2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）数学理

一、选择题：本题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为A，函数y=ln(1-x)的定义域为B，则A∩B=(　　)

A.(1，2)
B.(1，2]
C.(-2，1)
D.[-2，1)

解析：由4-x2≥0，解得：-2≤x≤2，则函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域[-2，2]，

由对数函数的定义域可知：1-x＞0，解得：x＜1，则函数y=ln(1-x)的定义域(-∞，1)，
则A∩B=[-2，1).
答案：D.

2.已知a∈R，i是虚数单位，若z=a+3i，$z\cdot\bar{z}$=4，则a=(　　)

A.1或-1

B.$\sqrt{7}$或$-\sqrt{7}$

C.$-\sqrt{3}$

D.$\sqrt{3}$

解析：由 $z=a+\sqrt{3}i$，则z的共轭复数 $\bar{z}=a-\sqrt{3}i$，

由 $z\cdot\bar{z}=\left(a+\sqrt{3}i\right)\left(a-\sqrt{3}i\right)=a^2+3=4$，则 a^2=1，解得：a=±1，

∴a的值为1或-1.
答案：A.

3.已知命题p：∀x＞0，ln(x+1)＞0；命题q：若a＞b，则 a^2＞b^2，下列命题为真命题的是(　　)
A.p∧q
B.p∧¬q
C.¬p∧q
D.¬p∧¬q
解析：命题p：∀x＞0，ln(x+1)＞0，则命题p为真命题，则¬p为假命题；
取a=-1，b=-2，a＞b，但 a^2＜b^2，则命题q是假命题，则¬q是真命题.
∴p∧q是假命题，p∧¬q是真命题，¬p∧q是假命题，¬p∧¬q是假命题.
答案：B.

4.已知 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ 3x+y+5\le 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$，则 z=x+2y 的最大值是(　　)

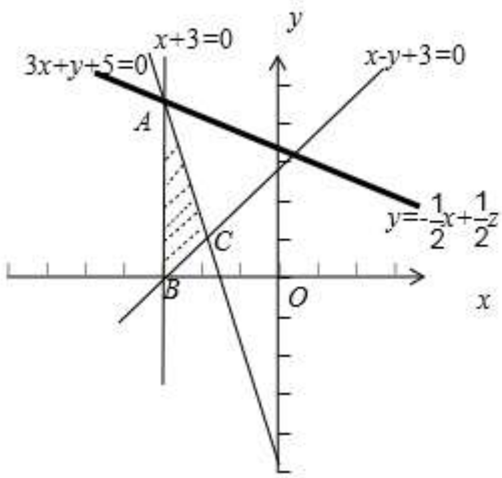
A.0

B.2

C.5

D.6

解析：画出约束条件$\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ 3x+y+5\le 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$表示的平面区域，如图所示；



由$\begin{cases} x+3=0 \\ 3x+y+5=0 \end{cases}$解得 A(-3，4)，

此时直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 在 y 轴上的截距最大，

所以目标函数 z=x+2y 的最大值为 z_{max}=-3+2×4=5.

答案：C.

5.为了研究某班学生的脚长 x(单位：厘米)和身高 y(单位：厘米)的关系，从该班随机抽取 10 名学生，根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系，设其回归直线方程为 $y=\hat{b}x+a$，已知 $\sum_{i=1}^{10}x_i=225,\sum_{i=1}^{10}y_i=1600,\hat{b}=4$，该班某学生的脚长为 24，据此估计其身高为(　　)

A.160

B.163

C.166

D.170

解析：由线性回归方程为 $y=4x+a$，

则 $\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=225,\bar{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=160$，

