2016年湖北省随州市中考真题数学

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的)

1. $-\sqrt{2}$的相反数是(　　)

A. $-\sqrt{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：利用相反数的定义计算即可得到结果.
答案：C

2. 随着我国经济快速发展，轿车进入百姓家庭，小明同学在街头观察出下列四种汽车标志，其中既是中心对称图形，又是轴对称图形的是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

解析：A、不是轴对称图形，是中心对称图形；
B、是轴对称图形，不是中心对称图形；
C、是轴对称图形，也是中心对称图形；
D、不是轴对称图形，是中心对称图形.
答案：C.

3. 下列运算正确的是(　　)
A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $a^5 \div a^2 = a^3$

C. $(-3a)^3 = -9a^3$

D. $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$

解析：A、$a^2 \cdot a^3 = a^5$，此选项错误；

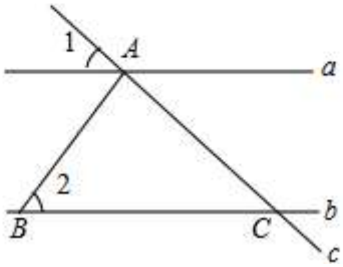
B、$a^5 \div a^2 = a^3$，此选项正确；

C、$(-3a)^3 = -27a^3$，此选项错误；

D、$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$，此选项错误.

答案：B.

4. 如图，直线 a∥b，直线 c 分别与 a、b 相交于 A、B 两点，AC⊥AB 于点 A，交直线 b 于点 C.已知∠1=42°，则∠2 的度数是(　　)



A. 38°

B. 42°

C. 48°

D. 58°

解析：∵直线 a∥b，

∴∠1=∠BCA，

∵∠1=42°，

∴∠BCA=42°，

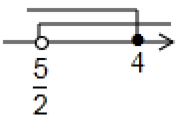
∵AC⊥AB，

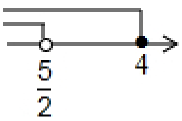
∴∠2+∠BCA=90°，

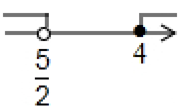
∴∠2=48°.

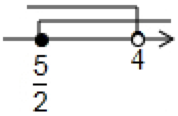
答案：C.

5. 不等式组$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 \le 7-\frac{3}{2}x \\ 5x-2 > 3(x+1) \end{cases}$的解集表示在数轴上，正确的是(　　)

A. 

B. 

C. 



D.

解析：解不等式$\frac{1}{2}$x-1≤7-$\frac{3}{2}$x，得：x≤4，

解不等式5x-2＞3(x+1)，得：x＞$\frac{5}{2}$，

∴不等式组的解集为：$\frac{5}{2}$＜x≤4.

答案：A.

6. 为了响应学校“书香校园”建设，阳光班的同学们积极捐书，其中宏志学习小组的同学捐书册数分别是：5，7，x，3，4，6.已知他们平均每人捐5本，则这组数据的众数、中位数和方差分别是(　　)

A.5，5，$\frac{3}{2}$

B.5，5，10

C.6，5.5，$\frac{11}{6}$

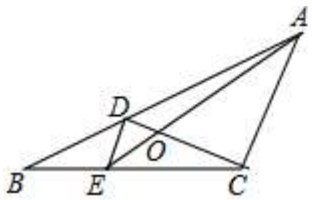
D.5，5，$\frac{5}{3}$

解析：由5，7，x，3，4，6.已知他们平均每人捐5本，得
x=5.
众数是5，中位数是5，

方差$\frac{(7-5)^2+(6-5)^2+2\times(5-5)^2+(4-5)^2+(3-5)^2}{6}=\frac{5}{3}$.

答案：D.

7. 如图，D、E分别是△ABC的边AB、BC上的点，且DE∥AC，AE、CD相交于点O，若$S_{\triangle DOE}$：$S_{\triangle COA}$=1：25，则$S_{\triangle BDE}$与$S_{\triangle CDE}$的比是(　　)



A.1：3
B.1：4
C.1：5
D.1：25
解析：∵DE∥AC，
∴△DOE∽△COA，又$S_{\triangle DOE}$：$S_{\triangle COA}$=1：25，

∴$\frac{DE}{AC}=\frac{1}{5}$，

∵DE∥AC，

∴$\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}=\frac{1}{5}$，

∴$\frac{BE}{EC}=\frac{1}{4}$，

∴$S_{\triangle BDE}$与$S_{\triangle CDE}$的比是 1：4.

答案：B.

8. 随州市尚市“桃花节”观赏人数逐年增加，据有关部门统计，2014 年约为 20 万人次，2016 年约为 28.8 万人次，设观赏人数年均增长率为 x，则下列方程中正确的是(　　)

A. $20(1+2x)=28.8$

B. $28.8(1+x)^2=20$

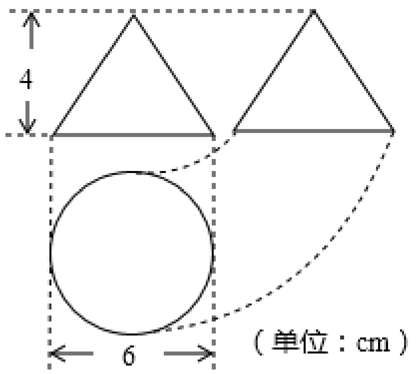
C. $20(1+x)^2=28.8$

D. $20+20(1+x)+20(1+x)^2=28.8$

解析：设观赏人数年均增长率为 x，那么依题意得 $20(1+x)^2=28.8$.

