2014年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）数学理

一、选择题(共10小题，每小题5分，满分50分)

1.已知a，b∈R，i是虚数单位，若a-i与2+bi互为共轭复数，则$(a+bi)^2$=(　　)
A.5-4i
B.5+4i
C.3-4i
D.3+4i
解析：∵a-i与2+bi互为共轭复数，则a=2、b=1，∴$(a+bi)^2=(2+i)^2=3+4i$，
答案：D.

2.设集合A={x｜｜x-1｜<2}，B={y｜$y=2^x$，x∈[0，2]}，则A∩B=(　　)
A.[0，2]
B.(1，3)
C.[1，3)
D.(1，4)
解析：A={x｜｜x-1｜<2}={x｜-1<x<3}，B={y｜$y=2^x$，x∈[0，2]}={y｜1≤y≤4}，则A∩B={x｜1≤y<3}，
答案：C

3.函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$的定义域为(　　)
A.(0，$\frac{1}{2}$)
B.(2，+∞)
C.(0，$\frac{1}{2}$)∪(2，+∞)
D.(0，$\frac{1}{2}$]∪[2，+∞)
解析：要使函数有意义，则$(\log_2 x)^2-1>0$，
即$\log_2x>1$或$\log_2x<-1$，解得x>2或0<x<$\frac{1}{2}$，即函数的定义域为(0，$\frac{1}{2}$)∪(2，+∞)，
答案：C

4.用反证法证明命题“设a，b为实数，则方程$x^3+ax+b=0$至少有一个实根”时，要做的假设是(　　)
A.方程$x^3+ax+b=0$没有实根
B.方程$x^3+ax+b=0$至多有一个实根
C.方程$x^3+ax+b=0$至多有两个实根
D.方程$x^3+ax+b=0$恰好有两个实根

解析：反证法证明问题时，反设实际是命题的否定，

∴用反证法证明命题“设 a，b 为实数，则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时，要做的假设是：方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根.

答案：A.

5.已知实数 x，y 满足 $a^x<a^y(0<a<1)$，下列关系式恒成立的是(　　)

A. $\frac{1}{x^2+1}>\frac{1}{y^2+1}$

B. $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$

C. $\sin x>\sin y$

D. $x^3>y^3$

解析：∵实数 x，y 满足 $a^x<a^y(0<a<1)$，∴$x>y$，

A.若 $\frac{1}{x^2+1}>\frac{1}{y^2+1}$，则等价为 $x^2+1<y^2+1$，即 $x^2<y^2$，当 $x=1$，$y=-1$ 时，满足 $x>y$，但 $x^2<y^2$ 不成立.

B.若 $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$，则等价为 $x^2>y^2$ 成立，当 $x=1$，$y=-1$ 时，满足 $x>y$，但 $x^2>y^2$ 不成立.

C.当 $x=\pi$，$y=\frac{\pi}{2}$ 时，满足 $x>y$，但 $\sin x>\sin y$ 不成立.

D.当 $x>y$ 时，$x^3>y^3$，恒成立，

答案：D.

6.直线 $y=4x$ 与曲线 $y=x^3$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为(　　)

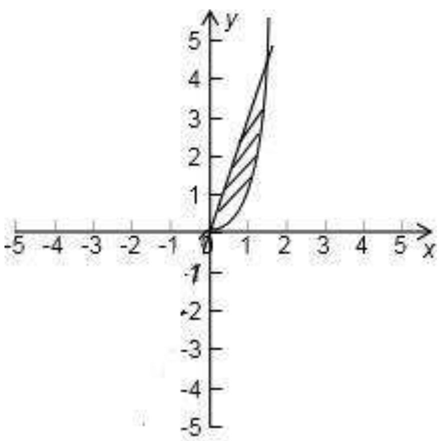
A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. 2