则数据的样本中心点(22.5，160)，

由回归直线方程样本中心点，则 $a=y-4x=160-4\times22.5=70$，

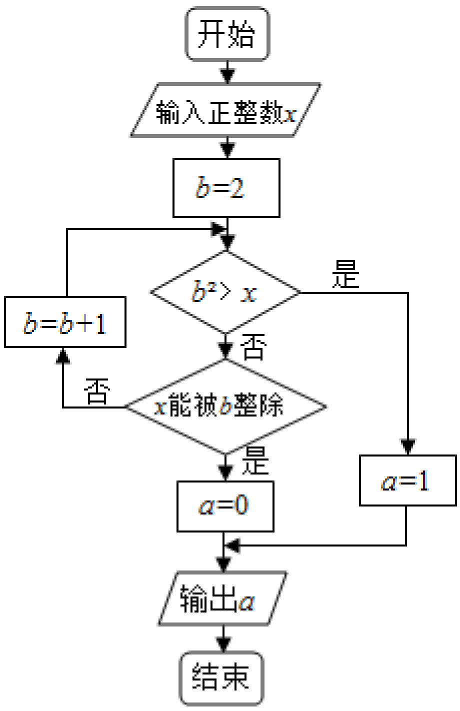
∴回归直线方程为 $y=4x+70$，

当 x=24 时， $y=4\times24+70=166$，

则估计其身高为 166.

答案：C.

6.执行两次如图所示的程序框图，若第一次输入的 x 值为 7，第二次输入的 x 值为 9，则第一次，第二次输出的 a 值分别为(　　)



A.0，0

B.1，1

C.0，1

D.1，0

解析：当输入的 x 值为 7 时，

第一次，不满足 $b^2>x$，也不满足 x 能被 b 整数，故 b=3；

第二次，满足 $b^2>x$，故输出 a=1；

当输入的 x 值为 9 时，

第一次，不满足 $b^2>x$，也不满足 x 能被 b 整数，故 b=3；

第二次，不满足 $b^2>x$，满足 x 能被 b 整数，故输出 a=0.

答案：D

7.若 a＞b＞0，且 ab=1，则下列不等式成立的是(　　)

A. $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^{a}}<\log_2(a+b)$

B. $\frac{b}{2^{a}}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C. $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^{a}}$

D. $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^{a}}$

解析：∵a＞b＞0，且 ab=1，

∴可取 a=2，$b=\frac{1}{2}$.

则 $a+\frac{1}{b}=4,\frac{b}{2^{a}}=\frac{\frac{1}{2}}{2^{2}}=\frac{1}{8},\log_2(a+b)=\log_2\left(2+\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{5}{2}\in(1,2)$，

∴ $\frac{b}{2^{a}}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$.

答案：B.

8.从分别标有 1，2，…，9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，每次抽取 1 张，则抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是(　　)

A. $\frac{5}{18}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{5}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

解析：从分别标有 1，2，…，9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，共有 $C_9^2=36$ 种不同情况，

且这些情况是等可能发生的，

抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的情况有 $C_5^1C_4^1=20$ 种，

故抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率 $P=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

答案：C.

9.在 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若△ABC 为锐角三角形，且满足 sinB(1+2cosC)=2sinAcosC+cosAsinC，则下列等式成立的是(　　)

A. a=2b

B. $b=2a$

C. $A=2B$

D. $B=2A$

解析：在 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，满足 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C+\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin B$，

可得：$2\sin B\cos C=\sin A\cos C$，因为△ABC 为锐角三角形，所以 $2\sin B=\sin A$，

由正弦定理可得：$2b=a$.

答案：A.

10.已知当 $x\in[0，1]$时，函数 $y=(mx-1)^2$的图象与$y=\sqrt{x}+m$的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(0，1]\cup[2\sqrt{3}，+\infty)$

B. $(0，1]\cup[3，+\infty)$

C. $(0，\sqrt{2})\cup[2\sqrt{3}，+\infty)$

D. $(0，\sqrt{2}]\cup[3，+\infty)$

解析：根据题意，由于 m 为正数，$y=(mx-1)^2$为二次函数，在区间$(0，\frac{1}{m})$为减函数，$(\frac{1}{m}，+\infty)$为增函数，

函数$y=\sqrt{x}+m$为增函数，

分 2 种情况讨论：

①、当 $0<m\leqslant 1$ 时，有$\frac{1}{m}\geqslant 1$，

在区间$[0，1]$上，$y=(mx-1)^2$为减函数，且其值域为$[(m-1)^2，1]$，

函数$y=\sqrt{x}+m$为增函数，其值域为$[m，1+m]$，

此时两个函数的图象有 1 个交点，符合题意；

②、当 $m>1$ 时，有$\frac{1}{m}<1$，

$y=(mx-1)^2$在区间$(0，\frac{1}{m})$为减函数，$(\frac{1}{m}，1)$为增函数，

函数$y=\sqrt{x}+m$为增函数，其值域为$[m，1+m]$，

若两个函数的图象有 1 个交点，则有$(m-1)^2\geqslant 1+m$，

解可得 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 3$，

又由 m 为正数，则 $m\geqslant 3$；

综合可得：m 的取值范围是$(0，1]\cup[3，+\infty)$.

