

2018 年河南省濮阳市中考一模数学

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. -3 的相反数是()

- A. -3
- B. 3
- C. $-\frac{1}{3}$
- D. $\frac{1}{3}$

解析：-3 的相反数是 3.

答案：B

2. 今年 3 月 5 日，十三届全国人大一次会议在人民大会堂开幕，会议听取了国务院总理李克强关于政府工作的报告，其中表示，五年来，人民生活持续改善，脱贫攻坚取得决定性进展，贫困人口减少 6800 多万，易地扶贫搬迁 830 万人，贫困发生率由 10.2% 下降到 3.1%，将 830 万用科学记数法表示为()

- A. 83×10^5
- B. 0.83×10^6
- C. 8.3×10^6
- D. 8.3×10^7

解析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数. 确定 n 的值是易错点，由于 830 万有 7 位，所以可以确定 $n=7-1=6$. $830 \text{ 万}=8\ 300\ 000=8.3 \times 10^6$.

答案：C

3. 如图是由三个小正方体叠成的一个几何体，它的左视图是()



- A.
- B.
- C.
- D.

解析：从左边看第一层一个正方形，第二层一个正方形.

答案：C

4. 下列各式计算正确的是()

- A. $2ab+3ab=5ab$
- B. $(-a^2b^3)^2=a^4b^5$
- C. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{5}$
- D. $(a+1)^2=a^2+1$

解析：A、 $2ab+3ab=5ab$ ，此选项正确；

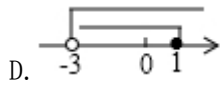
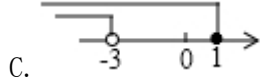
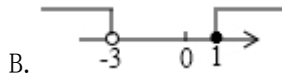
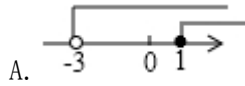
B、 $(-a^2b^3)^2 = -a^4b^6$ ，此选项错误；

C、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ，此选项错误；

D、 $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ，此选项错误.

答案：A

5. 不等式组 $\begin{cases} 2-x \geq 1 \\ 2x-1 > -7 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()



解析： $\begin{cases} 2-x \geq 1 \text{ ①} \\ 2x-1 > -7 \text{ ②} \end{cases}$ ，

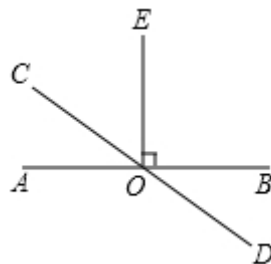
由①得： $x \leq 1$ ，

由②得： $x > -3$ ，

则不等式组的解集是 $-3 < x \leq 1$ 。

答案：D

6. 如图，直线 AB 与直线 CD 相交于点 O，E 是 $\angle COB$ 内一点，且 $OE \perp AB$ ， $\angle AOC = 35^\circ$ ，则 $\angle EOD$ 的度数是()



A. 155°

B. 145°

C. 135°

D. 125°

解析： $\because \angle AOC = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = 35^\circ$ ，

$\because EO \perp AB$ ，

$\therefore \angle EOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EOD = \angle EOB + \angle BOD = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$ 。

答案：D

7. 在学校举行“阳光少年，励志青春”的演讲比赛中，五位评委给选手小明的评分分别为：90，85，90，80，95，则这组数据的众数是()

A. 95

B. 90

C. 85

D. 80

解析：数据 90 出现了两次，次数最多，所以这组数据的众数是 90.

答案：B

8. 若关于 x 的方程 $x^2+x - a+\frac{5}{4}=0$ 有两个不相等的实数根，则满足条件的最小整数 a 的值是

()

A. - 1

B. 0

C. 1

D. 2

解析：由题意可知： $\Delta > 0$,

$$\therefore 1 - 4(-a + \frac{5}{4}) > 0,$$

解得： $a > 1$

故满足条件的最小整数 a 的值是 2.

答案：D

9. 某校组织九年级学生参加中考体育测试，共租 3 辆客车，分别编号为 1、2、3，李军和赵娟两人可任选一辆车乘坐，则两人同坐 2 号车的概率为()

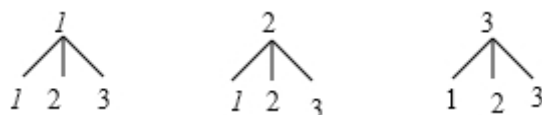
A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

解析：画树状图为：

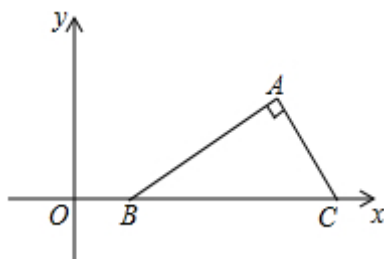


共有 9 种等可能的结果数，其中两人同坐 2 号车的结果数为 1，

所以两人同坐 2 号车的概率= $\frac{1}{9}$.

