

2018 年宁夏吴忠市高考模拟试卷(4 月份)数学文

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | x^2 = x\}$, $N = \{x | \lg x \leq 0\}$, 则 $M \cup N =$ ()

A. $[0, 1]$

B. $(0, 1]$

C. $[0, 1)$

D. $(-\infty, 1]$

解析：由 $M = \{x | x^2 = x\} = \{0, 1\}$, $N = \{x | \lg x \leq 0\} = (0, 1]$, 得 $M \cup N = \{0, 1\} \cup (0, 1] = [0, 1]$.

答案：A

2. 已知复数 $(1+2i)i = a+bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a+b =$ ()

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

解析：由 $(1+2i)i = a+bi$ 得 $-2+i = a+bi$, 得 $a = -2$ 且 $b = 1$, 则 $a+b = -2+1 = -1$.

答案：B

3. 已知 $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

解析： $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 = 5$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

两向量的夹角 θ 的取值范围是, $\theta \in [0, \pi]$, $\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

答案：B

4. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点到准线的距离为 ()

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{8}$

解析：抛物线的标准方程 $x^2 = \frac{1}{4}y$ ，则焦点坐标为 $(\frac{1}{16}, 0)$ ，准线方程为 $x = -\frac{1}{16}$ ，

\therefore 焦点到准线的距离 $d = p = \frac{1}{8}$ 。

答案：D

5. 在长为 3m 的线段 AB 上任取一点 P，则点 P 与线段 AB 两端点的距离都大于 1m 的概率等于 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

解析：在线段 AB 上取两点 C, D，使得 $AC = BD = 1$ ，则当 P 在线段 CD 上时，点 P 与线段两

A、B 的距离都大于 1m， $CD = 3 - 2 = 1$ ， \therefore 所求概率 $P = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$ 。

答案：D

6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$ ，则 $S_5 =$ ()

A. 5

B. 7

C. 9

D. 10

解析：由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质，及 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$ ，

$\therefore 3a_3 = 3$ ， $\therefore a_3 = 1$ ， $\therefore S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 5$ 。

答案：A

7. 已知 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - y$ 的最大值为 ()

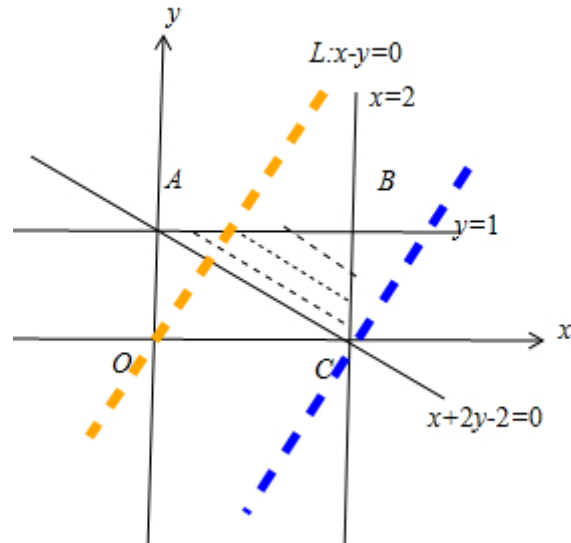
A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

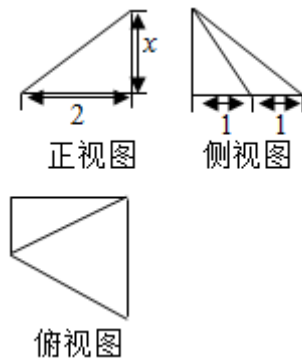
解析：画出可行域(如下图)，由 $z=x-y$ 可得 $y=x-z$ ，



则 $-z$ 为直线 $y=x-z$ 在 y 轴上的截距，截距越小， z 越大，
由图可知，当直线 l 经过点 $C(2, 0)$ 时， z 最大，且最大值为 $z_{\max}=2$ 。

答案：C

8. 某几何体的三视图如图所示，且该几何体的体积是 $\frac{3}{2}$ ，则正视图中的 x 的值是()



