

2015 年广东省茂名市中考真题数学

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题给出的四个答案，其中只有一个正确的)

1. $|-3|$ 等于()
- A. 3
B. -3
C. $\frac{1}{3}$
D. $-\frac{1}{3}$

解析：根据负数的绝对值是它的相反数，得 $|-3| = -(-3) = 3$.

答案：A

2. 如图是一个正方体的平面展开图，折叠成正方体后与“建”字所在面相对的面的字是()



- A. 创
B. 教
C. 强
D. 市

解析： \because 正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形， \therefore “建”与“强”是相对面.

答案：C

3. 下列各式计算正确的是()

- A. $5a+3a=8a^2$
B. $(a-b)^2=a^2-b^2$
C. $a^3 \cdot a^7=a^{10}$
D. $(a^3)^2=a^7$

解析：A、 $5a+3a=8a$ ，故错误；

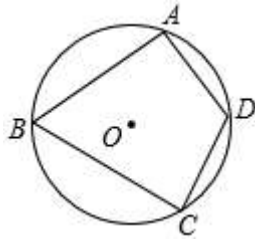
B、 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，故错误；

C、 $a^3 \cdot a^7=a^{10}$ ，正确；

D、 $(a^3)^2=a^6$ ，故错误.

答案：C

4. 如图，四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B=70^\circ$ ，则 $\angle D$ 的度数是()



- A. 110°
- B. 90°
- C. 70°
- D. 50°

解析：∵ 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle D + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ,$$

答案：A.

5. 在等腰三角形、平行四边形、直角梯形和圆中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等腰三角形
- B. 平行四边形
- C. 直角梯形
- D. 圆

解析：在等腰三角形、平行四边形、直角梯形和圆中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是圆。

答案：D

6. 下列说法正确的是 ()

- A. 面积相等的两个三角形全等
- B. 矩形的四条边一定相等
- C. 一个图形和它旋转后所得图形的对应线段相等
- D. 随机投掷一枚质地均匀的硬币，落地后一定是正面朝上

解析：A、面积相等的两个三角形不一定全等，此选项错误；

B、矩形的对边相等，此选项错误；

C、一个图形和它旋转后所得图形的对应线段相等，此选项正确；

D、随机投掷一枚质地均匀的硬币，落地后不一定是正面朝上，此选项错误。

答案：C

7. 为了帮扶本市一名特困儿童，某班有 20 名同学积极捐款，他们捐款的数额如下表：

捐款的数额 (单位：元)	20	50	80	100
人数 (单位：名)	6	7	4	3

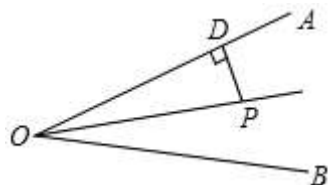
对于这 20 名同学的捐款，众数是 ()

- A. 20 元
- B. 50 元
- C. 80 元
- D. 100 元

解析：由题意得，所给数据中，50 元出现了 7 次，次数最多，即这组数据的众数为 50 元.

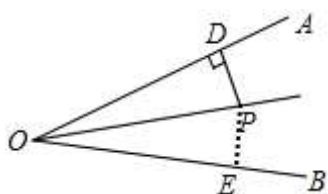
答案：B

8. 如图，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上一点， $PD \perp OA$ 于点 D， $PD=6$ ，则点 P 到边 OB 的距离为()



- A. 6
- B. 5
- C. 4
- D. 3

解析：如图，过点 P 作 $PE \perp OB$ 于点 E，



\because OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， $PD \perp OA$ 于 D，
 $\therefore PE=PD$ ， $\because PD=6$ ， $\therefore PE=6$ ，即点 P 到 OB 的距离是 6.

答案：A

9. 在平面直角坐标系中，下列函数的图象经过原点的是()

- A. $y = \frac{1}{x}$
- B. $y = -2x - 3$
- C. $y = 2x^2 + 1$
- D. $y = 5x$

解析：A、当 $x=0$ 时， $y = \frac{1}{x}$ 无意义，不经过原点，故本选项错误；

B、当 $x=0$ 时， $y=3$ ，不经过原点，故本选项错误；

C、当 $x=0$ 时， $y=1$ ，不经过原点，故本选项错误；

D、当 $x=0$ 时， $y=0$ ，经过原点，故本选项正确.