答案：A

10. 如图，在平面直角坐标系中 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 在 x 轴上，点 B 坐标为 $(1, 0)$ ， $AC=2$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ，把 $Rt\triangle ABC$ 先绕 B 点顺时针旋转 180° ，然后再向下平移 2 个单位，则 A 点的对应点 A' 的坐标为()



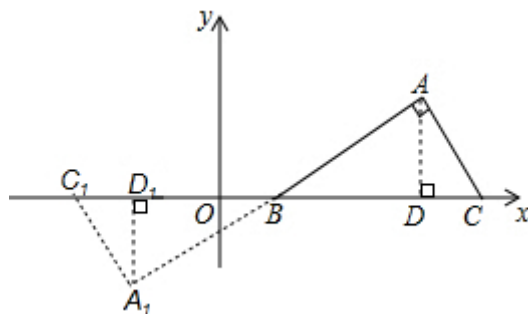
A. $(-4, -2 - \sqrt{3})$

B. $(-4, -2 + \sqrt{3})$

C. $(-2, -2 + \sqrt{3})$

D. $(-2, -2 - \sqrt{3})$

解析：作 $AD \perp BC$ ，并作出把 $Rt\triangle ABC$ 先绕 B 点顺时针旋转 180° 后所得 $\triangle A_1BC_1$ ，如图所示，



$\because AC=2, \angle ABC=30^\circ,$

$\therefore BC=4$

$\therefore AB=2\sqrt{3},$

$\therefore AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{4} = \sqrt{3},$

$\therefore BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{4} = 3,$

\therefore 点 B 坐标为 $(1, 0),$

\therefore A 点的坐标为 $(4, \sqrt{3}),$

$\therefore BD=3,$

$\therefore BD_1=3,$

$\therefore D_1$ 坐标为 $(-2, 0)$

$\therefore A_1$ 坐标为 $(-2, -\sqrt{3}),$

\therefore 再向下平移 2 个单位，

$\therefore A'$ 的坐标为 $(-2, -\sqrt{3} - 2).$

答案：D

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

11. 计算： $2\sin 30^\circ + (-1)^{-2} - |2 - \sqrt{2}| = \underline{\quad}$.

解析：原式 $= 2 \times \frac{1}{2} + 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$

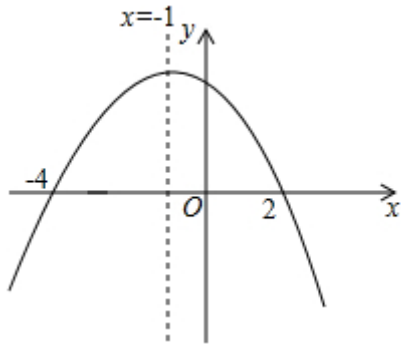
答案： $\sqrt{2}$

12. 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 的图象经过点 $(2, 0)$ ，且其对称轴为 $x=-1$ ，则使函数值 $y > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $\underline{\quad}$.

解析：如图所示： \because 图象经过点 $(2, 0)$ ，且其对称轴为 $x=-1$ ，

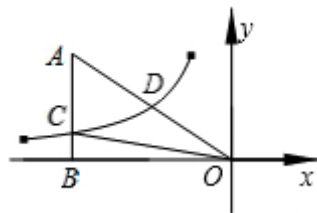
\therefore 图象与 x 轴的另一个交点为： $(-4, 0)$ ，

则使函数值 $y > 0$ 成立的 x 的取值范围是： $-4 < x < 2.$



答案： $-4 < x < 2$

13. 如图，已知双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 经过直角三角形 OAB 斜边 OA 的中点 D ，且与直角边 AB 相交于点 C 。若点 A 的坐标为 $(-6, 4)$ ，则 $\triangle AOC$ 的面积为_____。



解析： \because 点 D 为 $\triangle OAB$ 斜边 OA 的中点，且点 A 的坐标 $(-6, 4)$ ，
 \therefore 点 D 的坐标为 $(-3, 2)$ ，

把 $(-3, 2)$ 代入双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)，

可得 $k = -6$ ，

即双曲线解析式为 $y = -\frac{6}{x}$ ，

$\because AB \perp OB$ ，且点 A 的坐标 $(-6, 4)$ ，

\therefore C 点的横坐标为 -6 ，代入解析式 $y = -\frac{6}{x}$ ，

$y = 1$ ，

即点 C 坐标为 $(-6, 1)$ ，

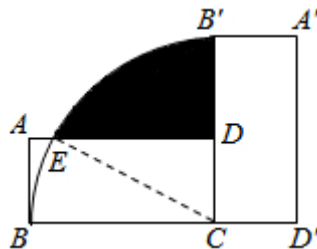
$\therefore AC = 3$ ，

又 $\because OB = 6$ ，

$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AC \times OB = 9$ 。

答案： 9

14. 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 C 沿顺时针方向旋转 90° 到矩形 $A'B'CD'$ 的位置， $AB = 2$ ， $AD = 4$ ，则阴影部分的面积为_____。