D. 4

解析：先根据题意画出图形，得到积分上限为 2，积分下限为 0，

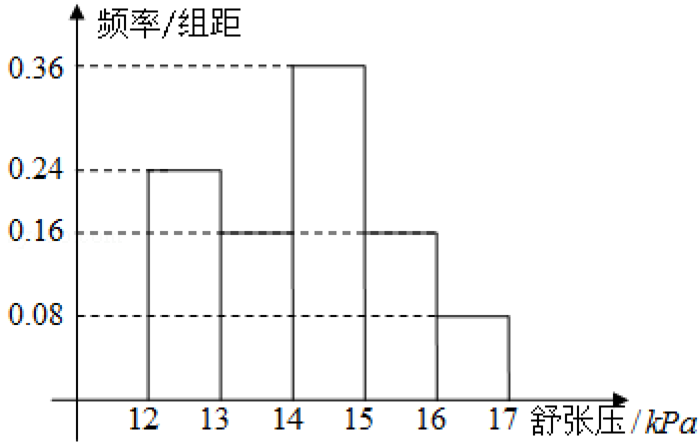


曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=4x$ 在第一象限所围成的图形的面积是 $\int_0^2(4x-x^3)dx$，

而 $\int_0^2(4x-x^3)dx=(2x^2-\frac{1}{4}x^4)|_0^2=8-4=4$∴曲边梯形的面积是 4，

答案：D.

7.为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验.所有志愿者的舒张压数据(单位：kPa)的分组区间为[12，13)，[13，14)，[14，15)，[15，16)，[16，17]，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，…，第五组.如图是根据试验数据制成的频率分布直方图.已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为(　　)



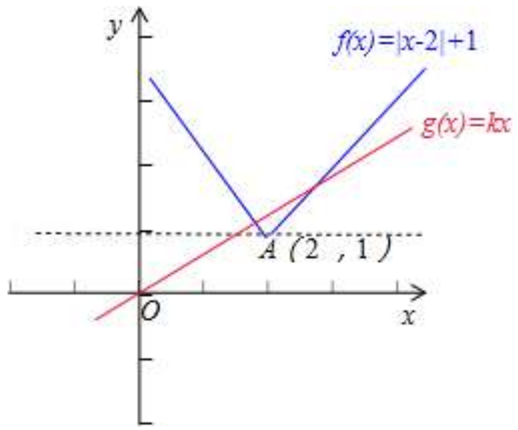
A.6
B.8
C.12
D.18
解析：由直方图可得分布在区间第一组与第二组共有 20 人，分布在区间第一组与第二组的频率分别为 0.24，0.16，所以第一组有 12 人，第二组 8 人，第三组的频率为 0.36，所以第三组的人数：18 人，
第三组中没有疗效的有 6 人，
第三组中有疗效的有 12 人.
答案：C.

8.已知函数 $f(x)=|x-2|+1$，$g(x)=kx$.若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根，则实数 k 的取值范围是(　　)

A.$(0,\ \frac{1}{2})$

B.$(\frac{1}{2},\ 1)$

C.(1，2)
D.(2，+∞)
解析：由题意可得函数 f(x)的图象(蓝线)
和函数 g(x)的图象(红线)有两个交点，如图所示：$K_{OA}=\frac{1}{2}$，数形结合可得 $\frac{1}{2}<k<1$，



答案：B.

9.已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\2x-y-3\geqslant 0\end{cases}$，当目标函数z=ax+by(a＞0，b＞0)在该约束条件下取到最小值$2\sqrt{5}$时，a^2+b^2的最小值为(　　)

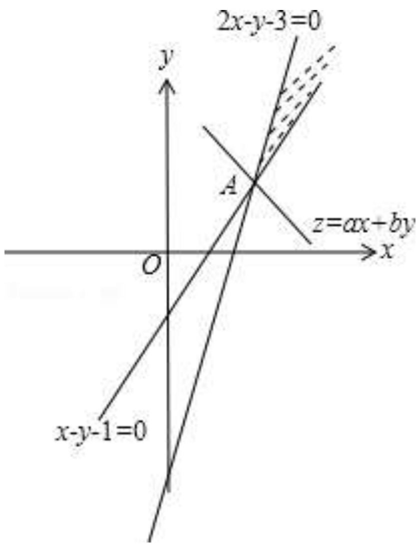
A. 5

B. 4

C. $\sqrt{5}$

D. 2

解析：由约束条件$\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\2x-y-3\geqslant 0\end{cases}$作可行域如图，



联立$\begin{cases}x-y-1=0\\2x-y-3=0\end{cases}$，解得：A(2，1).