A. 2

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

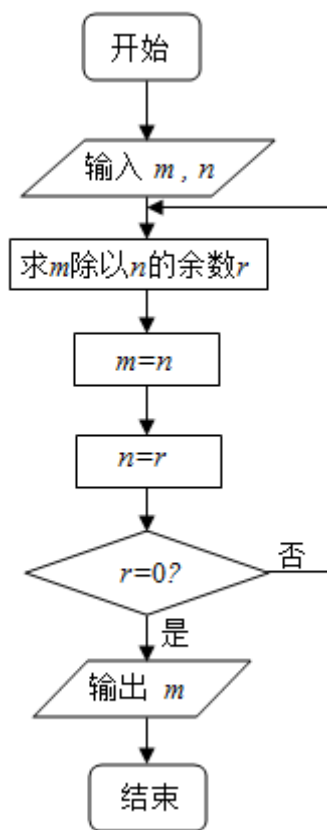
D. 3

解析：由三视图可知：原几何体是一个四棱锥，其中底面是一个上、下、高分别为 1、2、2

的直角梯形，一条长为 x 的侧棱垂直于底面，则体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{2 \times (1+2)}{2} x = \frac{3}{2}$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ 。

答案：C

9. 图中的程序框图所描述的算法称为欧几里得辗转相除法，若输入 $m=209$, $n=121$ ，则输出 m 的值等于()



- A. 10
- B. 22
- C. 12
- D. 13

解析：当 $m=209$, $n=121$, m 除以 n 的余数是 88

此时 $m=121$, $n=88$, m 除以 n 的余数是 33

此时 $m=88$, $n=33$, m 除以 n 的余数是 22

此时 $m=33$, $n=22$, m 除以 n 的余数是 11,

此时 $m=22$, $n=11$, m 除以 n 的余数是 0,

此时 $m=22$, $n=11$,

退出程序，输出结果为 22.

答案：B

10. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ ，要得到 $g(x)=\cos x$ 的图象，只需将函数 $y=f(x)$ 的图象()

- A. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

D. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位

解析: 将函数 $y=f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位, 可得 $y=\sin(x+\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\cos x$ 的图象.

答案: D

11. 与直线 $x-y-4=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-2y=0$ 都相切的半径最小的圆的方程是()

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

B. $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

D. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

解析: 由题意圆 $x^2+y^2+2x-2y=0$ 的圆心为 $(-1, 1)$, 半径为 $\sqrt{2}$, \therefore 过圆心 $(-1, 1)$ 与直线 $x-y-4=0$

垂直的直线方程为 $x+y=0$,

所求的圆的圆心在此直线上, 排除 A、B,

\therefore 圆心 $(-1, 1)$ 到直线 $x-y-4=0$ 的距离为 $\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$, 则所求的圆的半径为 $\sqrt{2}$.

答案: C

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围是()

A. $(2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1)$

解析: (i) 当 $a=0$ 时, $f(x)=-3x^2+1$, 令 $f(x)=0$, 解得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 舍去.

(ii) 当 $a\neq 0$ 时, $f'(x)=3ax^2-6x=3ax(x-\frac{2}{a})$,

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=0$ 或 $\frac{2}{a}$.

① $a<0$ 时, $\frac{2}{a}<0$, 当 $x<\frac{2}{a}$ 或 $x>0$ 时, $f'(x)<0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $\frac{2}{a}<x<0$ 时, $f'(x)>0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增.

$\therefore \frac{2}{a}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 0 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

\therefore 函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0>0$,

则: $\begin{cases} 2a<0, \\ f(\frac{2}{a})>0; \end{cases}$ 即: $\begin{cases} a<0, \\ \frac{4}{a^2}<1, \end{cases}$ 可得 $a<-2$.

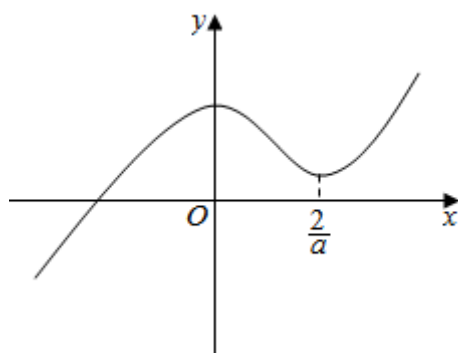
②当 $a > 0$ 时, $\frac{2}{a} > 0$, 当 $x > \frac{2}{a}$ 或 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减.

$\therefore \frac{2}{a}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 0 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

不满足函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$,

综上所述: 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.