答案：C.

9. 如图是某工件的三视图，则此工件的表面积为(　　)



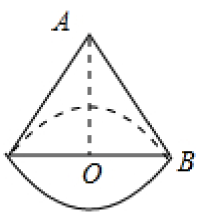
A. 15πcm^2

B. 51πcm^2

C. 66πcm^2

D. 24πcm^2

解析：由三视图，得



OB=3cm，OA=4cm，

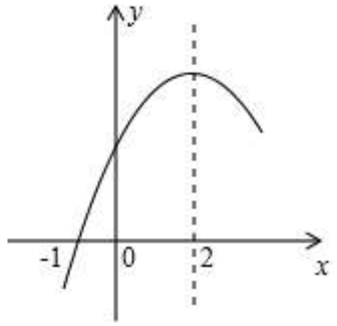
由勾股定理，得 AB=$\sqrt{3^2+4^2}$=5cm，

圆锥的侧面积$\frac{1}{2}$×6π×5=15πcm^2，

圆锥的底面积π×($\frac{6}{2}$)^2=9πcm，

圆锥的表面积 15π+9π=24π(cm^2).
答案：D.

10. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的部分图象如图所示，图象过点(-1，0)，对称轴为直线 x=2，下列结论：(1)4a+b=0；(2)9a+c＞3b；(3)8a+7b+2c＞0；(4)若点 A(-3，y_1)、点 B($-\frac{1}{2}$，y_2)、点 C($\frac{7}{2}$，y_3)在该函数图象上，则 $y_1<y_3<y_2$；(5)若方程 a(x+1)(x-5)=-3 的两根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，则 $x_1<-1<5<x_2$. 其中正确的结论有(　　)



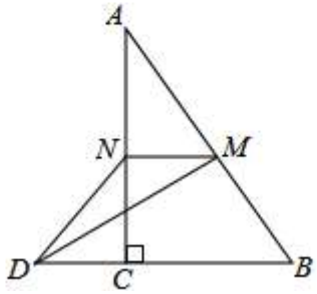
A. 2 个
B. 3 个
C. 4 个
D. 5 个
解析：(1)正确. 根据对称轴公式计算即可.
(2)错误，利用 x=-3 时，y＜0，即可判断.
(3)正确. 由图象可知抛物线经过(-1，0)和(5，0)，列出方程组求出 a、b 即可判断.
(4)错误. 利用函数图象即可判断.
(5)正确. 利用二次函数与二次不等式关系即可解决问题.
答案：B.

二、填空题(本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)
11. 2015 年“圣地车都”--随州改装车的总产值为 14.966 亿元，其中 14.966 亿元用科学记数法表示为_____元.
解析：14.966 亿=1.4966×10^9.
答案：1.4966×10^9.

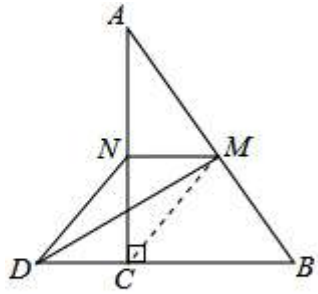
12. 已知等腰三角形的一边长为 9，另一边长为方程 $x^2-8x+15=0$ 的根，则该等腰三角形的周长为_____.
解析：由方程 $x^2-8x+15=0$ 得：(x-3)(x-5)=0，
∴x-3=0 或 x-5=0，
解得：x=3 或 x=5，
当等腰三角形的三边长为 9、9、3 时，其周长为 21；
当等腰三角形的三边长为 9、9、5 时，其周长为 23；
当等腰三角形的三边长为 9、3、3 时，3+3＜9，不符合三角形三边关系定理，舍去；
当等腰三角形的三边长为 9、5、5 时，其周长为 19；
综上，该等腰三角形的周长为 19 或 21 或 23.

答案：19 或 21 或 23.

13. 如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，M、N 分别是 AB、AC 的中点，延长 BC 至点 D，使 CD=$\frac{1}{3}$BD，连接 DM、DN、MN.若 AB=6，则 DN=_____.

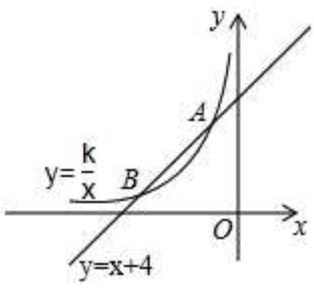


解析：连接 CM



∵M、N 分别是 AB、AC 的中点，
∴NM=$\frac{1}{2}$CB，MN∥BC，又 CD=$\frac{1}{3}$BD，
∴MN=CD，又 MN∥BC，
∴四边形 DCMN 是平行四边形，
∴DN=CM，
∵∠ACB=90°，M 是 AB 的中点，
∴CM=$\frac{1}{2}$AB=3，
∴DN=3.
答案：3.

14. 如图，直线 y=x+4 与双曲线 y=$\frac{k}{x}$(k≠0)相交于 A(-1，a)、B 两点，在 y 轴上找一点 P，当 PA+PB 的值最小时，点 P 的坐标为_____.



