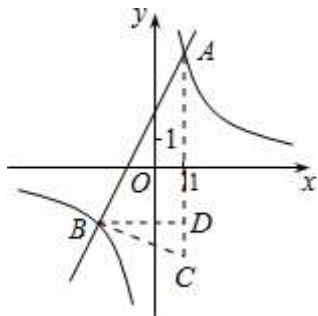
答案: (1) \because 函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象过点 A(1, 4), 即 $4 = \frac{k}{1}$, $\therefore k = 4$, 即 $y_1 = \frac{4}{x}$,

又 \because 点 B(m, -2) 在 $y_1 = \frac{4}{x}$ 上, $\therefore m = -2$, $\therefore B(-2, -2)$,

又 \because 一次函数 $y_2 = ax + b$ 过 A、B 两点, 即 $\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = 4 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \therefore y_2 = 2x + 2$.

综上所述可得 $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = 2x + 2$.

(2) 要使 $y_1 > y_2$, 即函数 y_1 的图象总在函数 y_2 的图象上方, 如图所示: 当 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$ 时 $y_1 > y_2$.



(3) 由图形及题意可得: $AC = 8$, $BD = 3$, $\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$.

26. (10分) 如图 1, 在 $\triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$, $OB = 8$. 以 OB 为边, 在 $\triangle OAB$ 外作等边 $\triangle OBC$, D 是 OB 的中点, 连接 AD 并延长交 OC 于 E .

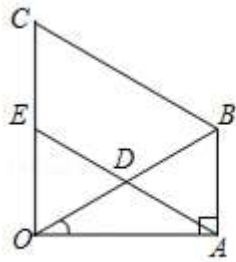


图1

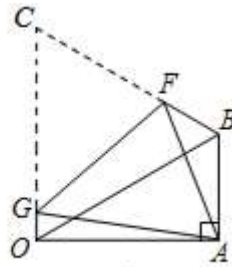


图2

(1) 求证：四边形 ABCE 是平行四边形；

(2) 如图 2，将图 1 中的四边形 ABCO 折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕为 FG，求 OG 的长。

解析：(1) 首先根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半可得 $DO=DA$ ，再根据等边对等角可得 $\angle DAO=\angle DOA=30^\circ$ ，进而算出 $\angle AEO=60^\circ$ ，再证明 $BC \parallel AE$ ， $CO \parallel AB$ ，进而证出四边形 ABCE 是平行四边形；

(2) 设 $OG=x$ ，由折叠可得： $AG=GC=8-x$ ，再利用三角函数可计算出 AO，再利用勾股定理计算出 OG 的长即可。

答案：(1) \because Rt $\triangle OAB$ 中，D 为 OB 的中点， $\therefore AD=\frac{1}{2}OB$ ， $OD=BD=\frac{1}{2}OB$ ， $\therefore DO=DA$ ，

$\therefore \angle DAO=\angle DOA=30^\circ$ ， $\angle EOA=90^\circ$ ， $\therefore \angle AEO=60^\circ$ ，

又 $\because \triangle OBC$ 为等边三角形， $\therefore \angle BCO=\angle AEO=60^\circ$ ， $\therefore BC \parallel AE$ ，

$\because \angle BAO=\angle COA=90^\circ$ ， $\therefore CO \parallel AB$ ， \therefore 四边形 ABCE 是平行四边形；

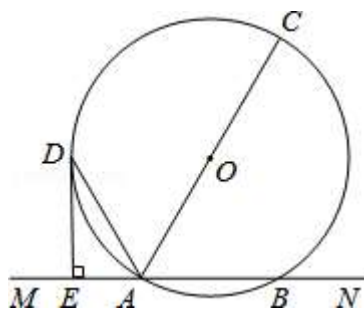
(2) 设 $OG=x$ ，由折叠可得： $AG=GC=8-x$ ，

在 Rt $\triangle ABO$ 中，

$\because \angle OAB=90^\circ$ ， $\angle AOB=30^\circ$ ， $BO=8$ ， $\therefore AO=BO \cdot \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ ，

在 Rt $\triangle OAG$ 中， $OG^2+OA^2=AG^2$ ， $x^2+(4\sqrt{3})^2=(8-x)^2$ ，解得： $x=1$ ， $\therefore OG=1$ 。

27. (10分) 已知，如图，直线 MN 交 $\odot O$ 于 A, B 两点，AC 是直径，AD 平分 $\angle CAM$ 交 $\odot O$ 于 D，过 D 作 $DE \perp MN$ 于 E。



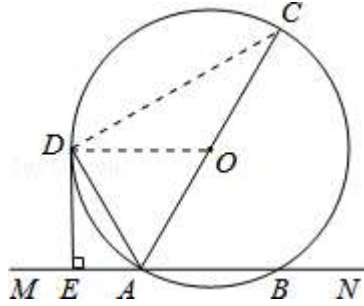
(1) 求证：DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $DE=6\text{cm}$ ， $AE=3\text{cm}$ ，求 $\odot O$ 的半径。

解析：(1) 连接 OD，根据平行线的判断方法与性质可得 $\angle ODE=\angle DEM=90^\circ$ ，且 D 在 $\odot O$ 上，故 DE 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 由直角三角形的特殊性质，可得 AD 的长，又有 $\triangle ACD \sim \triangle ADE$ 。根据相似三角形的性质列出比例式，代入数据即可求得圆的半径。