答案: B

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的焦距为_____.

解析: 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$, 可得 $a = b = 1$, 则 $c = \sqrt{2}$, 所以双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的焦距为: $2\sqrt{2}$.

答案: $2\sqrt{2}$

14. 在《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑(bie nao). 已知在鳖臑 $M-ABC$ 中, $MA \perp$ 平面 ABC , $MA = AB = BC = 2$, 则该鳖臑的外接球的表面积为_____.

解析: $M-ABC$ 四个面都为直角三角形, $MA \perp$ 平面 ABC , $MA = AB = BC = 2$, \therefore 三角形的 $AC = 2\sqrt{2}$,

从而可得 $MC = 2\sqrt{3}$,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, \therefore 外接圆的半径为 $\frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$,

外接球的球心到平面 ABC 的距离为 $\frac{AM}{2} = 1$.

可得外接球的半径 $R = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, 故得外接球表面积 $S = 4\pi \times 3 = 12\pi$.

答案: 12π

15. 学校艺术节对 A, B, C, D 四件参赛作品只评一件一等奖, 在评奖揭晓前, 甲, 乙, 丙, 丁四位同学对这四件参赛作品预测如下: 甲说: “是 C 或 D 作品获得一等奖”; 乙说: “B 作品获得一等奖”; 丙说: “A, D 两件作品未获得一等奖”; 丁说: “是 C 作品获得一等奖”.

评奖揭晓后,发现这四位同学中只有两位说的话是对的,则获得一等奖的作品是_____.

解析:若A为一等奖,则甲,丙,丁的说法均错误,故不满足题意,
若B为一等奖,则乙,丙说法正确,甲,丁的说法错误,故满足题意,
若C为一等奖,则甲,丙,丁的说法均正确,故不满足题意,
若D为一等奖,则只有甲的说法正确,故不合题意,
故若这四位同学中只有两位说的话是对的,则获得一等奖的作品是B.

答案: B

16. 对正整数 n , 设曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 $x=2$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为 a_n , 则数列 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 的前 n 项和的公式是_____.

解析: $y' = nx^{n-1} - (n+1)x^n$,

曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率为 $k=n2^{n-1} - (n+1)2^n$, 切点为 $(2, -2^n)$,

所以切线方程为 $y+2^n=k(x-2)$,

令 $x=0$ 得 $a_n=(n+1)2^n$,

令 $b_n = \frac{a_n}{n+1} = 2^n$. 数列 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 的前 n 项和为 $2+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-2$.

答案: $2^{n+1}-2$

三、解答题: 共 80 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设函数 $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(B+C) = \frac{3}{2}$, $a=3$, $b+c=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析: (1) 利用两角和与差的三角函数化简函数的解析式为一个角的一个三角函数的形式, 然后求解周期.

(2) 求出 A 的大小, 利用余弦定理求出 bc , 然后求解三角形的面积.

答案: (1) $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2} = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$.

(2) 由 $f(B+C) = \cos\left[2(B+C) + \frac{\pi}{3}\right] + 1 = \frac{3}{2}$, 得 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 得 $A = \frac{\pi}{3}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = (b+c)^2 - 3bc$,

又 $a = \sqrt{3}$, $b+c=3$, 解得 $bc=2$. 所以, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. 近年空气质量逐步恶化, 雾霾天气现象出现增多, 大气污染危害加重. 大气污染可引起心悸、呼吸困难等心肺疾病. 为了解某市心肺疾病是否与性别有关, 在某医院随机的对入院 50 人进行了问卷调查得到了如下的列联表:

	患心肺疾病	不患心肺疾病	合计
男	20	5	25
女	10	15	25
合计	30	20	50

(I) 用分层抽样的方法在患心肺疾病的人群中抽 6 人, 其中男性抽多少人?

(II) 在上述抽取的 6 人中选 2 人, 求恰有一名女性的概率;

(III) 为了研究心肺疾病是否与性别有关, 请计算出统计量 K^2 , 你有多大的把握认为心肺疾病与性别有关?

下面的临界值表供参考:

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$)

解析: (I) 根据分层抽样的方法, 在患心肺疾病的人群中抽 6 人, 先计算了抽取比例, 再根据比例即可求出男性应该抽取人数.