解析：把点 A 坐标代入 y=x+4 得，
-1+4=a，

a=3，

即 A(-1，3)，

把点 A 坐标代入双曲线的解析式：3=-k，

解得：k=-3，

联立两函数解析式得：$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$，

即点 B 坐标为：(-3，1)，

作出点 A 关于 y 轴的对称点 C，连接 BC，与 y 轴的交点即为点 P，使得 PA+PB 的值最小，

则点 C 坐标为：(1，3)，

设直线 BC 的解析式为：y=ax+b，

把 B、C 的坐标代入得：$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases}$，

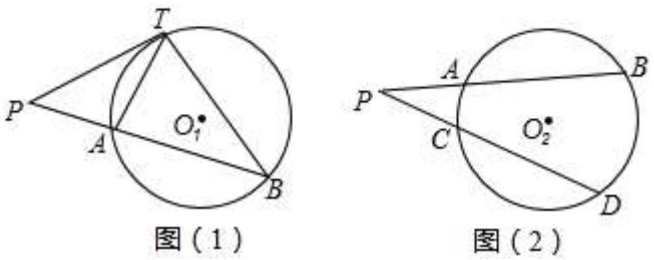
解得：$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$，

函数解析式为：y=$\dfrac{1}{2}$x+$\dfrac{5}{2}$，

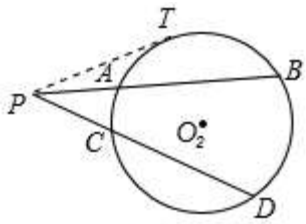
则与 y 轴的交点为：(0，$\dfrac{5}{2}$).

答案：(0，$\dfrac{5}{2}$).

15. 如图(1)，PT 与⊙O_1相切于点 T，PAB 与⊙O_1相交于 A、B 两点，可证明△PTA∽△PBT，从而有 PT^2=PA•PB.请应用以上结论解决下列问题：如图(2)，PAB、PCD 分别与⊙O_2相交于 A、B、C、D 四点，已知 PA=2，PB=7，PC=3，则 CD=_____.



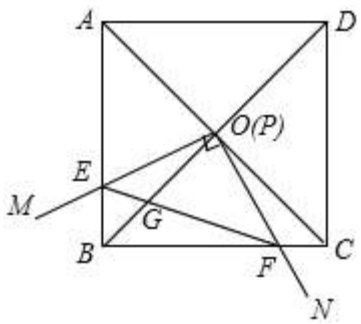
解析：如图 2 中，过点 P 作⊙O 的切线 PT，切点是 T.



图(2)

∵PT^2=PA•PB=PC•PD,
∵PA=2,PB=7,PC=3,
∴2×7=3×PD,
∴PD=$\dfrac{14}{3}$
∴CD=PD-PC=$\dfrac{14}{3}$-3=$\dfrac{5}{3}$.
答案:$\dfrac{5}{3}$.

16. 如图,边长为 1 的正方形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O.有直角∠MPN,使直角顶点 P 与点 O 重合,直角边 PM、PN 分别与 OA、OB 重合,然后逆时针旋转∠MPN,旋转角为θ(0°<θ<90°),PM、PN 分别交 AB、BC 于 E、F 两点,连接 EF 交 OB 于点 G,则下列结论中正确的是_____.



(1)EF=$\sqrt{2}$OE;(2)$S_{四边形OEBF}$:$S_{正方形ABCD}$=1:4;(3)BE+BF=$\sqrt{2}$OA;(4)在旋转过程中,当△BEF 与△COF 的面积之和最大时,AE=$\dfrac{3}{4}$;(5)OG•BD=AE^2+CF^2.
解析:(1)由四边形 ABCD 是正方形,直角∠MPN,易证得△BOE≌△COF(ASA),则可证得结论;
(2)由(1)易证得 $S_{四边形OEBF}=S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{4}S_{正方形ABCD}$,则可证得结论;
(3)由 BE=CF,可得 BE+BF=BC,然后由等腰直角三角形的性质,证得 BE+BF=$\sqrt{2}$OA;
(4)首先设 AE=x,则 BE=CF=1-x,BF=x,继而表示出△BEF 与△COF 的面积之和,然后利用二次函数的最值问题,求得答案;
(5)易证得△OEG∽△OBE,然后由相似三角形的对应边成比例,证得 OG•OB=OE^2,再利用 OB 与 BD 的关系,OE 与 EF 的关系,即可证得结论.
答案:(1),(2),(3),(5).

三、解答题(本题共 9 小题，共 72 分，解答应写出必要演算步骤，文字说明或证明过程)

17. 计算：$-|-1|+\sqrt{12}\cdot\cos30°-(-\frac{1}{2})^{-2}+(\pi-3.14)^{0}$.

解析：本题涉及绝对值、二次根式化简、特殊角的三角函数值、负指数幂、零指数幂 5 个考点.在计算时，需要针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

答案：原式$=-1+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4+1$

$=-1+3-4+1$

$=-1$.

18. 先化简，再求值：$(\frac{3}{x+1}-x+1)\div\frac{x^{2}+4x+4}{x+1}$，其中 $x=\sqrt{2}-2$.

解析：首先将括号里面的通分相减，然后将除法转化为乘法，化简后代入 x 的值即可求解.