化目标函数为直线方程得：$y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$(b＞0).

由图可知，当直线$y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$过A点时，直线在y轴上的截距最小，z最小.∴$2a+b=2\sqrt{5}$.

即 $2a+b-2\sqrt{5}=0$. 则 a^2+b^2 的最小值为 $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2=4$.

答案：B.

10. 已知 a＞b＞0，椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 C_2 的渐近线方程为(　　)

A. $x\pm\sqrt{2}y=0$
B. $\sqrt{2}x\pm y=0$
C. $x\pm 2y=0$
D. $2x\pm y=0$

解析：a＞b＞0，椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 的离心率为：$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，

双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$C_2$ 的离心率为：$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，

∵C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

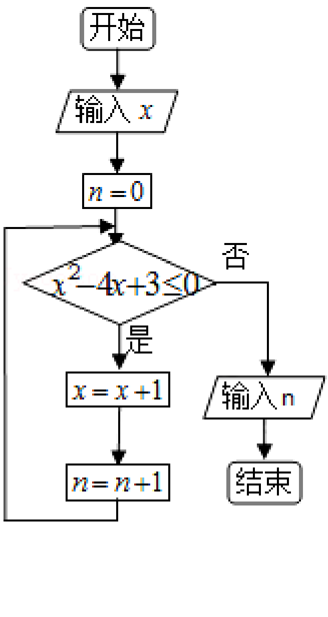
∴ $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{1}{2}$，$\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

C_2 的渐近线方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$.

答案：A.

二、填空题(共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

11. 执行如图程序框图，若输入的 x 的值为 1，则输出的 n 的值为_______.



解析：循环前输入的 x 的值为 1，
第 1 次循环，$x^2-4x+3=0\leqslant 0$，
满足判断框条件，x=2，n=1，$x^2-4x+3=-1\leqslant 0$，
满足判断框条件，x=3，n=2，$x^2-4x+3=0\leqslant 0$
满足判断框条件，x=4，n=3，$x^2-4x+3=3>0$，不满足判断框条件，
输出 n：3.
答案：3.

12.若△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$，当 $A=\frac{\pi}{6}$时，△ABC 的面积为_______.

解析：△ABC 中，∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=\tan A$，

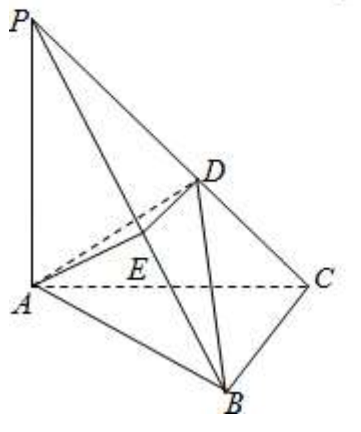
∴当 $A=\frac{\pi}{6}$时，有 $AB\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $AB\cdot AC=\frac{2}{3}$，

△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

答案：$\frac{1}{6}$.

13.三棱锥 P-ABC 中，D，E 分别为 PB，PC 的中点，记三棱锥 D-ABE 的体积为 V_1，P-ABC 的体积为 V_2，则$\frac{V_1}{V_2}$=_______.

解析：如图，三棱锥 P-ABC 中，D，E 分别为 PB，PC 的中点，



三棱锥 D-ABE 的体积为 V_1，P-ABC 的体积为 V_2，

∴A 到底面 PBC 的距离不变，底面 BDE 底面积是 PBC 面积的$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{1}{4}$，∴$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BDE}}{\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}}=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$.