解析： \because 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD = BC = 4$ ， $CD = AB = 2$ ， $\angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore CE = BC = 4$ ，

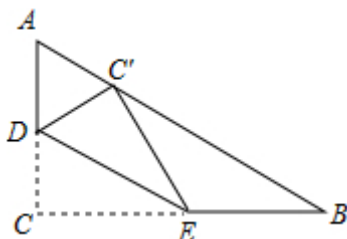
∴ CE=2CD,
 ∴ ∠DEC=30° ,
 ∴ ∠DCE=60° ,

由勾股定理得: DE=2√3 ,

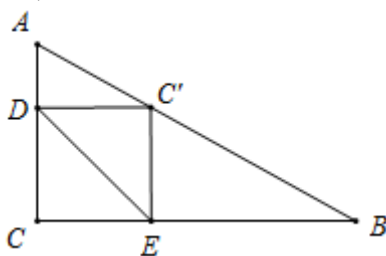
∴ 阴影部分的面积是 S=S_{扇形CEB'} - S_{△CDE} = $\frac{60\pi \times 4^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$.

答案: $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

15. 如图, 在 Rt△ABC 中, ∠C=90° , AC=3, BC=4, 点 D, E 为 AC, BC 上两个动点, 若将∠C 沿 DE 折叠, 点 C 的对应点 C' 恰好落在 AB 上, 且△ADC' 恰好为直角三角形, 则此时 CD 的长为_____.



解析: ①如图, 当∠ADC' = 90° 时, ∠ADC' = ∠C,



∴ DC' // CB,

∴ △ADC' ∽ △ACB,

又 ∵ AC=3, BC=4,

$$\therefore \frac{AD}{DC'} = \frac{3}{4},$$

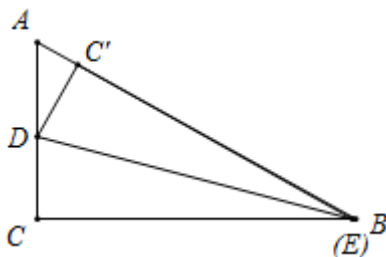
设 CD=C'D=x, 则 AD=3-x,

$$\therefore \frac{3-x}{x} = \frac{3}{4}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

经检验: $x = \frac{12}{7}$ 是所列方程的解,

$$\therefore CD = \frac{12}{7};$$

②如图, 当∠DC'A=90° 时, ∠DCB=90° ,



由折叠可得, ∠C=∠DC'E=90° ,

∴ C'B 与 CE 重合,

由∠C=∠AC'D=90° , ∠A=∠A, 可得△ADC' ∽ △ABC,
 Rt△ABC 中, AB=5,

$$\therefore \frac{AD}{C'D} = \frac{AB}{CB} = \frac{5}{4},$$

设 $CD=C'D=x$, 则 $AD=3-x$,

$$\therefore \frac{3-x}{x} = \frac{5}{4}, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{4}{3}.$$

答案: $\frac{12}{7}$ 或 $\frac{4}{3}$

三、解答题(本大题共 8 小题, 满分 75 分)

16. 先化简, 再求值: $\frac{a-3}{a^2-2a+1} \div \left(1 - \frac{2}{a-1}\right)$, 其中 $a = \sqrt{2} + 1$.

解析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 把 a 的值代入计算即可求出值.

$$\text{答案: 原式} = \frac{a-3}{(a-1)^2} \div \frac{a-3}{a-1} = \frac{a-3}{(a-1)^2} \cdot \frac{a-1}{a-3} = \frac{1}{a-1},$$

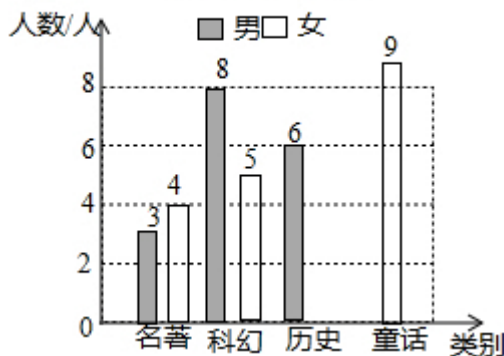
$$\text{当 } a = \sqrt{2} + 1 \text{ 时, 原式} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

17. 某校在 3 月份举行读书节活动, 鼓励学生进行有益的课外阅读, 张老师为了了解该校学生课外阅读的情况, 设计了“你最喜欢的课外阅读类型”的调查问卷, 包括“名著”“科幻”“历史”“童话”四类, 在学校随机抽取了部分学生进行调查, 被抽取的学生只能在四种类型中选择其中一类, 最后将调查结果绘制成如下两幅尚不完整的统计图.