(II) 在上述抽取的 6 名学生中, 女性的有 2 人, 男性 4 人. 女性 2 人记 A, B; 男性 4 人为 c, d, e, f, 列出其一切可能的结果组成的基本事件个数, 通过列举得到满足条件事件数, 求出概率.

(III) 根据所给的公式, 代入数据求出临界值, 把求得的结果同临界值表进行比较, 看出有多大的把握认为心肺疾病与性别有关.

答案: (I) 在患心肺疾病的人群中抽 6 人, 则抽取比例为 $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, \therefore 男性应该抽取 $20 \times \frac{1}{5} = 4$ 人.

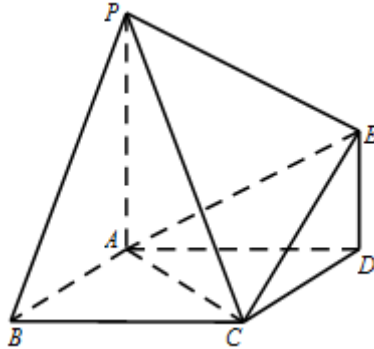
(II) 在上述抽取的 6 名学生中, 女性的有 2 人, 男性 4 人. 女性 2 人记 A, B; 男性 4 人为 c, d, e, f, 则从 6 名学生任取 2 名的所有情况为: (A, B)、(A, c)、(A, d)、(A, e)、(A, f)、(B, c)、(B, d)、(B, e)、(B, f)、(c, d)、(c, e)、(c, f)、(d, e)、(d, f)、(e, f) 共 15 种情况, 其中恰有 1 名女生情况有: (A, c)、(A, d)、(A, e)、(A, f)、(B, c)、(B, d)、(B, e)、(B, f), 共 8 种情况,

故上述抽取的 6 人中选 2 人, 恰有一名女性的概率为 $P = \frac{8}{15}$.

(III) $\because K^2 \approx 8.333$, 且 $P(K^2 \geq 7.879) = 0.005 = 0.5\%$,

那么，我们有 99.5% 的把握认为是是否患心肺疾病是与性别有关系的。

19. 如图，已知多面体 PABCDE 的底面 ABCD 是边长为 2 的菱形， $PA \perp$ 底面 ABCD， $ED \parallel PA$ ，且 $PA = 2ED = 2$ 。



(1) 证明：平面 PAC \perp 平面 PCE；

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，求三棱锥 P-ACE 的体积。

解析：(1) 连接 BD，交 AC 于点 O，设 PC 中点为 F，由已知结合三角形中位线定理可得四边形 OFED 为平行四边形，则 $OD \parallel EF$ ，即 $BD \parallel EF$ 。再由 $PA \perp$ 平面 ABCD，可得 $PA \perp BD$ 。又 ABCD 是菱形，得 $BD \perp AC$ 。由线面垂直的判定可得 $BD \perp$ 平面 PAC。则 $EF \perp$ 平面 PAC。进一步得到平面 PAC \perp 平面 PCE。

(2) 由 $\angle ABC = 60^\circ$ ，可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，得 $AC = 2$ 。再由 $PA \perp$ 平面 ABCD，得 $PA \perp AC$ 。求出三角形 PAC 的面积证得 EF 是三棱锥 E-PAC 的高，利用 P-ACE 的体积等于 E-PAC 的体积求解；

答案：(1) 连接 BD，交 AC 于点 O，设 PC 中点为 F，菁优网连接 OF，EF。

$\because O, F$ 分别为 AC, PC 的中点， $\therefore OF \parallel PA$ ，且 $OF = \frac{1}{2} PA$ ，

$\because DE \parallel PA$ ，且 $DE = \frac{1}{2} PA$ ， $\therefore OF \parallel DE$ ，且 $OF = DE$ 。

\therefore 四边形 OFED 为平行四边形，则 $OD \parallel EF$ ，即 $BD \parallel EF$ 。

$PA \perp$ 平面 ABCD， $BD \subset$ 平面 ABCD， $\therefore PA \perp BD$ 。

\because ABCD 是菱形， $\therefore BD \perp AC$ 。

$\because PA \cap AC = A$ ， $\therefore BD \perp$ 平面 PAC。

$\because BD \parallel EF$ ， $\therefore EF \perp$ 平面 PAC。

$\because EF \subset$ 平面 PCE， \therefore 平面 PAC \perp 平面 PCE。

(2) $\because \angle ABC = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，得 $AC = 2$ 。