答案：原式$=\left[\frac{3}{x+1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right]\cdot\frac{x+1}{(x+2)^{2}}$

$=\frac{-(x+2)(x-2)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{(x+2)^{2}}$

$=\frac{2-x}{x+2}$,

当 $x=\sqrt{2}-2$ 时，

原式$=\frac{2-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2+2}=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$.

19. 某校学生利用双休时间去距学校 10km 的炎帝故里参观，一部分学生骑自行车先走，过了 20min 后，其余学生乘汽车沿相同路线出发，结果他们同时到达.已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍，求骑车学生的速度和汽车的速度.

解析：求速度，路程已知，根据时间来列等量关系.关键描述语为：“一部分学生骑自行车先走，过了 20min 后，其余学生乘汽车沿相同路线出发，结果他们同时到达”，根据等量关系列出方程.

答案：设骑车学生的速度为 x 千米/小时，汽车的速度为 2x 千米/小时，

可得：$\frac{10}{x}=\frac{10}{2x}+\frac{20}{60}$，

解得：x=15，

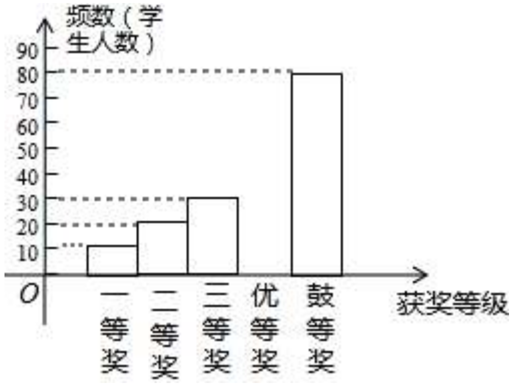
经检验 x=15 是原方程的解，

2x=2×15=30，

答：骑车学生的速度和汽车的速度分别是每小时 15km，30km.

20. 国务院办公厅 2015 年 3 月 16 日发布了《中国足球改革的总体方案》，这是中国足球历

史上的重大改革.为了进一步普及足球知识，传播足球文化，我市举行了“足球进校园”知识竞赛活动，为了解足球知识的普及情况，随机抽取了部分获奖情况进行整理，得到下列不完整的统计图表：



获奖等次	频数	频率
一等奖	10	0.05
二等奖	20	0.10
三等奖	30	b
优胜奖	a	0.30
鼓励奖	80	0.40

请根据所给信息，解答下列问题：

(1)a=_____，b=_____，且补全频数分布直方图；

(2)若用扇形统计图来描述获奖分布情况，问获得优胜奖对应的扇形圆心角的度数是多少？

(3)在这次竞赛中，甲、乙、丙、丁四位同学都获得一等奖，若从这四位同学中随机选取两位同学代表我市参加上一级竞赛，请用树状图或列表的方法，计算恰好选中甲、乙二人的概率.

解析：(1)根据公式频率=频数÷样本总数，求得样本总数，再根据公式得出 a，b 的值即可；

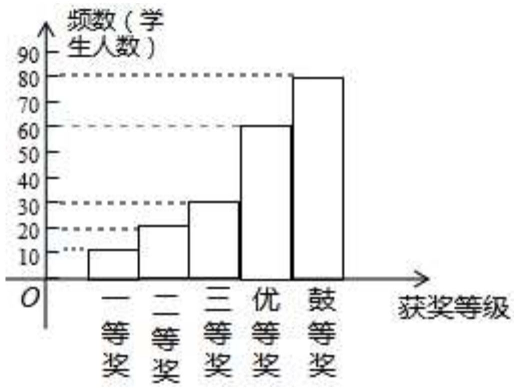
(2)根据公式优胜奖对应的扇形圆心角的度数=优胜奖的频率×360°计算即可；

(3)画树状图或列表将所有等可能的结果列举出来，利用概率公式求解即可.

答案：(1)样本总数为 10÷0.05=200 人，

a=200-10-20-30-80=60 人，

b=30÷200=0.15，



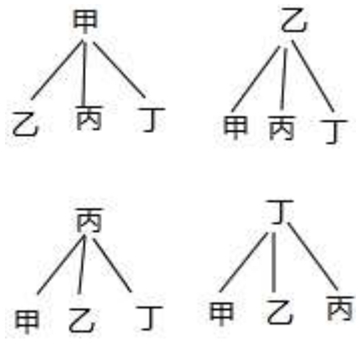
(2)优胜奖所在扇形的圆心角为 0.30×360°=108°；

(3)列表：甲乙丙丁分别用 ABCD 表示，

	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

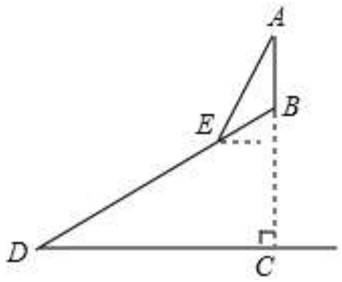
∵共有 12 种等可能的结果，恰好选中 A、B 的有 2 种，

画树状图如下：



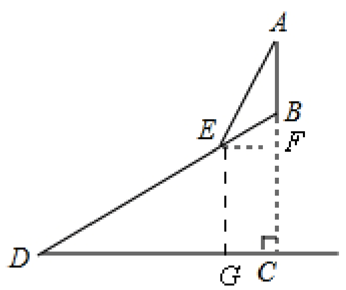
∴P(选中 A、B)=$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

21. 某班数学兴趣小组利用数学活动课时间测量位于烈山山顶的炎帝雕像高度，已知烈山坡面与水平面的夹角为 30°，山高 857.5 尺，组员从山脚 D 处沿山坡向着雕像方向前进 1620 尺到达 E 点，在点 E 处测得雕像顶端 A 的仰角为 60°，求雕像 AB 的高度.