答案：B.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11. 已知$(1+3x)^n$的展开式中含有x^2的系数是54，则n=____.

解析：$(1+3x)^n$的展开式中通项公式：$T_{r+1}=C_n^r(3x)^r=3^rC_n^rx^r$.

∵含有x^2的系数是54，∴r=2.

∴$3^2C_n^2=54$，可得$C_n^2=6$，∴$\frac{n(n-1)}{2}=6$，n∈N*.

解得n=4.
答案：4.

12. 已知$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，若$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，则实数λ的值是____.

解析：$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，

∴$|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1$，且$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=0$；

又$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，

∴$\left(\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}\right)=\left|\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\times|\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}|\times\cos 60°$，

即$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}^2+\left(\sqrt{3}\lambda-1\right)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_2}^2=\sqrt{3\overrightarrow{e_1}^2-2\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2}\times\sqrt{\overrightarrow{e_1}^2+2\lambda\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\lambda^2\overrightarrow{e_2}^2}\times\frac{1}{2}$，

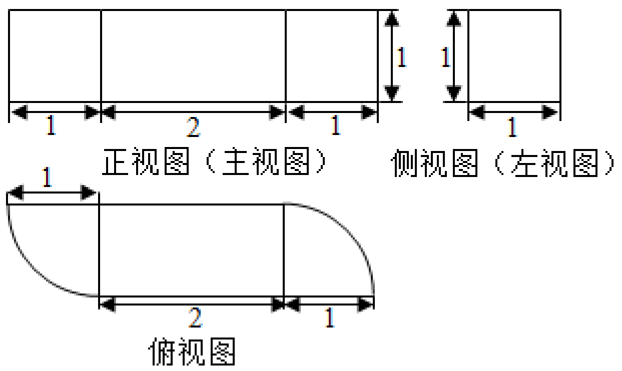
化简得$\sqrt{3}-\lambda=\sqrt{3+1}\times\sqrt{1+\lambda^2}\times\frac{1}{2}$，

即$\sqrt{3}-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2}$，

解得$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 由一个长方体和两个$\frac{1}{4}$圆柱体构成的几何体的三视图如图，则该几何体的体积为____.



解析：由长方体长为 2，宽为 1，高为 1，则长方体的体积 $V_1=2\times1\times1=2$，

圆柱的底面半径为 1，高为 1，则圆柱的体积$V_2=\frac{1}{4}\times\pi\times1^2\times1=\frac{\pi}{4}$，

则该几何体的体积$V=V_1+2V_1=2+\frac{\pi}{2}$.

答案：$2+\frac{\pi}{2}$.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$(p＞0)交于 A，B 两点，若|AF|+|BF|=4|OF|，则该双曲线的渐近线方程为____.

解析：把 $x^2=2py$(p＞0)代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)，

可得：$a^2y^2-2pb^2y+a^2b^2=0$，

$\therefore y_A+y_B=\frac{2pb^2}{a^2}$，

$\because$|AF|+|BF|=4|OF|，$\therefore y_A+y_B+2\times\frac{p}{2}=4\times\frac{p}{2}$，

$\therefore \frac{2pb^2}{a^2}=p$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$该双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

答案：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

15. 若函数 $e^xf(x)$($e\approx2.71828\cdots$是自然对数的底数)在 f(x)的定义域上单调递增，则称函数

f(x)具有M性质.下列函数中所有具有M性质的函数的序号为____.

①$f(x)=2^{-x}$　　②$f(x)=3^{-x}$　　③$f(x)=x^3$　　④$f(x)=x^2+2$.