答案：D

10. 张三和李四两人加工同一种零件，每小时张三比李四多加工 5 个零件，张三加工 120 个这种零件与李四加工 100 个这种零件所用时间相等，求张三和李四每小时各加工多少个这种零件？若设张三每小时经过这种零件 x 个，则下面列出的方程正确的是()

A. $\frac{120}{x-5} = \frac{100}{x}$

B. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-5}$

C. $\frac{120}{x+5} = \frac{100}{x}$

D. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x+5}$

解析：设张三每小时加工这种零件 x 个，则李四每小时加工这种零件 $(x-5)$ 个，由题意得，

$$\frac{120}{x} = \frac{100}{x-5}$$

答案：B.

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

11. -8 的立方根是_____.

解析： $\because (-2)^3 = -8$ ， $\therefore -8$ 的立方根是 -2 .

答案： -2

12. 一个多边形的内角和是 720° ，那么这个多边形是_____边形.

解析：这个正多边形的边数是 n ，则 $(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$ ，解得： $n=6$. 则这个正多边形的边数是六.

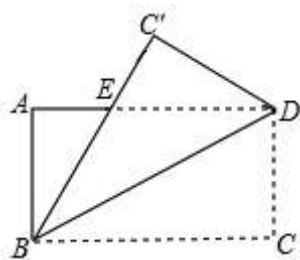
答案：六.

13. 不等式 $x-4 < 0$ 的解集是_____.

解析： $x-4 < 0$ ，移项得： $x < 4$.

答案： $x < 4$

14. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使点 C 与 C' 重合. 若 $AB=3$ ，则 $C'D$ 的长为_____.



解析：在矩形 $ABCD$ 中， $CD=AB$ ，

\because 矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠后点 C 和点 C' 重合， $\therefore C'D=CD$ ， $\therefore C'D=AB$ ，

$\because AB=3$ ， $\therefore C'D=3$.

答案：3

15. 为了求 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$ 的值，可令 $M=1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$ ，则 $3M=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{101}$ ，因

此, $3M-M=3^{101}-1$, 所以 $M=\frac{3^{101}-1}{2}$, 即 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}=\frac{3^{101}-1}{2}$, 仿照以上推理计算:

$1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$ 的值是_____.

解析: 设 $M=1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$, 则 $5M=5+5^2+5^3+\dots+5^{2016}$,

两式相减得: $4M=5^{2016}-1$, 则 $M=\frac{5^{2016}-1}{4}$

答案: $\frac{5^{2016}-1}{4}$

三、用心做一做(本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

16. 计算: $(-\frac{1}{3})^{-1}-|-4|+\sqrt{3^2+4^2}+(\sin 30^\circ)^0$.

解析: 本题涉及负整数指数幂、零指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

答案: $(-\frac{1}{3})^{-1}-|-4|+\sqrt{3^2+4^2}+(\sin 30^\circ)^0=-3-4+5+1=-1$.

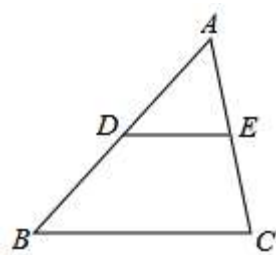
17. 设 $y=ax$, 若代数式 $(x+y)(x-2y)+3y(x+y)$ 化简的结果为 x^2 , 请你求出满足条件的 a 值.

解析: 先利用因式分解得到原式 $(x+y)(x-2y)+3y(x+y)=(x+y)^2$, 再把当 $y=ax$ 代入得到原式 $=(a+1)^2x^2$, 所以当 $(a+1)^2=1$ 满足条件, 然后解关于 a 的方程即可.

答案: 原式 $=(x+y)(x-2y)+3y(x+y)=(x+y)^2$,

当 $y=ax$, 代入原式得 $(1+a)^2x^2=x^2$, 即 $(1+a)^2=1$, 解得: $a=-2$ 或 0 .

18. 补充完整三角形中位线定理, 并加以证明:



(1) 三角形中位线定理: 三角形的中位线_____;

(2) 已知: 如图, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 求证: $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2} BC$.