答案：(1) 连接 OD。



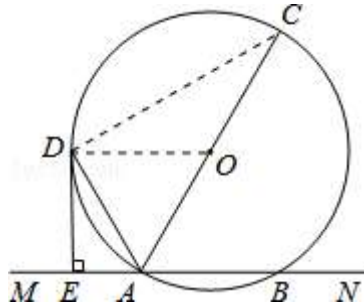
$\because OA=OD, \therefore \angle OAD=\angle ODA.$

$\because \angle OAD=\angle DAE, \therefore \angle ODA=\angle DAE. \therefore DO \parallel MN.$

$\because DE \perp MN, \therefore \angle ODE=\angle DEM=90^\circ.$ 即 $OD \perp DE.$

$\because D$ 在 $\odot O$ 上, OD 为 $\odot O$ 的半径, $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because \angle AED=90^\circ, DE=6, AE=3, \therefore AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}.$ 连接 $CD.$



$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADC=\angle AED=90^\circ.$

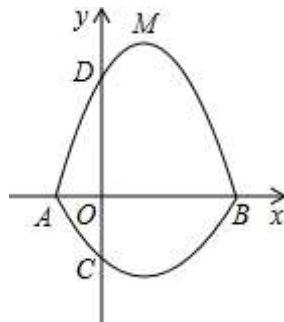
$\because \angle CAD=\angle DAE, \therefore \triangle ACD \sim \triangle ADE. \therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AD}. \therefore \frac{3\sqrt{5}}{3}=\frac{AC}{3\sqrt{5}}.$ 则 $AC=15(\text{cm}).$

$\therefore \odot O$ 的半径是 $7.5\text{cm}.$

点评: 本题考查常见的几何题型, 包括切线的判定, 线段等量关系的证明及线段长度的求

28. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为 x 轴上两点, C, D 为 y 轴上的两点, 经过点 A, C, B 的抛物线的一部分 C_1 与经过点 A, D, B 的抛物线的一部分 C_2 组合成一条封闭曲线, 我们把这条封闭曲线成为“蛋线”. 已知点 C 的坐标为 $(0, -\frac{3}{2})$, 点 M 是抛物线 C_2 :

$y=mx^2-2mx-3m(m<0)$ 的顶点.



(1) 求 A, B 两点的坐标;

(2) “蛋线”在第四象限上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PBC$ 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当 $\triangle BDM$ 为直角三角形时, 求 m 的值.

解析: (1) 将 $y=mx^2-2mx-3m$ 化为交点式, 即可得到 A、B 两点的坐标;

(2) 先用待定系数法得到抛物线 C_1 的解析式, 过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q, 用待定系数法得到直线 BC 的解析式, 再根据三角形的面积公式和配方法得到 $\triangle PBC$ 面积的最大值;

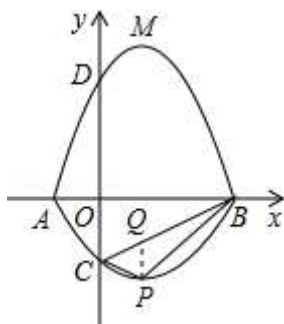
(3) 先表示出 DM^2 , BD^2 , MB^2 , 再分两种情况: ① $DM^2+BD^2=MB^2$ 时; ② $DM^2+MB^2=BD^2$ 时, 讨论即可求得 m 的值.

答案: (1) $y=mx^2-2mx-3m=m(x-3)(x+1)$,

$\because m \neq 0, \therefore$ 当 $y=0$ 时, $x_1=-1, x_2=3, \therefore A(-1, 0), B(3, 0)$;

$$(2) \text{ 设 } C_1: y=ax^2+bx+c, \text{ 将 A、B、C 三点的坐标代入得: } \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

故 $C_1: y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$. 如图: 过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q,



由 B、C 的坐标可得直线 BC 的解析式为: $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$,

设 $P(x, \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})$, 则 $Q(x, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$, $PQ=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$,

$$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PQ \cdot OB=\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x) \times 3=-\frac{3}{4}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{16}$$

当 $x=\frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 有最大值, $S_{\max}=\frac{27}{16}$, $\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2-\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}=-\frac{15}{8}$, $P(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8})$;

(3) $y=mx^2-2mx-3m=m(x-1)^2-4m$, 顶点 M 坐标 $(1, -4m)$,

当 $x=0$ 时, $y=-3m, \therefore D(0, -3m), B(3, 0)$,

$$\therefore DM^2=(0-1)^2+(-3m+4m)^2=m^2+1, MB^2=(3-1)^2+(0+4m)^2=16m^2+4,$$

$$BD^2=(3-0)^2+(0+3m)^2=9m^2+9,$$

当 $\triangle BDM$ 为 $Rt\triangle$ 时有: $DM^2+BD^2=MB^2$ 或 $DM^2+MB^2=BD^2$.

① $DM^2+BD^2=MB^2$ 时有: $m^2+1+9m^2+9=16m^2+4$, 解得 $m=-1$ ($\because m < 0, \therefore m=1$ 舍去);

② $DM^2+MB^2=BD^2$ 时有: $m^2+1+16m^2+4=9m^2+9$, 解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 舍去).

综上, $m=-1$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\triangle BDM$ 为直角三角形.