解析：构造直角三角形，利用锐角三角函数，进行简单计算即可.

答案：如图，



过点 E 作 EF⊥AC，EG⊥CD，

在 Rt△DEG 中，∵DE=1620，∠D=30°，

∴EG=DEsin∠D=1620×$\frac{1}{2}$=810，

∵BC=857.5，CF=EG，

∴BF=BC-CF=47.5，

在Rt△BEF中，tan∠BEF=$\dfrac{BF}{EF}$，

∴EF=$\sqrt{3}$BF，

在Rt△AEF中，∠AEF=60°，设AB=x，

∵tan∠AEF=$\dfrac{AF}{EF}$，

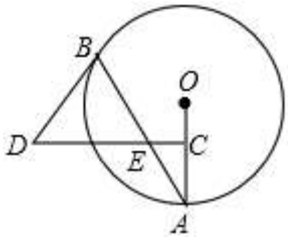
∴AF=EF×tan∠AEF，

∴x+47.5=3×47.5，

∴x=95，

答：雕像AB的高度为95尺.

22. 如图，AB是⊙O的弦，点C为半径OA的中点，过点C作CD⊥OA交弦AB于点E，连接BD，且DE=DB.



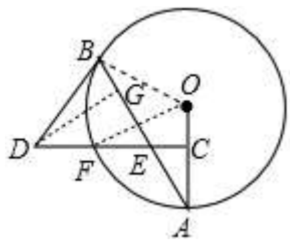
(1)判断BD与⊙O的位置关系，并说明理由；

(2)若CD=15，BE=10，tanA=$\dfrac{5}{12}$，求⊙O的直径.

解析：(1)连接OB，由圆的半径相等和已知条件证明∠OBD=90°，即可证明BD是⊙O的切线；

(2)过点D作DG⊥BE于G，根据等腰三角形的性质得到EG=$\dfrac{1}{2}$BE=5，由两角相等的三角形相似，△ACE∽△DGE，利用相似三角形对应角相等得到sin∠EDG=sinA=$\dfrac{5}{13}$，在Rt△EDG中，利用勾股定理求出DG的长，根据三角形相似得到比例式，代入数据即可得到结果.

答案：(1)证明：连接OB，



∵OB=OA，DE=DB，

∴∠A=∠OBA，∠DEB=∠ABD，

又∵CD⊥OA，

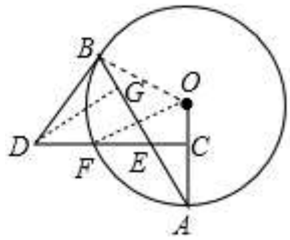
∴∠A+∠AEC=∠A+∠DEB=90°，

∴∠OBA+∠ABD=90°，

∴OB⊥BD，

∴BD是⊙O的切线；

(2)如图，过点 D 作 DG⊥BE 于 G，



∵DE=DB，

∴EG=$\frac{1}{2}$BE=5，

∵∠ACE=∠DGE=90°，∠AEC=∠GED，

∴∠GDE=∠A，

∴△ACE∽△DGE，

∴sin∠EDG=sinA=$\frac{EG}{DE}=\frac{3}{5}$，即 CE=13，

在 Rt△ECG 中，

∵DG=$\sqrt{DE^2-ED^2}$=12，

∵CD=15，DE=13，

∴DE=2，

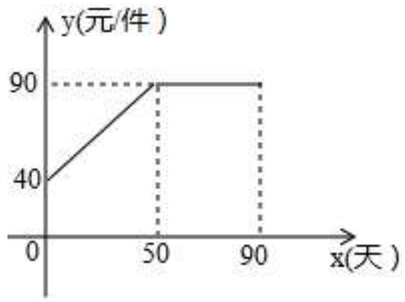
∵△ACE∽△DGE，

∴$\frac{AC}{DG}=\frac{CE}{GE}$，

∴AC=$\frac{CE}{GE}$·DG=$\frac{24}{5}$，

∴⊙O 的直径 2OA=4AD=$\frac{96}{5}$.

23. 九年级(3)班数学兴趣小组经过市场调查整理出某种商品在第 x 天(1≤x≤90,且 x 为整数)的售价与销售量的相关信息如下.已知商品的进价为 30 元/件，设该商品的售价为 y(单位：元/件)，每天的销售量为 p(单位：件)，每天的销售利润为 w(单位：元).