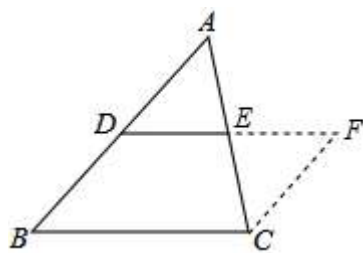
解析: (1) 根据三角形的中位线定理填写即可;

(2) 延长 DE 到 F, 使 $FE=DE$, 连接 CF, 利用“边角边”证明 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 全等, 根据全等三角形对应角相等可得 $\angle A = \angle ECF$, 全等三角形对应边相等可得 $AD=CF$, 然后求出四边形 BCFD 是平行四边形, 根据平行四边形的性质证明即可.

答案: (1) 三角形中位线定理: 三角形的中位线平行于第三边, 且等于第三边的一半;

故答案为: 平行于第三边, 且等于第三边的一半;

(2)证明：如图，延长DE到F，使FE=DE，连接CF，



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，
$$\begin{cases} AE = EC, \\ \angle AED = \angle CEF, \therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE (SAS), \\ DE = EF, \end{cases}$$

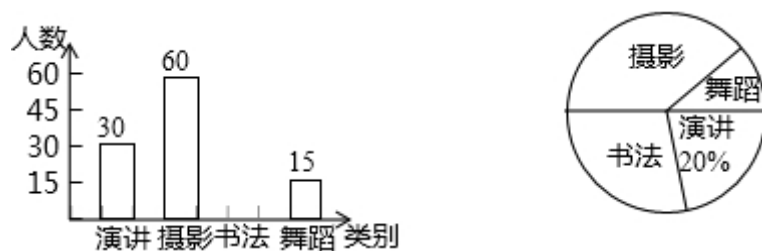
$\therefore \angle A = \angle ECF, AD = CF, \therefore CF \parallel AB,$

又 $\because AD = BD, \therefore CF = BD, \therefore$ 四边形BCFD是平行四边形，

$\therefore DF \parallel BC, DF = BC, \therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC.$

四、沉着冷静，缜密思考(本大题共2小题，每小题7分，共14分)

19.某校为了丰富学生的第二课堂，对学生参与演讲、舞蹈、书法和摄影活动的兴趣情况进行调查，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查(每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中最感兴趣的一项)，对调查结果进行统计后，绘制了如下两个统计图：



(1)此次调查抽取的学生人数 $m =$ _____ 名，其中选择“书法”的学生占抽样人数的百分比 $n =$ _____；

(2)若该校有3000名学生，请根据以上数据估计该校对“书法”最感兴趣的学生人数。

解析：(1)利用扇形统计图和条形统计图得出参与演讲的人数和所占百分比，进而求出总人数，再求出参加书法的人数，进而求出占抽样人数的百分比；

(2)利用(1)中所求得该校对“书法”最感兴趣的学生人数。

答案：(1)由题意可得：此次调查抽取的学生人数 $m = 30 \div 20\% = 150$ ，

选择“书法”的学生占抽样人数的百分比 $n = (150 - 30 - 60 - 15) \div 150 \times 100\% = 30\%$ ；

故答案为：150，30%；

(2)由(1)得： $3000 \times 30\% = 900$ (名)，

答：该校对“书法”最感兴趣的学生人数为900名。

20.在一个不透明的袋中装有2个黄球，3个黑球和5个红球，它们除颜色外其他都相同。

(1)将袋中的球摇均匀后，求从袋中随机摸出一个球是黄球的概率；

(2)现在再将若干个红球放入袋中，与原来的10个球均匀混合在一起，使从袋中随机摸出一

个球是红球的概率是 $\frac{2}{3}$ ，请求出后来放入袋中的红球的个数.

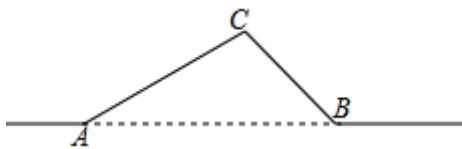
解析：(1)用黄球的个数除以所有球的个数即可求得概率；
(2)根据概率公式列出方程求得红球的个数即可.

答案：(1)∵共 10 个球，有 2 个黄球，∴ $P(\text{黄球}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ；

(2)设有 x 个红球，根据题意得： $\frac{5+x}{10+x} = \frac{2}{3}$ ，解得： $x=5$. 故后来放入袋中的红球有 5 个.