14. 若$(ax^2+\frac{b}{x})^6$的展开式中x^3项的系数为20，则a^2+b^2的最小值为______.

解析：$(ax^2+\frac{b}{x})^6$的展开式中x^3项的系数为20，

所以$T_{r+1}=C_6^r(ax^2)^{6-r}(\frac{b}{x})^r=C_6^r a^{6-r}b^r x^{12-3r}$，

令12-3r=3，∴r=3，$C_6^3a^3b^3=20$，∴ab=1，

$a^2+b^2\geq 2ab=2$，当且仅当a=b=1时取等号. a^2+b^2的最小值为：2.

答案：2.

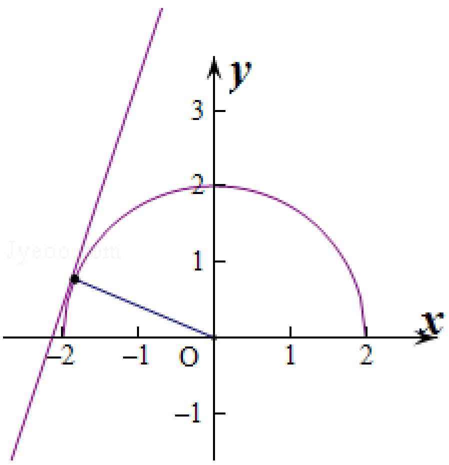
15. 已知函数y=f(x)(x∈R)，对函数y=g(x)(x∈I)，定义g(x)关于f(x)的“对称函数”为函数y=h(x)(x∈I)，y=h(x)满足：对任意x∈I，两个点(x，h(x))，(x，g(x))关于点(x，f(x))对称. 若h(x)是$g(x)=\sqrt{4-x^2}$关于f(x)=3x+b的“对称函数”，且h(x)>g(x)恒成立，则实数b的取值范围是______.

解析：根据“对称函数”的定义可知，$\frac{h(x)+\sqrt{4-x^2}}{2}=3x+b$，即$h(x)=6x+2b-\sqrt{4-x^2}$，

若h(x)>g(x)恒成立，则等价为$6x+2b-\sqrt{4-x^2}>\sqrt{4-x^2}$，即$3x+b>\sqrt{4-x^2}$恒成立，

设y=3x+b，$y=\sqrt{4-x^2}$，

作出两个函数对应的图象如图，



当直线和上半圆相切时，圆心到直线的距离$d=\frac{|b|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{10}}=2$，

即$|b|=2\sqrt{10}$，∴$b=2\sqrt{10}$或$-2\sqrt{10}$，(舍去)，

即要使h(x)>g(x)恒成立，则$b>2\sqrt{10}$，即实数b的取值范围是$(2\sqrt{10}，+\infty)$，

答案：$(2\sqrt{10}，+\infty)$

三、解答题(共6小题，满分75分)

16.(12 分)已知向量 $\overrightarrow{a}$=(m，cos2x)，$\overrightarrow{b}$=(sin2x，n)，函数 f(x)=$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，且 y=f(x)的图象过点($\frac{\pi}{12}$，$\sqrt{3}$)和点($\frac{2\pi}{3}$，-2)．

(Ⅰ)求 m，n 的值；

(Ⅱ)将 y=f(x)的图象向左平移 φ(0＜φ＜π)个单位后得到函数 y=g(x)的图象，若 y=g(x)图象上的最高点到点(0，3)的距离的最小值为 1，求 y=g(x)的单调递增区间.