解析：对于①，$f(x)=2^{-x}$，则 $g\left(x\right)=e^{x}f\left(x\right)=e^{x}\cdot 2^{-x}=\left(\dfrac{e}{2}\right)^{x}$ 为实数集上的增函数；

对于②，$f(x)=3^{-x}$，则 $g\left(x\right)=e^{x}f\left(x\right)=e^{x}\cdot 3^{-x}=\left(\dfrac{e}{3}\right)^{x}$ 为实数集上的减函数；

对于③，$f(x)=x^3$，则 $g(x)=e^x f(x)=e^x\cdot x^3$，

$g'(x)=e^x\cdot x^3+3e^x\cdot x^2=e^x(x^3+3x^2)=e^x\cdot x^2(x+3)$，当 $x<-3$ 时，$g'(x)<0$，

∴$g(x)=e^x f(x)$在定义域R上先减后增；

对于④，$f(x)=x^2+2$，则 $g(x)=e^x f(x)=e^x(x^2+2)$，

$g'(x)=e^x(x^2+2)+2xe^x=e^x(x^2+2x+2)>0$ 在实数集R上恒成立，

∴$g(x)=e^x f(x)$在定义域R上是增函数.

∴具有M性质的函数的序号为①④.

答案：①④.

三、解答题

16.设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 $0<\omega<3$，已知 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

(Ⅰ)求ω；

(Ⅱ)将函数 $y=f(x)$的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍(纵坐标不变)，再将得到的图象向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位，得到函数 $y=g(x)$的图象，求 $g(x)$在$[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$上的最小值.

解析：(Ⅰ)利用三角恒等变换化函数 f(x)为正弦型函数，根据 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ 求出ω的值；

(Ⅱ)写出 f(x)解析式，利用平移法则写出 g(x)的解析式，求出 $x\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$时 g(x)的最小值.

答案：(Ⅰ)函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\omega x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\omega x\sin\dfrac{\pi}{6}-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega x\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\dfrac{3}{2}\cos\omega x$

$=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}\right)=0$，

$\therefore \frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}=k\pi$，k∈Z，
解得 ω=6k+2，
又 0＜ω＜3，
∴ω=2；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

将函数 y=f(x)的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象；

再将得到的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到$y=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，

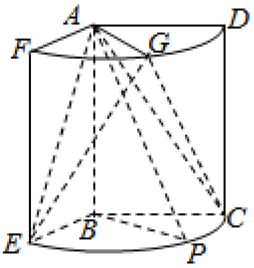
∴函数$y=g\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$；

当$x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$时，$x-\frac{\pi}{12}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，

$\therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，

∴当 x=$-\frac{\pi}{4}$时，g(x)取得最小值是$-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=-\frac{3}{2}$.

17.如图，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形 ABCD(及其内部)以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 120°得到的，G 是 DF 的中点.



(Ⅰ)设 P 是 CE 上的一点，且 AP⊥BE，求∠CBP 的大小；

(Ⅱ)当 AB=3，AD=2 时，求二面角 E-AG-C 的大小.
解析：(Ⅰ)由已知利用线面垂直的判定可得 BE⊥平面 ABP，得到 BE⊥BP，结合∠EBC=120°

求得∠CBP=30°；

(Ⅱ)法一、取EC的中点H，连接EH，GH，CH，可得四边形BEGH为菱形，取AG中点M，连接EM，CM，EC，得到EM⊥AG，CM⊥AG，说明∠EMC为所求二面角的平面角.求解三角形得二面角E-AG-C的大小.

法二、以B为坐标原点，分别以BE，BP，BA所在直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系.求出A，E，G，C的坐标，进一步求出平面AEG与平面ACG的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得二面角E-AG-C的大小.

答案：(Ⅰ)∵AP⊥BE，AB⊥BE，且AB，AP?平面ABP，AB∩AP=A，

∴BE⊥平面ABP，又BP?平面ABP，

∴BE⊥BP，又∠EBC=120°，

因此∠CBP=30°；

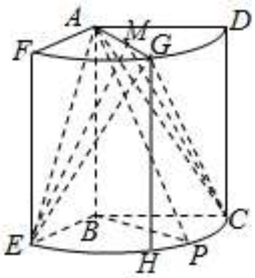
(Ⅱ)解法一、

取EC的中点H，连接EH，GH，CH，

∵∠EBC=120°，∴四边形BECH为菱形，

$\therefore AE=GE=AC=GC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

取AG中点M，连接EM，CM，EC，



则EM⊥AG，CM⊥AG，

∴∠EMC为所求二面角的平面角.