又 $\because PA \perp$ 平面 ABCD， $AC \subset$ 平面 ABCD， $\therefore PA \perp AC$ 。 $\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} PA \times AC = 2$ 。

$\because EF \perp$ 平面 PAC， $\therefore EF$ 是三棱锥 E-PAC 的高。

$\because EF = DO = BO = 1$ ， $\therefore V_{P-ACE} = V_{E-PAC} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAC} \times EF = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ 。

20. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，其左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，点 R

坐标为 $(2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ，又点 F_2 在线段 RF_1 的中垂线上。

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设椭圆 C 的左右顶点分别为 A_1, A_2 ，点 P 在直线 $x = -2\sqrt{3}$ 上 (点 P 不在 x 轴上)，直线 PA_1 与椭圆 C 交于点 N，直线 PA_2 与椭圆 C 交 M，线段 MN 的中点为 Q，证明： $2|A_1Q| = |MN|$ 。

解析：(I) 由已知条件得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $|F_1F_2| = |RF_2|$ ， $(2c)^2 = (\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2} - c)^2$ ，由此能求出椭圆 C 的方程。

(II) 设 PA_1 的方程为 $y = k(x + \sqrt{3})$ ($k \neq 0$)， PA_2 方程为 $y = \frac{k}{3}(x - \sqrt{3})$ ，由方程组

$$\begin{cases} y = \frac{k}{3}(x - \sqrt{3}), \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{得 } (3+k^2)x^2 - 2\sqrt{3}k^2x + 3k^2 - 9 = 0, \text{ 由此求出 } K_{MA_1} = \frac{y_M - 0}{x_M + \sqrt{3}} \text{ 化简后 } K_{MA_1} = -\frac{1}{k},$$

三角形 MNA_1 为直角三角形，Q 为斜边中点，从而能证明 $2|A_1Q| = |MN|$ 。

答案：(I) $\because e = \frac{\sqrt{6}}{3}, \therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$

$\because F_2(c, 0)$ 在 PF_1 的中垂线上，

$\therefore |F_1F_2| = |RF_2|, (2c)^2 = (\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2} - c)^2$ ，解得 $c=2, a^2=3, b^2=1$ 。

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(II) 由 (I) 知 $A_1(-\sqrt{3}, 0), A_2(\sqrt{3}, 0), M(x_M, y_M)$ ，

设 PA_1 的方程为 $y = k(x + \sqrt{3})$ ($k \neq 0$)，则 P 坐标 $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}k)$ ，

$$\therefore K_{PA_2} = k_3, \therefore PA_2 \text{ 方程为 } y = \frac{k}{3}(x - \sqrt{3}), \text{ 由方程组 } \begin{cases} y = \frac{k}{3}(x - \sqrt{3}), \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases}$$

消去 y，整理得 $(3+k^2)x^2 - 2\sqrt{3}k^2x + 3k^2 - 9 = 0$ ，解得 $\sqrt{3}x_M = \frac{3(k^2 - 3)}{k^2 + 3}$ ，

$$\therefore x_M = \frac{\sqrt{3}(k^2 - 3)}{k^2 + 3}, y_M = \frac{k}{3}(x_M - \sqrt{3}) = \frac{-2\sqrt{3}k}{k^2 + 3},$$

$$\therefore K_{MA_1} = \frac{y_M - 0}{x_M + \sqrt{3}}, \text{ 化简后 } K_{MA_1} = -\frac{1}{k},$$

$\therefore MA_1 \perp NA_1$, 则三角形 MNA_1 为直角三角形, Q 为斜边中点, $\therefore 2|A_1Q| = |MN|$.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = mx + n \ln x$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 1, 函数 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $2 - 2 \ln 2$.

(1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式;

(2) 已知不等式 $f(x) + g(x) \geq x^2 - \lambda(x-1)$ 对任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

解析: (1) 求出函数的导数, 得到 $f'(1) = 1$, 求出 a 的值即可, 求出 $g(x)$ 的导数, 得到关于 m, n 的方程组, 解出即可;

(2) 令 $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \lambda(x-1) = \lambda(x-1) - 2 \ln x$, $x \in (0, 1]$, 问题转化为 $h(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 根据函数的单调性求出 λ 的范围即可.