五、满怀信心，再接再厉(本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分)

21. 如图，一条输电线路从 A 地到 B 地需要经过 C 地，图中 $AC=20$ 千米， $\angle CAB=30^\circ$ ， $\angle CBA=45^\circ$ ，因线路整改需要，将从 A 地到 B 地之间铺设一条笔直的输电线路.



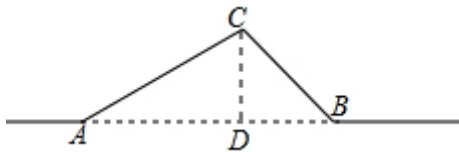
(1)求新铺设的输电线路 AB 的长度；(结果保留根号)

(2)问整改后从 A 地到 B 地的输电线路比原来缩短了多少千米？(结果保留根号)

解析：(1)过 C 作 $CD \perp AB$ ，交 AB 于点 D，在直角三角形 ACD 中，利用锐角三角函数定义求出 CD 与 AD 的长，在直角三角形 BCD 中，利用锐角三角函数定义求出 BD 的长，由 $AD+DB$ 求出 AB 的长即可；

(2)在直角三角形 BCD 中，利用勾股定理求出 BC 的长，由 $AC+CB-AB$ 即可求出输电线路比原来缩短的千米数.

答案：(1)过 C 作 $CD \perp AB$ ，交 AB 于点 D，



在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $CD=AC \cdot \sin \angle CAD=20 \times \frac{1}{2}=10$ (千米)，

$AD=AC \cdot \cos \angle CAD=20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ (千米)，

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $BD=\frac{CD}{\tan \angle CBD}=\frac{10}{1}=10$ (千米)，

∴ $AB=AD+DB=10\sqrt{3}+10=10(\sqrt{3}+1)$ (千米)，

则新铺设的输电线路 AB 的长度 $10(\sqrt{3}+1)$ (千米)；

(2)在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，根据勾股定理得： $BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=10\sqrt{2}$ (千米)，

∴ $AC+CB-AB=20+10\sqrt{2}-(10\sqrt{3}+10)=10(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (千米)，

则整改后从 A 地到 B 地的输电线路比原来缩短了 $10(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ 千米.

22. 在平面直角坐标系中, 我们不妨把纵坐标是横坐标的 2 倍的点称之为“理想点”, 例如点 $(-2, -4)$, $(1, 2)$, $(3, 6)$... 都是“理想点”, 显然这样的“理想点”有无数多个.

(1) 若点 $M(2, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 图象上的“理想点”, 求这个反比例函数的表达式:

(2) 函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数, $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点”吗? 若存在, 请求出“理想点”的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 根据“理想点”, 确定 a 的值, 即可确定 M 点的坐标, 代入反比例函数解析式, 即可解答;

(2) 假设函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数, $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点” $(x, 2x)$, 则有 $3mx - 1 = 2x$, 整理得: $(3m - 2)x = 1$, 分两种情况讨论: 当 $3m - 2 \neq 0$, 即 $m \neq \frac{2}{3}$ 时, 解得: $x = \frac{1}{3m - 2}$, 当 $3m - 2 = 0$, 即 $m = \frac{2}{3}$ 时, x 无解, 即可解答.

答案: \because 点 $M(2, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 图象上的“理想点”, $\therefore a = 4$,

\because 点 $M(2, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 图象上, $\therefore k = 2 \times 4 = 8$,

\therefore 反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$.

(2) 假设函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数, $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点” $(x, 2x)$, 则有 $3mx - 1 = 2x$, 整理得: $(3m - 2)x = 1$,

当 $3m - 2 \neq 0$, 即 $m \neq \frac{2}{3}$ 时, 解得: $x = \frac{1}{3m - 2}$,

当 $3m - 2 = 0$, 即 $m = \frac{2}{3}$ 时, x 无解,

综上所述, 当 $m \neq \frac{2}{3}$ 时, 函数图象上存在“理想点”, 为 $(\frac{1}{3m - 2}, \frac{2}{3m - 2})$;

当 $m = \frac{2}{3}$ 时, 函数图象上不存在“理想点”.

23. 某公司生产的某种产品每件成本为 40 元, 经市场调查整理出如下信息:

① 该产品 90 天内日销售量 (m 件) 与时间 (第 x 天) 满足一次函数关系, 部分数据如下表:

时间 (第 x 天)	1	3	6	10	...
日销售量 (m 件)	198	194	188	180	...