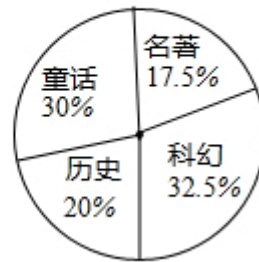
请你根据以上信息解答下列问题:

- (1) 本次调查中, 张老师一共调查了 _____ 名学生;
- (2) 求本次调查中选择“历史”类的女生人数和“童话”类的男生人数, 并将条形统计图补充完整;
- (3) 扇形图中“童话”类对应的圆心角度数为 _____;
- (4) 如果该校共有学生 360 名, 请估算该校最喜欢“名著”类和“历史”类的学生总人数.

调查结果条形统计图



调查结果扇形统计图



解析: (1) 由名著的人数及其所占百分比可得总人数;

(2) 各类别总人数减去另一性别的人数可分别求得;

(3) 360° 乘以所占百分比可得;

(4) 总人数乘以样本中名著和历史的百分比之和可得.

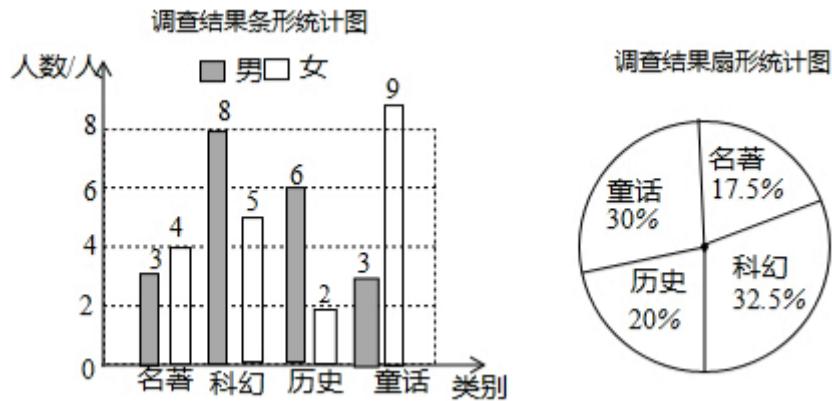
答案: (1) 调查的总人数为: $(3+4) \div 17.5\% = 40$ (人),

故答案为: 40;

(2) 选择“历史”类的女生人数为 $40 \times 20\% - 6 = 2$ (人)

选择“童话”类的男生人数为 $40 \times 30\% - 9 = 3$ (人),

补全条形图如下:



(3) 扇形图中“童话”类对应的圆心角度数为 $360^\circ \times 30\% = 108^\circ$,

故答案为: 108° ;

(4) $360 \times (17.5\% + 20\%) = 135$ (人)

答: 最喜欢“名著”和“历史”的学生总数为 135 人.

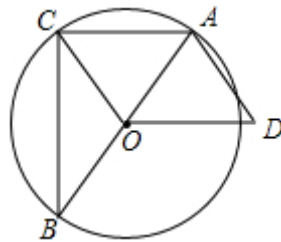
18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是直径, $OD \parallel AC$, $AD = OC$.

(1) 求证: 四边形 $OCAD$ 是平行四边形;

(2) 探究:

① 当 $\angle B = \underline{\quad}$ $^\circ$ 时, 四边形 $OCAD$ 是菱形;

② 当 $\angle B$ 满足什么条件时, AD 与 $\odot O$ 相切? 请说明理由.



解析: (1) 根据已知条件求得 $\angle OAC = \angle OCA = \angle AOD = \angle ADO$, 然后根据三角形内角和定理得出 $\angle AOC = \angle OAD$, 从而证得 $OC \parallel AD$, 即可证得结论;

(2) ① 若四边形 $OCAD$ 是菱形, 则 $AC = OC$, 从而证得 $OC = OA = AC$, 得出 $\angle AOC = 60^\circ$, 即可求得 \angle

$$B = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ ;$$

② 若 AD 与 $\odot O$ 相切, 根据切线的性质得出 $\angle OAD = 90^\circ$, 根据 $AD \parallel OC$, 内错角相等得出 \angle

$$AOC = 90^\circ, \text{ 从而求得 } \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ .$$

答案: (1) $\because OA = OC, AD = OC,$

$$\therefore OA = AD,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle AOD = \angle ADO,$$

$$\because OD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle AOD,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = \angle AOD = \angle ADO,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle OAD,$$

$$\therefore OC \parallel AD,$$

\therefore 四边形 $OCAD$ 是平行四边形;

(2) ① \because 四边形 $OCAD$ 是菱形,

$$\therefore OC = AC,$$

$$\text{又 } \because OC = OA,$$

$$\therefore OC = OA = AC,$$

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ ;$$

故答案为 30.