解析：(Ⅰ)由题意可得 函数 f(x)=msin2x+ncos2x，再由 y=f(x)的图象过点($\frac{\pi}{12}$，$\sqrt{3}$)和点($\frac{2\pi}{3}$，-2)，解方程组求得 m、n 的值.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 f(x)=2sin(2x+$\frac{\pi}{6}$)，根据函数 y=Asin(ωx+φ)的图象变换规律求得 g(x)=2sin(2x+2φ+$\frac{\pi}{6}$)的图象，再由函数 g(x)的一个最高点在 y 轴上，求得 φ=$\frac{\pi}{6}$，可得 g(x)=2cos2x.令 2kπ－π≤2x≤2kπ，k∈Z，求得 x 的范围，可得 g(x)的增区间.

答案：(Ⅰ)由题意可得 函数 f(x)=$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$=msin2x+ncos2x，

再由 y=f(x)的图象过点($\frac{\pi}{12}$，$\sqrt{3}$)和点($\frac{2\pi}{3}$，-2)，可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=\sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n=-2\end{cases}$.

解得 m=$\sqrt{3}$，n=1.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 f(x)=$\sqrt{3}$sin2x+cos2x=2($\frac{\sqrt{3}}{2}$sin2x+$\frac{1}{2}$cos2x)=2sin(2x+$\frac{\pi}{6}$).

将 y=f(x)的图象向左平移 φ(0＜φ＜π)个单位后，

得到函数 g(x)=2sin[2(x+φ)+$\frac{\pi}{6}$]=2sin(2x+2φ+$\frac{\pi}{6}$)的图象，显然函数 g(x)最高点的纵坐标为 1.

y=g(x)图象上各最高点到点(0，3)的距离的最小值为 1，

故函数 g(x)的一个最高点在 y 轴上，

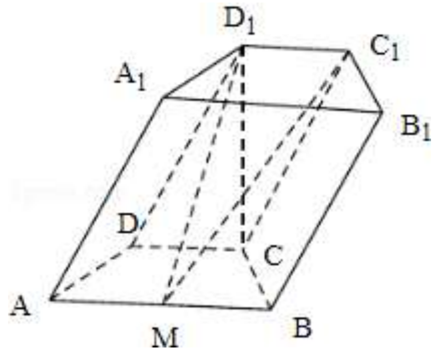
∴2φ+$\frac{\pi}{6}$=2kπ+$\frac{\pi}{2}$，k∈Z，结合 0＜φ＜π，可得 φ=$\frac{\pi}{6}$，

故 g(x)=2sin(2x+$\frac{\pi}{2}$)=2cos2x.

令 2kπ－π≤2x≤2kπ，k∈Z，求得 kπ-$\frac{\pi}{2}$≤x≤kπ，

故 y=g(x)的单调递增区间是[kπ-$\frac{\pi}{2}$，kπ]，k∈Z.

17.(12 分)如图，在四棱柱 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，底面 ABCD 是等腰梯形，∠DAB=60°，AB=2CD=2，M 是线段 AB 的中点.



(Ⅰ)求证：C_1M∥平面 A_1ADD_1；

(Ⅱ)若 CD_1 垂直于平面 ABCD 且 $CD_1=\sqrt{3}$,求平面 C_1D_1M 和平面 ABCD 所成的角(锐角)的余弦值.

解析：(Ⅰ)连接 AD_1，易证 AMC_1D_1 为平行四边形，利用线面平行的判定定理即可证得 C_1M∥平面 A_1ADD_1；

(Ⅱ)作 CP⊥AB 于 P，以 C 为原点，CD 为 x 轴，CP 为 y 轴，CD_1 为 z 轴建立空间坐标系，易求 $C_1(-1，0，\sqrt{3})$，D_1，$(0，0，\sqrt{3})$，$M(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，0)$，$\overrightarrow{C_1D_1}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{D_1M}=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，-\sqrt{3})$，设平面 C_1D_1M 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x_1，y_1，z_1)$，可求得 $\overrightarrow{n_1}=(0，2，1)$，而平面 ABCD 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1，0，0)$，从而可求得平面 C_1D_1M 和平面 ABCD 所成的角(锐角)的余弦值.