② 该产品 90 天内每天的销售价格与时间 (第 x 天) 的关系如下表:

时间 (第 x 天)	$1 \leq x < 50$	$50 \leq x \leq 90$
销售价格 (元/件)	$x + 60$	100

(1) 求 m 关于 x 的一次函数表达式;

(2) 设销售该产品每天利润为 y 元, 请写出 y 关于 x 的函数表达式, 并求出在 90 天内该产品哪天的销售利润最大? 最大利润是多少? 【提示: 每天销售利润 = 日销售量 \times (每件销售价格

【-每件成本)】

(3) 在该产品销售的过程中, 共有多少天销售利润不低于 5400 元, 请直接写出结果.

解析: (1) 根据待定系数法解出一次函数解析式即可;

(2) 设利润为 y 元, 则当 $1 \leq x < 50$ 时, $y = -2x^2 + 160x + 4000$; 当 $50 \leq x \leq 90$ 时, $y = -120x + 12000$, 分别求出各段上的最大值, 比较即可得到结论;

(3) 直接写出在该产品销售的过程中, 共有 46 天销售利润不低于 5400 元.

答案: (1) $\because m$ 与 x 成一次函数,

$$\therefore \text{设 } m = kx + b, \text{ 将 } x=1, m=198, x=3, m=194 \text{ 代入, 得: } \begin{cases} k + b = 198, \\ 3k + b = 194, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} k = -2, \\ b = 200. \end{cases}$$

所以 m 关于 x 的一次函数表达式为 $m = -2x + 200$;

(2) 设销售该产品每天利润为 y 元,

$$y \text{ 关于 } x \text{ 的函数表达式为: } \begin{cases} y = -2x^2 + 160x + 4000 (1 \leq x < 50), \\ y = -120x + 12000 (50 \leq x \leq 90), \end{cases}$$

当 $1 \leq x < 50$ 时, $y = -2x^2 + 160x + 4000 = -2(x-40)^2 + 7200$,

$\because -2 < 0$, \therefore 当 $x=40$ 时, y 有最大值, 最大值是 7200;

当 $50 \leq x \leq 90$ 时, $y = -120x + 12000$,

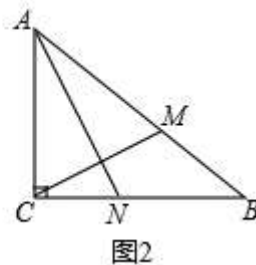
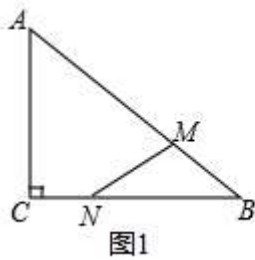
$\because -120 < 0$, $\therefore y$ 随 x 增大而减小, 即当 $x=50$ 时, y 的值最大, 最大值是 6000;

综上所述, 当 $x=40$ 时, y 的值最大, 最大值是 7200, 即在 90 天内该产品第 40 天的销售利润最大, 最大利润是 7200 元;

(3) 在该产品销售的过程中, 共有 46 天销售利润不低于 5400 元.

六、灵动管理, 超越自我(本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

24. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$. 动点 M 从点 B 出发, 在 BA 边上以每秒 3cm 的速度向点 A 运动, 同时动点 N 从点 C 出发, 在 CB 边上以每秒 2cm 的速度向点 B 运动, 运动时间为 t 秒 ($0 < t < \frac{10}{3}$), 连接 MN .



(1) 若 $\triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 t 的值;

(2) 连接 AN , CM , 若 $AN \perp CM$, 求 t 的值.

解析: (1) 根据题意得出 BM , CN , 易得 BN , BA , 分类讨论当 $\triangle BMN \sim \triangle BAC$ 时, 利用相似三角形的性质得 $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$, 解得 t ; 当 $\triangle BMN \sim \triangle BCA$ 时, $\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA}$, 解得 t , 综上所述,

$\triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 得 t 的值;

(2) 过点 M 作 $MD \perp CB$ 于点 D , 利用锐角三角函数易得 DM , BD , 由 $BM=3t\text{cm}$, $CN=2t\text{cm}$, 易得

CD, 利用三角形相似的判定定理得 $\triangle CAN \sim \triangle DCM$, 由三角形相似的性质得 $\frac{AC}{CN} = \frac{CD}{DM}$, 解得 t.