② $\because AD$ 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore \angle OAD = 90^\circ ,$$

$\because AD \parallel OC,$

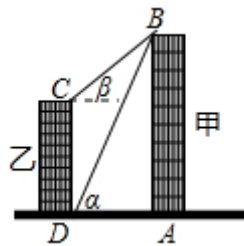
$$\therefore \angle AOC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ .$$

19. 如图, 线段 AB 、 CD 分别表示甲、乙两建筑物的高, $BA \perp AD$, $CD \perp DA$, 垂足分别为 A 、 D . 从 D 点测到 B 点的仰角 α 为 60° , 从 C 点测得 B 点的仰角 β 为 30° , 甲建筑物的高 $AB=30$ 米.

(1) 求甲、乙两建筑物之间的距离 AD .

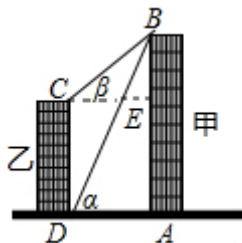
(2) 求乙建筑物的高 CD .



解析: (1) 在 $Rt\triangle ABD$ 中利用三角函数即可求解;

(2) 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 在 $Rt\triangle BCE$ 中利用三角函数求得 BE 的长, 然后根据 $CD=AE=AB - BE$ 求解.

答案: (1) 作 $CE \perp AB$ 于点 E ,



$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AD = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ (米);}$$

$$(2) \text{ 在 } Rt\triangle BCE \text{ 中, } CE=AD= 10\sqrt{3} \text{ 米,}$$

$$BE=CE \cdot \tan \beta = 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 \text{ (米),}$$

$$\text{则 } CD=AE=AB - BE=30 - 10=20 \text{ (米)}$$

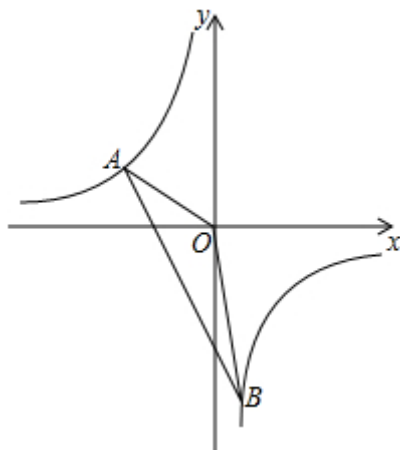
答: 乙建筑物的高度 DC 为 20m.

20. 如图, 一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象交于点 $A(-3, m+8)$, $B(n, -6)$ 两点.

(1) 求一次函数与反比例函数的解析式;

(2) 结合图象直接写出当 $kx+b < \frac{k}{x}$ 时 x 的取值范围;

(3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.



解析：(1)将点 A 坐标代入反比例函数求出 m 的值，从而得到点 A 的坐标以及反比例函数解析式，再将点 B 坐标代入反比例函数求出 n 的值，从而得到点 B 的坐标，然后利用待定系数法求一次函数解析式求解；

(2)由函数图象知，当 $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时，直线在双曲线下方，据此可得；

(3)设 AB 与 x 轴相交于点 C，根据一次函数解析式求出点 C 的坐标，从而得到点 OC 的长度，再根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ 列式计算即可得解。

答案：(1)将 $A(-3, m+8)$ 代入反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 得， $\frac{m}{-3} = m+8$ ，

解得： $m = -6$ ，

$m+8 = -6+8=2$ ，

所以，点 A 的坐标为 $(-3, 2)$ ，

反比例函数解析式为 $y = -\frac{6}{x}$ ，

将点 $B(n, -6)$ 代入 $y = -\frac{6}{x}$ 得， $-\frac{6}{n} = -6$ ，

解得： $n=1$ ，

所以，点 B 的坐标为 $(1, -6)$ ，

将点 $A(-3, 2)$ ， $B(1, -6)$ 代入 $y=kx+b$ 得，

$$\begin{cases} -3k + b = 2 \\ k + b = -6 \end{cases}$$

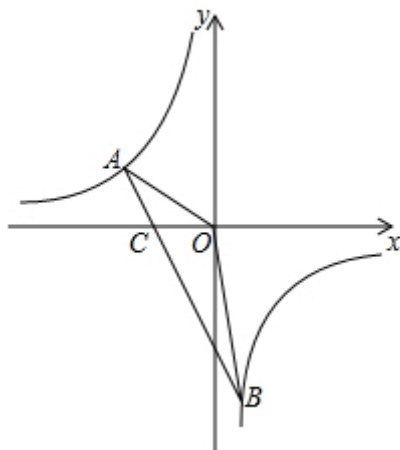
解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = -4 \end{cases}$ ，