又AM=1，$\therefore EM=CM=\sqrt{13-1}=2\sqrt{3}$.

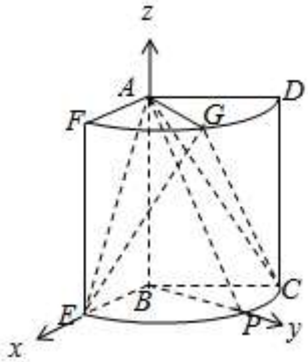
在△BEC中，由于∠EBC=120°，

由余弦定理得：$EC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°=12$，

$\therefore EC=2\sqrt{3}$，因此△EMC为等边三角形，

故所求的角为60°.

解法二、以B为坐标原点，分别以BE，BP，BA所在直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系.



由题意得：A(0，0，3)，E(2，0，0)，G(1，$\sqrt{3}$，3)，C(-1，$\sqrt{3}$，0)，

故 $\overrightarrow{AE}=(2,0,-3),\overrightarrow{AG}=(1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{CG}=(2,0,3)$.

设 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 AEG 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x_1-3z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取 $z_1=2$，得 $\vec{m}=(3,-\sqrt{3},2)$；

设 $\vec{n}=(x_2, y_2, z_2)$ 为平面 ACG 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CG}=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ 2x_2+3z_2=0\end{cases}$，取 $z_2=-2$，得 $\vec{n}=(3,-\sqrt{3},-2)$.

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

∴二面角 E-AG-C 的大小为 60°.

18.在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有 6 名男志愿者 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 和 4 名女志愿者 B_1，B_2，B_3，B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.

(Ⅰ)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率.

(Ⅱ)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列与数学期望 EX.

解析：(1)利用组合数公式计算概率；

(2)使用超几何分布的概率公式计算概率，得出分布列，再计算数学期望.

答案：(I)记接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的事件为 M，

则 $P(M)=\dfrac{C_8^4}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{18}$.

(II)X 的可能取值为：0，1，2，3，4，

$\therefore P(X=0)=\dfrac{C_6^5}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{42}$，

$P\left(X=1\right)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,

$P\left(X=2\right)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$,

$P\left(X=3\right)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,

$P\left(X=4\right)=C_6^1C_4^4C_{10}^5=\frac{1}{42}$.

∴X 的分布列为

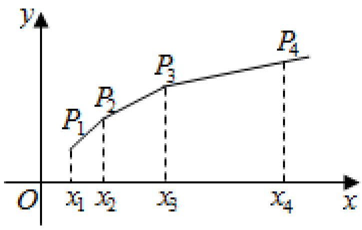
X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{42}+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{21}+4\times\frac{1}{42}=2$.

19. 已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且 $x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$.

(Ⅰ)求数列$\{x_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)如图，在平面直角坐标系 x0y 中，依次连接点 $P_1(x_1,1)$，$P_2(x_2,2)\cdots P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$得到折线 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$，求由该折线与直线 y=0，$x=x_1$，$x=x_{n+1}$所围成的区域的面积 T_n.



解析：(I)列方程组求出首项和公比即可得出通项公式；

(II)从各点向 x 轴作垂线，求出梯形的面积的通项公式，利用错位相减法求和即可.

【解答】解：(I)设数列$\{x_n\}$的公比为 q，则 q＞0，

由题意得$\begin{cases}x_1+x_1q=3\\x_1q^2-x_1q=2\end{cases}$,

两式相比得：$\frac{1+q}{q^2-q}=\frac{3}{2}$，解得 q=2 或$q=-\frac{1}{3}$(舍)，

∴$x_1=1$，

∴$x_n=2^{n-1}$.

(II)过 P_1，P_2，P_3，…，P_n向 x 轴作垂线，垂足为 Q_1，Q_2，Q_3，…，Q_n，

记梯形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为 b_n，

则$b_n=\frac{n+n+1}{2}\times2^{n-1}=\left(2n+1\right)\times2^{n-2}$,

∴$T_n=3\times2^{-1}+5\times2^0+7\times2^1+\cdots+(2n+1)\times2^{n-2}$，①

$\therefore 2T_n=3\times2^0+5\times2^1+7\times2^2+\cdots+(2n+1)\times2^{n-1}$，②

①-②得：$-T_n=32+(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n+1)\times2^{n-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{2\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}-\left(2n+1\right)\times2^{n-1}=-\frac{1}{2}+\left(1-2n\right)\times2^{n-1}$.