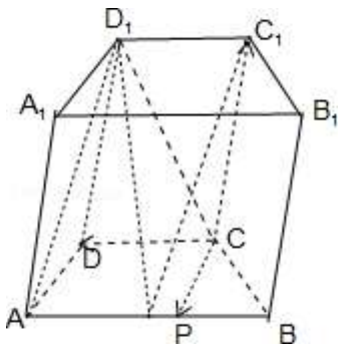
答案：(Ⅰ)连接 AD_1，∵$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为四棱柱，∴$CD \underline{\underline{\parallel}} C_1D_1$，

又 M 为 AB 的中点，∴AM=1.∴CD∥AM，CD=AM，∴$AM \underline{\underline{\parallel}} C_1D_1$，

∴AMC_1D_1 为平行四边形，∴AD_1∥MC_1，又 $MC_1 \not\subset$ 平面 A_1ADD_1，$AD_1 \subset$ 平面 A_1ADD_1，

∴C_1M∥平面 A_1ADD_1；

(Ⅱ)作 CP⊥AB 于 P，以 C 为原点，CD 为 x 轴，CP 为 y 轴，CD_1 为 z 轴建立空间坐标系，



则 $C_1(-1，0，\sqrt{3})$，D_1，$(0，0，\sqrt{3})$，$M(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，0)$，

∴$\overrightarrow{C_1D_1}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{D_1M}=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，-\sqrt{3})$，

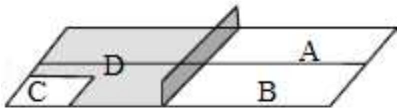
设平面 C_1D_1M 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x_1，y_1，z_1)$，

则$\begin{cases} x_1=0 \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-\sqrt{3}z_1=0 \end{cases}$，∴$\overrightarrow{n_1}$=(0，2，1).

显然平面ABCD的法向量$\overrightarrow{n_2}$=(1，0，0)，cos<$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$>|=$\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

显然二面角为锐角，∴平面C_1D_1M和平面ABCD所成的角(锐角)的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18.(12分)乒乓球台面被网分成甲、乙两部分，如图，甲上有两个不相交的区域A，B，乙被划分为两个不相交的区域C，D，某次测试要求队员接到落点在甲上的来球后向乙回球，规定：回球一次，落点在C上记3分，在D上记1分，其它情况记0分.对落点在A上的来球，小明回球的落点在C上的概率为$\frac{1}{2}$，在D上的概率为$\frac{1}{3}$；对落点在B上的来球，小明回球的落点在C上的概率为$\frac{1}{5}$，在D上的概率为$\frac{3}{5}$.假设共有两次来球且落在A，B上各一次，小明的两次回球互不影响，求：



(Ⅰ)小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率；
(Ⅱ)两次回球结束后，小明得分之和ξ的分布列与数学期望.
解析：(Ⅰ)分别求出回球前落点在A上和B上时，回球落点在乙上的概率，进而根据分类分布原理，可得小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率；
(Ⅱ)两次回球结束后，小明得分之和ξ的取值有0，1，2，3，4，6六种情况，求出随机变量ξ的分布列，代入数学期望公式可得其数学期望Eξ.
答案：(Ⅰ)小明回球前落点在A上，回球落点在乙上的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$,

回球前落点在B上，回球落点在乙上的概率为$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$,

故小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率P=$\frac{5}{6}\times(1-\frac{4}{5})+(1-\frac{5}{6})\times\frac{4}{5}=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}=\frac{3}{10}$.

(Ⅱ)ξ的可能取值为0，1，2，3，4，6

其中P(ξ=0)=$(1-\frac{5}{6})\times(1-\frac{4}{5})=\frac{1}{30}$;

P(ξ=1)=$\frac{1}{3}\times(1-\frac{4}{5})+(1-\frac{5}{6})\times\frac{3}{5}=\frac{1}{6}$;

P(ξ=2)=$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$;

P(ξ=3)=$\frac{1}{2}\times(1-\frac{4}{5})+(1-\frac{5}{6})\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$;

$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{30}$;

$P(\xi=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$;

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{10}$

故 ξ 的数学期望为 $E(\xi)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{11}{30}+6\times\frac{1}{10}=\frac{91}{30}$;

19.(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，且 S_1，S_2，S_4成等比数列.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)令 $b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解析：(Ⅰ)利用等差数列与等比数列的通项公式及其前 n 项和公式即可得出；

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 $b_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$.对 n 分类讨论“裂项求和”即可得出.