所以，一次函数解析式为 $y = -2x - 4$ ；

(2)由函数图象知，当 $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时，直线在双曲线下方，

所以 $kx+b < \frac{k}{x}$ 时 x 的取值范围为 $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$ ；

(3)设 AB 与 x 轴相交于点 C，



令 $-2x - 4 = 0$ 解得 $x = -2$ ，
 所以，点 C 的坐标为 $(-2, 0)$ ，
 所以， $OC = 2$ ，
 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ ，
 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 6$ ，
 $= 2 + 6$ ，
 $= 8$ 。

21. 每年的 6 月 5 日为世界环保日，为了提倡低碳环保，某公司决定购买 10 台节省能源的新设备，现有甲、乙两种型号的设备可供选购，经调查：购买 3 台甲型设备比购买 2 台乙型设备多花 16 万元，购买 2 台甲型设备比购买 3 台乙型设备少花 6 万元。

(1) 求甲、乙两种型号设备的价格；
 (2) 该公司经预算决定购买节省能源的新设备的资金不超过 110 万元，你认为该公司有哪几种购买方案；

(3) 在 (2) 的条件下，已知甲型设备的产量为 240 吨/月，乙型设备的产量为 180 吨/月，若每月要求总产量不低于 2040 吨，为了节约资金，请你为该公司设计一种最省钱的购买方案。

解析：(1) 设甲、乙两种型号设备每台的价格分别为 x 万元和 y 万元，根据购买 3 台甲型设备比购买 2 台乙型设备多花 16 万元，购买 2 台甲型设备比购买 3 台乙型设备少花 6 万元，列出方程组，然后求解即可；

(2) 设购买甲型设备 m 台，乙型设备 $(10 - m)$ 台，根据公司经预算决定购买节省能源的新设备的资金不超过 110 万元，列出不等式，然后求解即可得出购买方案；

(3) 根据甲型设备的产量为 240 吨/月，乙型设备的产量为 180 吨/月和总产量不低于 2040 吨，列出不等式，求出 m 的取值范围，再根据每台的钱数，即可得出最省钱的购买方案。

答案：(1) 设甲、乙两种型号设备每台的价格分别为 x 万元和 y 万元，

$$\text{由题意得：} \begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x + 6 = 3y \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \end{cases}$$

则甲、乙两种型号设备每台的价格分别为 12 万元和 10 万元。

(2) 设购买甲型设备 m 台，乙型设备 $(10 - m)$ 台，

$$\text{则：} 12m + 10(10 - m) \leq 110,$$

$$\therefore m \leq 5,$$

$\therefore m$ 取非负整数

$$\therefore m = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

\therefore 有 6 种购买方案。

$$(3) \text{由题意：} 240m + 180(10 - m) \geq 2040,$$

$\therefore m \geq 4$

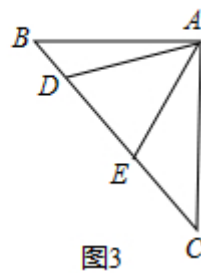
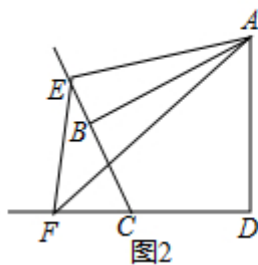
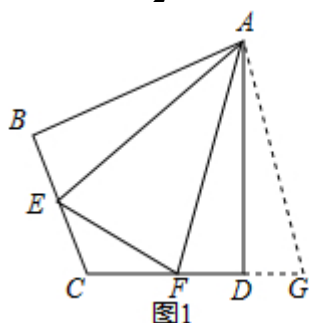
$\therefore m$ 为 4 或 5.

当 $m=4$ 时, 购买资金为: $12 \times 4 + 10 \times 6 = 108$ (万元),

当 $m=5$ 时, 购买资金为: $12 \times 5 + 10 \times 5 = 110$ (万元),

则最省钱的购买方案为, 选购甲型设备 4 台, 乙型设备 6 台.

22. 如图 1, 在四边形 ABCD 中, $AB=AD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, 点 E, F 分别在四边形 ABCD 的边 BC, CD 上, $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 连接 EF, 试猜想 EF, BE, DF 之间的数量关系.