$\therefore T_n=\frac{\left(2n-1\right)\times2^n+1}{2}$.

20.已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$，$g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$，其中 $e\approx2.17828\cdots$是自然对数的底数.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$在点$(\pi，f(\pi))$处的切线方程；

(Ⅱ)令 $h(x)=g(x)-a\ f(x)(a\in R)$，讨论 $h(x)$的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

解析：(I)$f(\pi)=\pi^2-2$. $f'(x)=2x-2\sin x$，可得 $f'(\pi)=2\pi$即为切线的斜率，利用点斜式即可得出切线方程.

(II)$h(x)=g(x)-a\ f(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$，可得 $h'(x)=2(x-\sin x)(e^x-a)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})$.令 $u(x)=x-\sin x$，则 $u'(x)=1-\cos x\geqslant0$，可得函数 $u(x)$在 R 上单调递增.

由 $u(0)=0$，可得 $x>0$ 时，$u(x)>0$；$x<0$ 时，$u(x)<0$.

对 a 分类讨论：$a\leqslant0$ 时，$0<a<1$ 时，当 $a=1$ 时，$a>1$ 时，利用导数研究函数的单调性极值即可得出.

答案：(I)$f(\pi)=\pi^2-2$. $f'(x)=2x-2\sin x$，$\therefore f'(\pi)=2\pi$.

∴曲线 $y=f(x)$在点$(\pi，f(\pi))$处的切线方程为：$y-(\pi^2-2)=2\pi(x-\pi)$.

化为：$2\pi x-y-\pi^2-2=0$.

(II)$h(x)=g(x)-a\ f(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$

$h'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)-a(2x-2\sin x)$

$=2(x-\sin x)(e^x-a)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})$.

令 $u(x)=x-\sin x$，则 $u'(x)=1-\cos x\geqslant0$，∴函数 $u(x)$在 R 上单调递增.

∵$u(0)=0$，∴$x>0$ 时，$u(x)>0$；$x<0$ 时，$u(x)<0$.

(1)$a\leqslant0$ 时，$ex-a>0$，∴$x>0$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$在$(0，+\infty)$单调递增；

$x<0$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$在$(-\infty，0)$单调递减.

∴$x=0$ 时，函数 $h(x)$取得极小值，$h(0)=-1-2a$.

(2)$a>0$ 时，令 $h'(x)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})=0$.

解得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$.

①$0<a<1$ 时，$x\in(-\infty，\ln a)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$单调递增；

$x\in(\ln a，0)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$单调递减；

$x\in(0，+\infty)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$单调递增.

∴当 $x=0$ 时，函数 $h(x)$取得极小值，$h(0)=-2a-1$.

当 $x=\ln a$ 时，函数 $h(x)$取得极大值，$h(\ln a)=-a[\ln^2a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2]$.

②当 $a=1$ 时，$\ln a=0$，$x\in R$ 时，$h'(x)\geqslant0$，∴函数 $h(x)$在 R 上单调递增.

③$1<a$ 时，$\ln a>0$，$x\in(-\infty，0)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$单调递增；

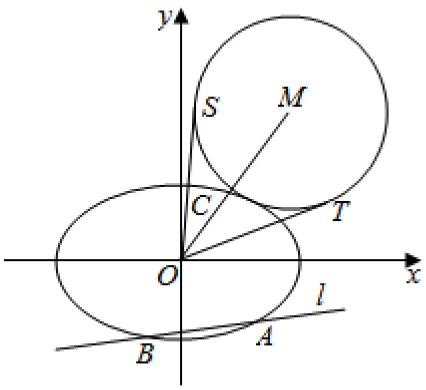
$x\in(0，\ln a)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$单调递减；

$x\in(\ln a，+\infty)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$单调递增.

∴当 $x=0$ 时，函数 $h(x)$取得极大值，$h(0)=-2a-1$.