答案: (1) 由题意知, $BM=3t\text{cm}$, $CN=2t\text{cm}$,

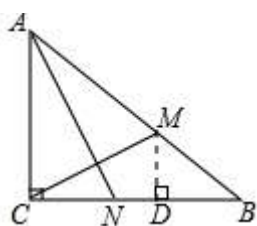
$$\therefore BN=(8-2t)\text{cm}, BA=\sqrt{6^2+8^2}=10(\text{cm}),$$

$$\text{当 } \triangle BMN \sim \triangle BAC \text{ 时, } \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}, \therefore \frac{3t}{10} = \frac{8-2t}{8}, \text{ 解得: } t = \frac{20}{11};$$

$$\text{当 } \triangle BMN \sim \triangle BCA \text{ 时, } \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA}, \therefore \frac{3t}{8} = \frac{8-2t}{10}, \text{ 解得: } t = \frac{32}{23},$$

$\therefore \triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, t 的值为 $\frac{20}{11}$ 或 $\frac{32}{23}$;

(2) 过点 M 作 $MD \perp CB$ 于点 D, 由题意得:



$$DM=BM\sin B=3t \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{5}t(\text{cm}), BD=BM\cos B=3t \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{5}t(\text{cm}),$$

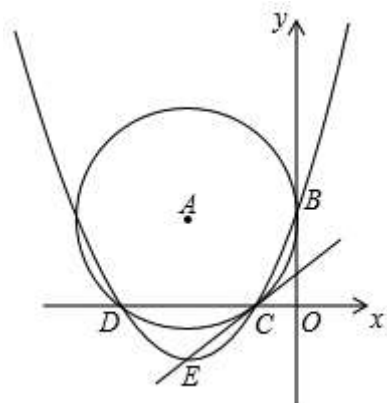
$$BM=3t\text{cm}, CN=2t\text{cm}, \therefore CD=(8-\frac{12}{5}t)\text{cm},$$

$$\because AN \perp CM, \angle ACB=90^\circ, \therefore \angle CAN + \angle ACM = 90^\circ, \angle MCD + \angle ACM = 90^\circ, \therefore \angle CAN = \angle MCD,$$

$$\because MD \perp CB,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle ACB = 90^\circ, \therefore \triangle CAN \sim \triangle DCM, \therefore \frac{AC}{CN} = \frac{CD}{DM}, \therefore \frac{6}{2t} = \frac{8-\frac{12}{5}t}{\frac{9}{5}t}, \text{ 解得 } t = \frac{13}{12}.$$

25. 如图, 在平面直角坐标系中, $\odot A$ 与 x 轴相交于 C(-2, 0), D(-8, 0) 两点, 与 y 轴相切于点 B(0, 4).



(1) 求经过 B, C, D 三点的抛物线的函数表达式;

(2) 设抛物线的顶点为 E, 证明: 直线 CE 与 ⊙A 相切;

(3) 在 x 轴下方的抛物线上, 是否存在一点 F, 使 △BDF 面积最大, 最大值是多少? 并求出点 F 的坐标.

解析: (1) 把 B(0, 4), C(-2, 0), D(-8, 0) 代入二次函数的解析式即可得到结果;

(2) 由 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 4 = \frac{1}{4}(x+5)^2 - \frac{9}{4}$, 得到顶点坐标 $E(-5, -\frac{9}{4})$, 求得直线 CE 的函数

解析式 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$, 在 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 中, 令 $x=0$, $y = \frac{3}{2}$, 得到 $G(0, \frac{3}{2})$, 如图 1, 连接 AB, AC,

AG, 得 $BG = OB - OG = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $CG = \frac{5}{2}$, 得到 $BG = CG$, $AB = AC$, 证得 $\triangle ABG \cong \triangle ACG$, 得到 $\angle ACG =$

$\angle ABG$, 由于 ⊙A 与 y 轴相切于点 B(0, 4), 于是得到 $\angle ABG = 90^\circ$, 即可求得结论;

(3) 如图 2, 连接 BD, BF, DF, 设 $F(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4)$, 过 F 作 $FN \parallel y$ 轴交 BD 于点 N, 求得直

线 BD 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 4$, 得到点 N 的坐标为 $(t, \frac{1}{2}t + 4)$, 于是得到 $FN = \frac{1}{2}t + 4 - (\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}$

$t + 4) = -\frac{1}{4}t^2 - 2t$, 推出 $S_{\triangle DBF} = S_{\triangle DNF} + S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2}OD \cdot FN = \frac{1}{2} \times 8 \times (-\frac{1}{4}t^2 - 2t) = -t^2 - 8t = -(t+4)^2 + 16$,

即可得到结论.