答案：(Ⅰ)∵等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，

∴$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2-n+na_1$，

∵S_1，S_2，S_4成等比数列，∴ $S_2^2=S_1\cdot S_4$，

∴ $(2^2-2+2a_1)^2=a_1\cdot(4^2-4+4a_1)$，化为 $(1+a_1)^2=a_1(3+a_1)$，解得 $a_1=1$.

∴$a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 $b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{a_na_{n+1}}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$.

∴$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$.

当 n 为偶数时，$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.

当 n 为奇数时，$T_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=1+\frac{1}{2n+1}=\frac{2n+2}{2n+1}$.

20.(13 分)设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-k(\frac{2}{x}+\ln x)$(k 为常数，e=2.71828…是自然对数的底数).

(Ⅰ)当 $k\leqslant 0$ 时，求函数 f(x)的单调区间；
(Ⅱ)若函数 f(x)在(0，2)内存在两个极值点，求 k 的取值范围.
解析：(Ⅰ)求出导函数，根据导函数的正负性，求出函数的单调区间；
(Ⅱ)函数 f(x)在(0，2)内存在两个极值点，等价于它的导函数 f′(x)在(0，2)内有两个不同的零点.

答案：(Ⅰ)f(x)的定义域为(0，+∞)，∴$f'(x)=\frac{(x-2)(e^x-kx)}{x^3}(x>0)$，

当 $k\leqslant 0$ 时，$kx\leqslant 0$，∴$e^x-kx>0$，
令 $f'(x)=0$，则 x=2，∴当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；
当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，f(x)单调递增，
∴f(x)的单调递减区间为(0，2)，单调递增区间为(2，+∞).
(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$k\leqslant 0$ 时，函数 f(x)在(0，2)内单调递减，
故 f(x)在(0，2)内不存在极值点；
当 $k>0$ 时，设函数 $g(x)=e^x-kx$，$x\in[0，+\infty)$.
∵$g'(x)=e^x-k=e^x-e^{\ln k}$，
当 $0<k\leqslant 1$ 时，
当 $x\in(0，2)$时，$g'(x)=e^x-k>0$，y=g(x)单调递增，
故 f(x)在(0，2)内不存在两个极值点；
当 $k>1$ 时，
得 $x\in(0，\ln k)$时，$g'(x)<0$，函数 y=g(x)单调递减，
$x\in(\ln k，+\infty)$时，$g'(x)>0$，函数 y=g(x)单调递增，
∴函数 y=g(x)的最小值为 $g(\ln k)=k(1-\ln k)$
函数 f(x)在(0，2)内存在两个极值点

当且仅当$\begin{cases}g(0)>0\\g(\ln k)<0\\g(2)>0\\0<\ln k<2\end{cases}$ 解得：$e<k<\frac{e^2}{2}$

综上所述，函数 f(x)在(0，2)内存在两个极值点时，k 的取值范围为$(e，\frac{e^2}{2})$

21.(14 分)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，A 为 C 上异于原点的任意一点，过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B，交 x 轴的正半轴于点 D，且有丨 FA 丨=丨 FD 丨.当点 A 的横坐标为 3 时，△ADF 为正三角形.
(Ⅰ)求 C 的方程；
(Ⅱ)若直线 l_1∥l，且 l_1和 C 有且只有一个公共点 E，
(ⅰ)证明直线 AE 过定点，并求出定点坐标；
(ⅱ)△ABE 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由.
解析：(1)根据抛物线的焦半径公式，结合等边三角形的性质，求出的 p 值；

(2)(ⅰ)设出点A的坐标，求出直线AB的方程，利用直线l_1∥l，且l_1和C有且只有一个公共点E，求出点E的坐标，写出直线AE的方程，将方程化为点斜式，可求出定点；
(ⅱ) 利用弦长公式求出弦AB的长度，再求点E到直线AB的距离，得到关于面积的函数关系式，再利用基本不等式求最小值.