时间 x（天）	1	30	60	90
每天销售量 p（件）	198	140	80	20

(1)求出 w 与 x 的函数关系式；

(2)问销售该商品第几天时，当天的销售利润最大？并求出最大利润；
(3)该商品在销售过程中，共有多少天每天的销售利润不低于 5600 元？请直接写出结果.
解析：(1)当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，设商品的售价 y 与时间 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，由点的坐标利用待定系数法即可求出此时 y 关于 x 的函数关系式，根据图形可得出当 $50<x\leqslant 90$ 时，$y=90$. 再结合给定表格，设每天的销售量 p 与时间 x 的函数关系式为 $p=mx+n$，套入数据利用待定系数法即可求出 p 关于 x 的函数关系式，根据销售利润=单件利润×销售数量即可得出 w 关于 x 的函数关系式；
(2)根据 w 关于 x 的函数关系式，分段考虑其最值问题.当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，结合二次函数的性质即可求出在此范围内 w 的最大值；当 $50<x\leqslant 90$ 时，根据一次函数的性质即可求出在此范围内 w 的最大值，两个最大值作比较即可得出结论；
(3)令 $w\geqslant 5600$，可得出关于 x 的一元二次不等式和一元一次不等式，解不等式即可得出 x 的取值范围，由此即可得出结论.
答案：(1)当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，设商品的售价 y 与时间 x 的函数关系式为 $y=kx+b$(k、b 为常数且 $k\neq 0$)，
∵$y=kx+b$ 经过点(0，40)、(50，90)，
∴$\begin{cases}b=40\\50k+b=90\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=40\end{cases}$，
∴售价 y 与时间 x 的函数关系式为 $y=x+40$；
当 $50<x\leqslant 90$ 时，$y=90$.
∴售价 y 与时间 x 的函数关系式为 $y=\begin{cases}x+40(0\leq x\leq 50，且x为整数)\\90(50<x\leq 90，且x为整数)\end{cases}$.
由书记可知每天的销售量 p 与时间 x 成一次函数关系，
设每天的销售量 p 与时间 x 的函数关系式为 $p=mx+n$(m、n 为常数，且 $m\neq 0$)，
∵$p=mx+n$ 过点(60，80)、(30，140)，
∴$\begin{cases}60m+n=80\\30m+n=140\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=-2\\n=200\end{cases}$，
∴$p=-2x+200$($0\leqslant x\leqslant 90$，且 x 为整数)，
当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$w=(y-30)\cdot p=(x+40-30)(-2x+200)=-2x^2+180x+2000$；
当 $50<x\leqslant 90$ 时，$w=(90-30)(-2x+200)=-120x+12000$.
综上所示，每天的销售利润 w 与时间 x 的函数关系式是 w=
$\begin{cases}-2x^2+180x+2000(0\leq x\leq 50，且x为整数)\\-120x+12000(50<x\leq 90，且x为整数)\end{cases}$.
(2)当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$w=-2x^2+180x+2000=-2(x-45)^2+6050$，
∵$a=-2<0$ 且 $0\leqslant x\leqslant 50$，
∴当 $x=45$ 时，w 取最大值，最大值为 6050 元.
当 $50<x\leqslant 90$ 时，$w=-120x+12000$，
∵$k=-120<0$，w 随 x 增大而减小，
∴当 $x=50$ 时，w 取最大值，最大值为 6000 元.
∵$6050>6000$，
∴当 $x=45$ 时，w 最大，最大值为 6050 元.

即销售第 45 天时，当天获得的销售利润最大，最大利润是 6050 元.

(3)当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，令 $w=-2x^2+180x+2000\geqslant 5600$，即 $-2x^2+180x-3600\geqslant 0$，

解得：$30\leqslant x\leqslant 50$，

50-30+1=21(天)；

当 $50<x\leqslant 90$ 时，令 $w=-120x+12000\geqslant 5600$，即 $-120x+6400\geqslant 0$，

解得：$50<x\leqslant 53\frac{1}{3}$，

∵x 为整数，

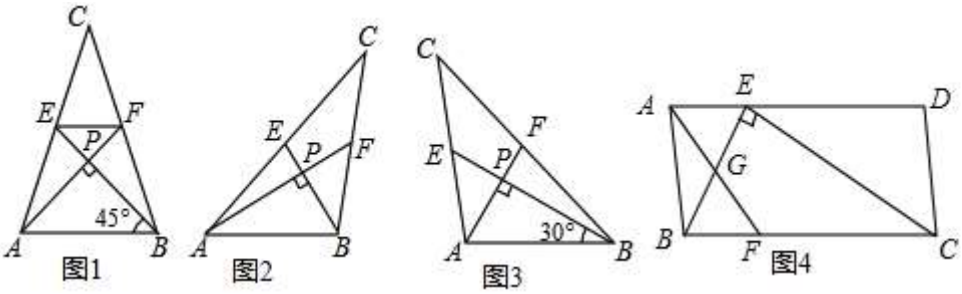
∴$50<x\leqslant 53$，

53-50=3(天).

综上可知：21+3=24(天)，

故该商品在销售过程中，共有 24 天每天的销售利润不低于 5600 元.

24. 爱好思考的小茜在探究两条直线的位置关系查阅资料时，发现了“中垂三角形”，即两条中线互相垂直的三角形称为“中垂三角形”. 如图(1)、图(2)、图(3)中，AM、BN 是△ABC 的中线，AN⊥BN 于点 P，像△ABC 这样的三角形均为“中垂三角形”. 设 BC=a，AC=b，AB=c.



【特例探究】

(1)如图 1，当 tan∠PAB=1，$c=4\sqrt{2}$ 时，a=_____，b=_____；

如图 2，当∠PAB=30°，c=2 时，a=_____，b=_____；

【归纳证明】

(2)请你观察(1)中的计算结果，猜想 a^2、b^2、c^2 三者之间的关系，用等式表示出来，并利用图 3 证明你的结论.