答案: (1) 设抛物线的解析式为: $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{把 } B(0, 4), C(-2, 0), D(-8, 0) \text{ 代入得: } \begin{cases} 4 = c, \\ 0 = 4a - 2b + c, \\ 0 = 64a - 8b + c, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{2}, \\ c = 4. \end{cases}$$

∴ 经过 B, C, D 三点的抛物线的函数表达式为: $y = 14x^2 + 52x + 4$;

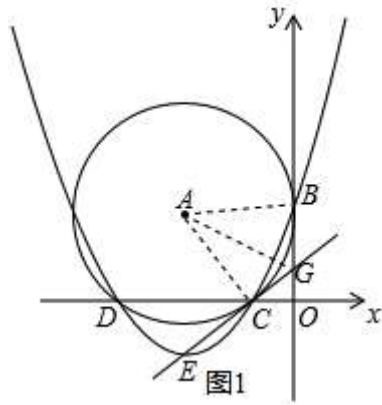
(2) ∵ $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 4 = \frac{1}{4}(x+5)^2 - \frac{9}{4}$, ∴ $E(-5, -\frac{9}{4})$,

设直线 CE 的函数解析式为 $y = mx + n$, 直线 CE 与 y 轴交于点 G, 则 $\begin{cases} 0 = -2m + n, \\ -\frac{9}{4} = -5m + n, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = \frac{3}{4}, \\ n = \frac{3}{2}. \end{cases} \therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2},$$

在 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 中, 令 $x=0$, $y = \frac{3}{2}$, ∴ $G(0, \frac{3}{2})$,

如图 1, 连接 AB, AC, AG,



则 $BG=OB-OG=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, $CG=\sqrt{OC^2+OG^2}=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$,

$\therefore BG=CG$, $AB=AC$,

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ACG$ 中,
$$\begin{cases} AB=AC, \\ BG=CG, \therefore \triangle ABG \cong \triangle ACG, \therefore \angle ACG=\angle ABG, \\ AG=AG, \end{cases}$$

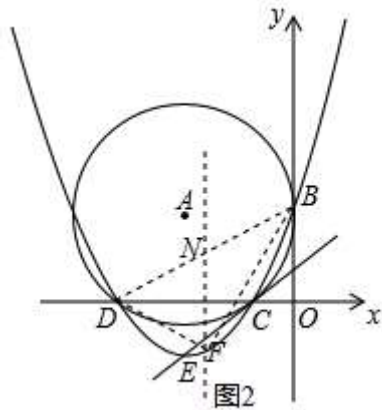
$\because \odot A$ 与 y 轴相切于点 $B(0, 4)$, $\therefore \angle ABG=90^\circ$, $\therefore \angle ACG=\angle ABG=90^\circ$

\because 点 C 在 $\odot A$ 上, \therefore 直线 CE 与 $\odot A$ 相切;

(3) 存在点 F , 使 $\triangle BDF$ 面积最大,

如图 2 连接 BD , BF , DF , 设 $F(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4)$,

过 F 作 $FN \parallel y$ 轴交 BD 于点 N ,



设直线 BD 的解析式为 $y=kx+d$, 则
$$\begin{cases} 4=d, \\ 0=-8k+d, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{2}, \\ d=4. \end{cases}$$

\therefore 直线 BD 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+4$, \therefore 点 N 的坐标为 $(t, \frac{1}{2}t+4)$,

$\therefore FN=\frac{1}{2}t+4-(\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t+4)=-\frac{1}{4}t^2-2t$,

$$\therefore S_{\triangle DBF} = S_{\triangle DNF} + S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2} OD \cdot FN = \frac{1}{2} \times 8 \times \left(-\frac{1}{4} t^2 - 2t\right) = -t^2 - 8t = -(t+4)^2 + 16,$$

\therefore 当 $t = -4$ 时, $S_{\triangle DBF}$ 最大, 最大值是 16,

当 $t = -4$ 时, $\frac{1}{4} t^2 + \frac{5}{2} t + 4 = -2$, $\therefore F(-4, -2)$.