答案:(1)当点A的横坐标为3时，过点A作AG⊥x轴于G，$|AF|=3+\frac{p}{2}$，∴ $|FD|=|AF|=3+\frac{p}{2}$.

∵△ADF为正三角形，∴ $|FG|=\frac{1}{2}|FD|=\frac{3}{2}+\frac{p}{4}$.

又∵ $|FG|=|OG|-|OF|=3-\frac{p}{2}$，∴ $3-\frac{p}{2}=\frac{3}{2}+\frac{p}{4}$，

∴p=2. ∴C的方程为$y^2=4x$.

(2)(ⅰ)设$A(x_1，y_1)$，$|FD|=|AF|=x_1+1$，∴$D(x_1+2，0)$，∴ $k_{AB}=-\frac{y_1}{2}$.

由直线l_1∥l可设直线l_1方程为$y=-\frac{y_1}{2}x+m$，

联立方程$\begin{cases}y=-\frac{y_1}{2}x+m\\ y^2=4x\end{cases}$，消去x得$y_1y^2+8y-8m=0$ ①

由l_1和C有且只有一个公共点得$\triangle=64+32y_1m=0$，∴$y_1m=-2$，

这时方程①的解为$y=-\frac{4}{y_1}=2m$，代入$y=-\frac{y_1}{2}x+m$得$x=m^2$，∴$E(m^2，2m)$.

点A的坐标可化为 $(\frac{1}{m^2}，\frac{2}{m})$，直线AE方程为$y-2m=\frac{2m-\frac{2}{m}}{m^2-\frac{1}{m^2}}(x-m^2)$，

即$y-2m=\frac{2m}{m^2-1}(x-m^2)$，∴ $y=\frac{2m}{m^2-1}x-\frac{2m^3}{m^2-1}+2m$，∴ $y=\frac{2m}{m^2-1}x-\frac{2m}{m^2-1}$，

∴ $y=\frac{2m}{m^2-1}(x-1)$，∴直线AE过定点(1，0).

(ⅱ)直线AB的方程为$y-y_1=-\frac{y_1}{2}(x-\frac{y_1^2}{4})$，即$x=-\frac{2}{y_1}y+\frac{y_1^2}{4}+2$.

联立方程$\begin{cases}x=-\frac{2}{y_1}y+\frac{y_1^2}{4}+2\\ y^2=4x\end{cases}$，消去x得$y^2+\frac{8}{y_1}y-(y_1^2+8)=0$，

∴ $y_1+y_2=-\frac{8}{y_1}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{4}{y_1^2}}|2y_1+\frac{8}{y_1}|$,

由（i）点 E 的坐标为 $E(\frac{4}{y_1^2},\ -\frac{4}{y_1})$，

点 E 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|\frac{8}{y_1^2}+\frac{y_1^2}{4}+2-\frac{4}{y_1^2}|}{\sqrt{1+\frac{4}{y_1^2}}}=\frac{|\frac{4}{y_1^2}+\frac{y_1^2}{4}+2|}{\sqrt{1+\frac{4}{y_1^2}}}$,

∴△ABE 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}|2y_1+\frac{8}{y_1}|\cdot|\frac{4}{y_1^2}+\frac{y_1^2}{4}+2|=2|\frac{y_1}{2}+\frac{2}{y_1}|^3\geqslant 2\times 2^3\geqslant 16$,

当且仅当 $y_1=\pm 2$ 时等号成立，
∴△ABE 的面积最小值为 16.