当 x=lna 时，函数 h(x)取得极小值，h(lna)=-a[$\ln^2$a-2lna+sin(lna)+cos(lna)+2].
综上所述：a≤0 时，函数 h(x)在(0，+∞)单调递增；x<0 时，函数 h(x)在(-∞，0)单调递减.
x=0 时，函数 h(x)取得极小值，h(0)=-1-2a.
0<a<1 时，函数 h(x)在 x∈(-∞，lna)是单调递增；函数 h(x)在 x∈(lna，0)上单调递减.
当 x=0 时，函数 h(x)取得极小值，h(0)=-2a-1.当 x=lna 时，函数 h(x)取得极大值，h(lna)=-a[$\ln^2$a-2lna+sin(lna)+cos(lna)+2].
当 a=1 时，lna=0，函数 h(x)在 R 上单调递增.
a>1 时，函数 h(x)在(-∞，0)，(lna，+∞)上单调递增；函数 h(x)在(0，lna)上单调递减.
当 x=0 时，函数 h(x)取得极大值，h(0)=-2a-1.当 x=lna 时，函数 h(x)取得极小值，h(lna)=-a[$\ln^2$a-2lna+sin(lna)+cos(lna)+2].

21.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0)的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2.
(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；
(Ⅱ)如图，动直线 l：$y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}$交椭圆 E 于 A，B 两点，C 是椭圆 E 上的一点，直线 OC 的斜率为 k2，且$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，M 是线段 OC 延长线上一点，且|MC|：|AB|=2：3，⊙M 的半径为|MC|，OS，OT 是⊙M 的两条切线，切点分别为 S，T，求∠SOT 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率.



解析：(Ⅰ)由题意得关于 a，b，c 的方程组，求解方程组得 a，b 的值，则椭圆方程可求；
(Ⅱ)设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，联立直线方程与椭圆方程，利用根与系数的关系求得 A，B 的横坐标的和与积，由弦长公式求得|AB|，由题意可知圆 M 的半径 r，则$r=\frac{2}{3}|AB|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.由题意设知$k_2=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}$.得到直线 OC 的方程，与椭圆方程联立，求得 C 点坐标，可得|OC|，由题意可知，$\sin\frac{\angle SOT}{2}=\frac{r}{r+|OC|}=\frac{1}{1+\frac{|OC|}{r}}$.转化

为关于 k_1 的函数，换元后利用配方法求得∠SOT 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，取得最大值时直线 l 的斜率为 $k_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：(Ⅰ)由题意知，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2c=2\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$.

∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(Ⅱ)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，得 $\left(4k_1^2+2\right)x^2-4\sqrt{3}k_1x-1=0$.

由题意得 $\triangle=64k_1^2+8>0$.

$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}k_1}{2k_1^2+1}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2\left(2k_1^2+1\right)}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.

由题意可知圆 M 的半径 r 为

$r=\frac{2}{3}|AB|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.

由题意设知，$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，∴$k_2=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}$.

因此直线 OC 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x\end{cases}$，得 $x^2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$，$y^2=\frac{1}{1+4k_1^2}$.

因此，$|OC|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1+8k_1^{\ 2}}{1+4k_1^{\ 2}}}$.

由题意可知，$\sin\dfrac{\angle SOT}{2}=\dfrac{r}{r+|OC|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{|OC|}{r}}$.

而$\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+8k_1^{\ 2}}{1+4k_1^{\ 2}}}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sqrt{1+k_1^{\ 2}}\sqrt{1+8k_1^{\ 2}}}{1+2k_1^{\ 2}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\dfrac{1+2k_1^{\ 2}}{\sqrt{1+4k_1^{\ 2}}\sqrt{1+k_1^{\ 2}}}$.

令 $t=1+2k_1^{\ 2}$，则 $t>1$，$\dfrac{1}{t}\in(0,1)$，

因此，$\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{3}{2}\dfrac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{-\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}}\geq 1$.

当且仅当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $t=2$ 时等式成立，此时$k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \sin\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{1}{2}$，因此$\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{\pi}{6}$.

$\therefore$ $\angle SOT$ 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$.

综上所述：$\angle SOT$ 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$，取得最大值时直线 l 的斜率为$k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.