【拓展证明】

(3)如图 4，▱ABCD 中，E、F 分别是 AD、BC 的三等分点，且 AD=3AE，BC=3BF，连接 AF、BE、CE，且 BE⊥CE 于 E，AF 与 BE 相交点 G，$AD=3\sqrt{5}$，AB=3，求 AF 的长.

解析：(1)①首先证明△APB，△PEF 都是等腰直角三角形，求出 PA、PB、PE、PF，再利用勾股定理即可解决问题.

②连接 EF，在 RT△PAB，RT△PEF 中，利用 30°性质求出 PA、PB、PE、PF，再利用勾股定理即可解决问题.

(2)结论 $a^2+b^2=5c^2$. 设 MP=x，NP=y，则 AP=2x，BP=2y，利用勾股定理分别求出 a^2、b^2、c^2 即可解决问题.

(3)取 AB 中点 H，连接 FH 并且延长交 DA 的延长线于 P 点，首先证明△ABF 是中垂三角形，利用(2)中结论列出方程即可解决问题.

答案：(1)解：如图 1 中，

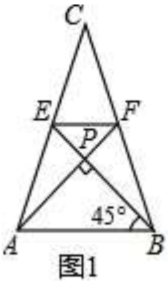


图1

∵CE=AE，CF=BF，

∴EF∥AB，EF=$\frac{1}{2}$AB=2$\sqrt{2}$，

∵tan∠PAB=1，

∴∠PAB=∠PBA=∠PEF=∠PFE=45°，

∴PF=PE=2，PB=PA=4，

∴AE=BF=$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

∴b=AC=2AE=4$\sqrt{5}$，a=BC=4$\sqrt{5}$.

如图2中，连接EF，

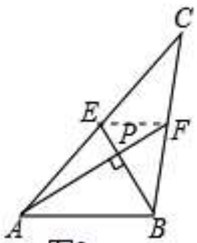


图2

，∵CE=AE，CF=BF，

∴EF∥AB，EF=$\frac{1}{2}$AB=1，

∵∠PAB=30°，

∴PB=1，PA=$\sqrt{3}$，

在RT△EFP中，∵∠EFP=∠PAB=30°，

∴PE=$\frac{1}{2}$，PF=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴AE=$\sqrt{PA^2+PE^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，BF=$\sqrt{PB^2+PF^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

∴a=BC=2BF=$\sqrt{7}$，b=AC=2AE=$\sqrt{13}$，

(2)结论 $a^2+b^2=5c^2$.

证明：如图3中，连接EF.

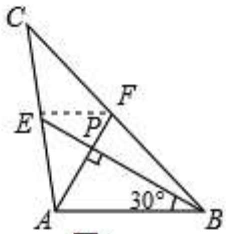


图3

∵AF、BE 是中线，

∴EF∥AB，EF=$\frac{1}{2}$AB，

∴△FPE∽△APB，

∴$\frac{MP}{AP}=\frac{PN}{PB}=\frac{1}{2}$，

设 FP=x，EP=y，则 AP=2x，BP=2y，

∴$a^2=BC^2=4BF^2=4(FP^2+BP^2)=4x^2+16y^2$，

$b^2=AC^2=4AE^2=4(PE^2+AP^2)=4y^2+16x^2$，

$c^2=AB^2=AP^2+BP^2=4x^2+4y^2$，

∴$a^2+b^2=20x^2+20y^2=5(4x^2+4y^2)=5c^2$.

(3)解：如图 4 中，在△AGE 和△FGB 中，

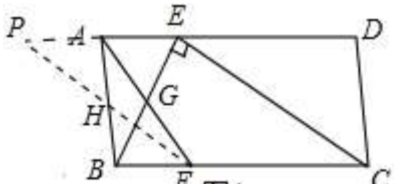


图4

$\begin{cases}\angle AGE=\angle FGB\\ \angle AEG=\angle FBG\\ AE=BF\end{cases}$，

∴△AGE≌△FGB，

∴BG=FG，取 AB 中点 H，连接 FH 并且延长交 DA 的延长线于 P 点，

同理可证△APH≌△BFH，

∴AP=BF，PE=CF=2BF，

即 PE∥CF，PE=CF，

∴四边形 CEPF 是平行四边形，

∴FP∥CE，

∵BE⊥CE，

∴FP⊥BE，即 FH⊥BG，

∴△ABF 是中垂三角形，

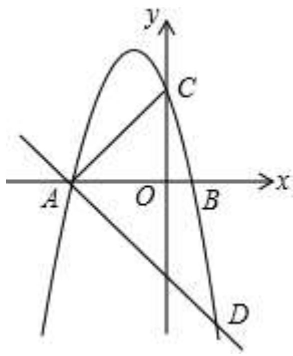
由(2)可知 $AB^2+AF^2=5BF^2$，

∵AB=3，BF=$\frac{1}{3}$AD=$\sqrt{5}$，

∴$9+AF^2=5\times(\sqrt{5})^2$，

∴AF=4.

25. 已知抛物线 $y=a(x+3)(x-1)(a\neq 0)$，与 x 轴从左至右依次相交于 A、B 两点，与 y 轴相交于点 C，经过点 A 的直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 与抛物线的另一个交点为 D.