答案: (1) $f'(x) = 2x - a$, 则 $f'(1) = 2 - a = 1$, 解得: $a = 1$,

故 $f(x) = x^2 - x$, $g'(x) = m + \frac{n}{x}$, 故 $g'(2) = m + \frac{n}{2} = 0$ ①,

$g(2) = 2m + n \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$ ②,

联立 ①②, 解得: $m = 1, n = -2$, 故 $g(x) = x - 2 \ln x$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) + g(x) = x^2 - 2 \ln x$,

令 $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \lambda(x-1) = \lambda(x-1) - 2 \ln x$, $x \in (0, 1]$.

问题转化为 $h(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立. $h'(x) = \lambda - \frac{2}{x} = \frac{\lambda x - 2}{x}$.

① 当 $\lambda \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $h(x)_{\min} = h(1) = 0$, 满足题意.

② 当 $0 < \lambda \leq 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $h(x)_{\min} = h(1) = 0$, 满足题意.

③ $\lambda > 2$ 时, $h'(x) < 0$ 在 $(0, \frac{2}{\lambda})$ 上恒成立, $h'(x) > 0$ 在 $(\frac{2}{\lambda}, 1)$ 上恒成立.

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{2}{\lambda})$ 单调递减, 在 $(\frac{2}{\lambda}, 1)$ 上单调递增, 所以 $h(\frac{2}{\lambda}) < h(1) = 0$, 不满足题意.

综上所述, 实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 在以

O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, $C_3: \rho = 2 \sqrt{3} \cos \theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

解析: (I) 由曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, 化为 $\rho^2 = 2\rho \sin \theta$, 把 $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入可得直角坐标

方程. 同理由 $C_3: \rho = 2 \sqrt{3} \cos \theta$. 可得直角坐标方程, 联立解出可得 C_2 与 C_3 交点的直角坐标.

(2) 由曲线 C_1 的参数方程, 消去参数 t , 化为普通方程: $y = x \tan \alpha$, 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$,

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x = 0 (y \neq 0)$. 其极坐标方程为: $\theta = \alpha (\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0)$, 利用 $|AB| = |2 \sin$

$\alpha - 2 \sqrt{3} \cos \alpha|$ 即可得出.

答案: (I) 由曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, 化为 $\rho^2 = 2\rho \sin \theta$, $\therefore x^2 + y^2 = 2y$.

同理由 $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos\theta$. 可得直角坐标方程: $x^2+y^2=2\sqrt{3}x$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 23x = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y = \frac{3}{2}, \end{cases} \therefore C_2 \text{ 与 } C_3 \text{ 交点的直角坐标为 } (0, 0),$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

(2) 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 化为普通方程: $y = x \tan \alpha$,

其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x=0 (y \neq 0)$. 其极坐标方程为: $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$),

$\therefore A, B$ 都在 C_1 上, $\therefore A(2\sin\alpha, \alpha), B(2\sqrt{3}\cos\alpha, \alpha)$.

$$\therefore |AB| = |2\sin\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha| = 4\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right|,$$

当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, $|AB|$ 取得最大值 4.

23. 已知函数 $f(x) = m - |x-3|$, 不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 $(2, 4)$.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若关于 x 的不等式 $|x-a| \geq f(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解析: (1) 利用不等式的解集与方程根的关系即可求解实数 m 的值;

(2) 利用绝对值不等式的性质即可求实数 a 的取值范围.

答案: (1) $\because f(x) = m - |x-3|$, \therefore 不等式 $f(x) > 2$, 即 $m - |x-3| > 2$, $\therefore 5-m < x < m+1$,

而不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 $(2, 4)$, $\therefore 5-m=2$ 且 $m+1=4$, 解得: $m=3$;

(2) 关于 x 的不等式 $|x-a| \geq f(x)$ 恒成立, 即关于 x 的不等式 $|x-a| \geq 3 - |x-3|$ 恒成立.

可得: $|x-a| + |x-3| \geq 3$ 恒成立

即 $|a-3| \geq 3$ 恒成立, 解得: $a-3 \geq 3$ 或 $a-3 \leq -3$, 即 $a \geq 6$ 或 $a \leq 0$.

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$.