(1) 思路梳理

将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ADG$, 使 AB 与 AD 重合, 由 $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, 得 $\angle FDG = 180^\circ$, 即点 F, D, G 三点共线, 易证 $\triangle AFG \cong \triangle AFE$, 故 EF, BE, DF 之间的数量关系为 $EF = BE + DF$;

(2) 类比引申

如图 2, 在图 1 的条件下, 若点 E, F 由原来的位置分别变到四边形 ABCD 的边 CB, DC 延长线上, $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 连接 EF, 试猜想 EF, BE, DF 之间的数量关系, 并给出证明.

(3) 联想拓展

如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 均在边 BC 上, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 若 $BD = 1$, $EC = 2$, 则 DE 的长为 $\frac{3}{2}$.

解析: (1) 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ADG$, 使 AB 与 AD 重合, 证明 $\triangle AFG \cong \triangle AFE$, 根据全等三角形的性质解答;

(2) 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转, 使 AB 与 AD 重合, 得到 $\triangle ADE'$, 证明 $\triangle AFE \cong \triangle AFE'$, 据全等三角形的性质解答;

(3) 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ACD'$, 使 AB 与 AC 重合, 连接 ED' , 根据全等三角形的性质、勾股定理计算.

答案: (1) 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ADG$, 使 AB 与 AD 重合,

$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore \angle FDG = 180^\circ$, 即点 F, D, G 三点共线,

$\therefore \angle BAF = \angle DAG$, $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$,

$\therefore \angle EAF = \angle GAF$,

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFE$,

$\therefore EF = FG = FD + DG = FD + BE$,

故答案为: $\triangle AFE$ 、 $EF = BE + DF$;

(2) EF, BE, DF 之间的数量关系是 $EF = DF - BE$.

证明: 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转, 使 AB 与 AD 重合, 得到 $\triangle ADE'$, 则 $\triangle ABE \cong \triangle ADE'$,

$\therefore \angle DAE' = \angle BAE$, $AE' = AE$, $DE' = BE$, $\angle ADE' = \angle ABE$,
 $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle ABE = 180^\circ$,
 $\angle ADE' = \angle ADC$, 即 E' , D , F 三点共线,

$$\text{又 } \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$$

$$\therefore \angle E'AF = \angle BAD - (\angle BAF + \angle DAE') = \angle BAD - (\angle BAF + \angle BAE)$$

$$= \angle BAD - \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD.$$

$$\therefore \angle EAF = \angle E'AF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AE'F$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE' \\ \angle EAF = \angle E'AF \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle AFE'$ (SAS),

$$\therefore FE = FE',$$

$$\text{又 } FE' = DF - DE',$$

$$\therefore EF = DF - BE;$$

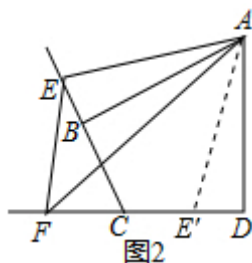


图2

(3) 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ACD'$, 使 AB 与 AC 重合, 连接 ED' ,

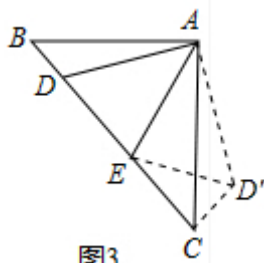


图3

由(1)得, $\triangle AED \cong \triangle AED'$,

$$\therefore DE = D'E.$$

$$\therefore \angle ACB = \angle B = \angle ACD' = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD' = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ECD'$ 中, $ED' = \sqrt{EC^2 + D'C^2} = \sqrt{5}$, 即 $DE = \sqrt{5}$,

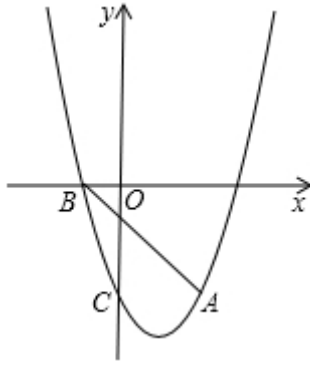
故答案为: $\sqrt{5}$.

23. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(2, -3)$, 与 x 轴负半轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 且 $OC = 3OB$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 D 在 y 轴上, 且 $\angle BDO = \angle BAC$, 求点 D 的坐标;

(3) 点 M 在抛物线上, 点 N 在抛物线的对称轴上, 是否存在以点 A, B, M, N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 求出所有符合条件的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



解析：(1)待定系数法即可得到结论；

(2)连接 AC，作 $BF \perp AC$ 交 AC 的延长线于 F，根据已知条件得到 $AF \parallel x$ 轴，得到 $F(-1, -3)$ ，设 $D(0, m)$ ，则 $OD = |m|$ 即可得到结论；

(3)设 $M(a, a^2 - 2a - 3)$ ， $N(1, n)$ ，①以 AB 为边，则 $AB \parallel MN$ ， $AB = MN$ ，如图 2，过 M 作 $ME \perp$ 对称轴于 E， $AF \perp x$ 轴于 F，于是得到 $\triangle ABF \cong \triangle NME$ ，证得 $NE = AF = 3$ ， $ME = BF = 3$ ，得到 $M(4, 5)$ 或 $(-2, 5)$ ；②以 AB 为对角线， $BN = AM$ ， $BN \parallel AM$ ，如图 3，则 N 在 x 轴上，M 与 C 重合，于是得到结论.

答案：(1)由 $y = ax^2 + bx - 3$ 得 $C(0, -3)$ ，

$$\therefore OC = 3,$$

$$\therefore OC = 3OB,$$

$$\therefore OB = 1,$$

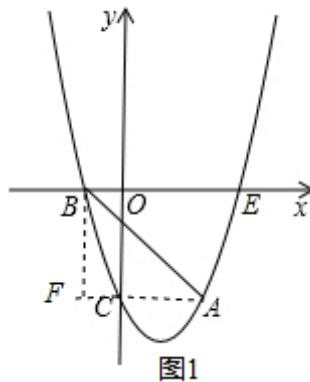
$$\therefore B(-1, 0),$$

把 $A(2, -3)$ ， $B(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 3$ 得 $\begin{cases} 4a + 2b - 3 = -3 \\ a - b - 3 = 0 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$ ；

(2)设连接 AC，作 $BF \perp AC$ 交 AC 的延长线于 F，



$\therefore A(2, -3)$ ， $C(0, -3)$ ，

$\therefore AF \parallel x$ 轴，

$\therefore F(-1, -3)$ ，

$\therefore BF = 3$ ， $AF = 3$ ，

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$ ，

设 $D(0, m)$ ，则 $OD = |m|$ ，

$\therefore \angle BDO = \angle BAC$ ，

$\therefore \angle BDO = 45^\circ$ ，

$\therefore OD = OB = 1$ ，

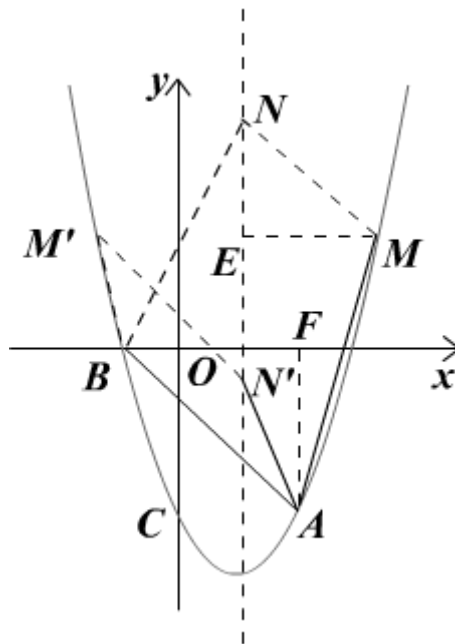
$\therefore |m| = 1$ ，

$\therefore m = \pm 1,$

$\therefore D_1(0, 1), D_2(0, -1);$

(3) 设 $M(a, a^2 - 2a - 3), N(1, n),$

①以 AB 为边, 则 $AB \parallel MN, AB = MN,$ 如图 2, 过 M 作 $ME \perp$ 对称轴于 $E, AF \perp x$ 轴于 $F,$



则 $\triangle ABF \cong \triangle NME,$

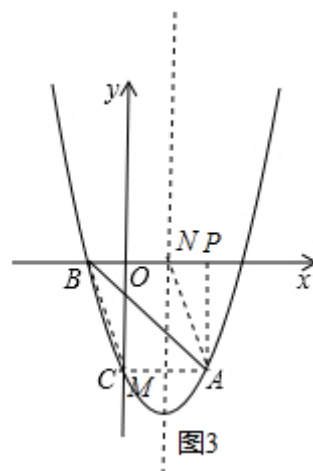
$\therefore NE = AF = 3, ME = BF = 3,$

$\therefore |a - 1| = 3,$

$\therefore a = 4$ 或 $a = -2,$

$\therefore M(4, 5)$ 或 $(-2, 5);$

②以 AB 为对角线, $BN = AM, BN \parallel AM,$ 如图 3,



则 N 在 x 轴上, M 与 C 重合,

$\therefore M(0, -3),$

综上所述, 存在以点 A, B, M, N 为顶点的四边形是平行四边形, $M(4, 5)$ 或 $(-2, 5)$ 或 $(0, -3).$