(1)若点 D 的横坐标为 2，求抛物线的函数解析式；
(2)若在第三象限内的抛物线上有点 P，使得以 A、B、P 为顶点的三角形与△ABC 相似，求点 P 的坐标；
(3)在(1)的条件下，设点 E 是线段 AD 上的一点(不含端点)，连接 BE.一动点 Q 从点 B 出发，沿线段 BE 以每秒 1 个单位的速度运动到点 E，再沿线段 ED 以每秒 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 个单位的速度运动到点 D 后停止，问当点 E 的坐标是多少时，点 Q 在整个运动过程中所用时间最少？
解析：(1)根据二次函数的交点式确定点 A、B 的坐标，求出直线的解析式，求出点 D 的坐标，求出抛物线的解析式；
(2)作 PH⊥x 轴于 H，设点 P 的坐标为(m，n)，分△BPA∽△ABC 和△PBA∽△ABC，根据相似三角形的性质计算即可；
(3)作 DM∥x 轴交抛物线于 M，作 DN⊥x 轴于 N，作 EF⊥DM 于 F，根据正切的定义求出 Q 的运动时间 t=BE+EF 时，t 最小即可.
答案：(1)∵$y=a(x+3)(x-1)$，
∴点 A 的坐标为(-3，0)、点 B 两的坐标为(1，0)，

∵直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 经过点 A，

∴b=-3 3 ，

∴$y=-\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$，

当 x=2 时，$y=-5\sqrt{3}$，

则点 D 的坐标为$(2，-5\sqrt{3})$，

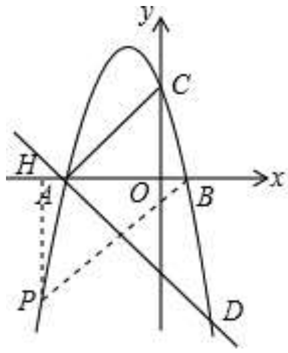
∵点 D 在抛物线上，

∴$a(2+3)(2-1)=-5\sqrt{3}$，

解得，$a=-\sqrt{3}$，

则抛物线的解析式为 $y=-\sqrt{3}(x+3)(x-1)=-\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$；

(2)作 PH⊥x 轴于 H，



设点 P 的坐标为(m，n)，

当△BPA∽△ABC 时，∠BAC=∠PBA，

∴tan∠BAC=tan∠PBA，即 $\frac{OC}{OA}=\frac{PH}{HB}$，

∴$\frac{-3a}{3}=\frac{-n}{-m+1}$，即 n=-a(m-1)，

∴$\begin{cases}n=-a\left(m-1\right)\\n=\left(m+3\right)\left(m-1\right)\end{cases}$，

解得，m_1=-4，m_2=1(不合题意，舍去)，

当 m=-4 时，n=5a，

∵△BPA∽△ABC，

∴$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{PB}$，即 AB^2=AC•PB，

∴$4^2=\sqrt{9a^2+9}\cdot\sqrt{25a^2+25}$，

解得，a_1=$\frac{\sqrt{15}}{15}$(不合题意，舍去)，a_2=-$\frac{\sqrt{15}}{15}$，

则 n=5a=-$\frac{\sqrt{15}}{3}$，

∴点 P 的坐标为(-4，-$\frac{\sqrt{15}}{3}$)；

当△PBA∽△ABC 时，∠CBA=∠PBA，

∴tan∠CBA=tan∠PBA，即 $\frac{OC}{OB}=\frac{PH}{HB}$，

∴$\frac{-3a}{1}=\frac{-n}{-m+1}$，即 n=-3a(m-1)，

∴$\begin{cases}n=-3a\left(m-1\right)\\n=a\left(m+3\right)\left(m-1\right)\end{cases}$，

解得，m_1=-6，m_2=1(不合题意，舍去)，

当 m=-6 时，n=21a，

∵△PBA∽△ABC，

∴ $\frac{BC}{BA}=\frac{AB}{PB}$，即 AB^2=BC•PB，

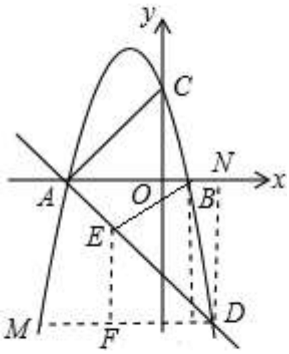
∴ $4^2=\sqrt{1+9a^2}\cdot\sqrt{7^2+\left(-21a\right)^2}$，

解得，$a_1=\frac{\sqrt{7}}{7}$(不合题意，舍去)，$a_2=-\frac{\sqrt{7}}{7}$，

则点 P 的坐标为(-6，$-\frac{\sqrt{7}}{7}$)，

综上所述，符合条件的点 P 的坐标为(-4，$-\frac{\sqrt{15}}{3}$)和(-6，$-\frac{\sqrt{7}}{7}$)；

(3)作 DM∥x 轴交抛物线于 M，作 DN⊥x 轴于 N，作 EF⊥DM 于 F，



则 tan∠DAN=$\frac{DN}{AN}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}$，

∴∠DAN=60°，

∴∠EDF=60°，

∴DE=$\frac{EF}{sin\angle EDF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}EF$，

∴Q 的运动时间 t=$\frac{BE}{1}+\frac{DE}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$=BE+EF，

∴当 BE 和 EF 共线时，t 最小，

则 BE⊥DM，y=$-4\sqrt{3}$.