

2016年普通高等学校招生全国统一考试(新课标II)数学文

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出四个选项，只有一个选项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{x|x^2<9\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{1, 2\}$

解析: \because 集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$,

$\therefore A\cap B=\{1, 2\}$.

答案: D.

2. 设复数 z 满足 $z+i=3-i$, 则 $\bar{z}=(\quad)$

A. $-1+2i$

B. $1-2i$

C. $3+2i$

D. $3-2i$

解析: 根据已知求出复数 z , 结合共轭复数的定义, 可得答案.

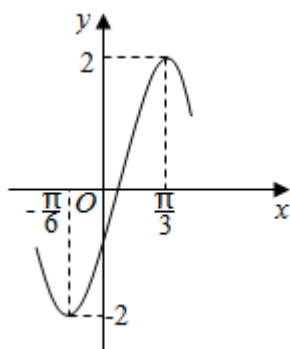
\because 复数 z 满足 $z+i=3-i$,

$\therefore z=3-2i$,

$\therefore \bar{z}=3+2i$,

答案: C

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象如图所示, 则 (\quad)



A. $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

B. $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

C. $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

D. $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

解析：由图可得：函数的最大值为2，最小值为-2，故 $A=2$ ， $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ，故 $T=\pi$ ， $\omega=2$ ，

故 $y=2\sin(2x+\phi)$ ，

将 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 代入可得： $2\sin(\frac{2\pi}{3}+\phi)=2$ ，

则 $\phi = -\frac{\pi}{6}$ 符合要求，

故 $y=2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 。

答案：A.

4. 体积为8的正方体的顶点都在同一球面上，则该球面的表面积为()

A. 12π

B. $\frac{32}{3}\pi$

C. 8π

D. 4π

解析：正方体体积为8，可知其边长为2，

正方体的体对角线为 $\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$ ，

即为球的直径，所以半径为 $\sqrt{3}$ ，

所以球的表面积为 $4\pi(\sqrt{3})^2=12\pi$ 。

答案：A.

5. 设F为抛物线C: $y^2=4x$ 的焦点，曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$)与C交于点P, $PF\perp x$ 轴，则 $k=()$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

解析：根据已知，结合抛物线的性质，求出 P 点坐标，再由反比例函数的性质，可得 k 值。
 抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点 F 为 (1, 0)，

曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 与 C 交于点 P 在第一象限，

由 $PF \perp x$ 轴得：P 点横坐标为 1，

代入 C 得：P 点纵坐标为 2，

故 $k=2$ 。

答案：D

6. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=(\quad)$

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

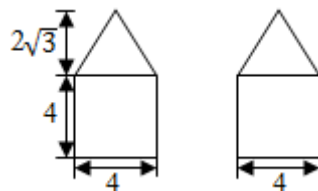
解析：圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心坐标为：(1, 4)，

故圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离 $d = \frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$ ，

解得： $a = -\frac{4}{3}$ 。

答案：A.

7. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为()



A. 20π

B. 24π

C. 28π

D. 32π

解析：由三视图知，空间几何体是一个组合体，

上面是一个圆锥，圆锥的底面直径是 4，圆锥的高是 $2\sqrt{3}$ ，

∴在轴截面中圆锥的母线长是 $\sqrt{12+4}=4$ ，

∴圆锥的侧面积是 $\pi \times 2 \times 4 = 8\pi$ ，

下面是一个圆柱，圆柱的底面直径是 4，圆柱的高是 4，

∴圆柱表现出来的表面积是 $\pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 4 = 20\pi$

∴空间组合体的表面积是 28π 。

答案：C.

8. 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为()

A. $\frac{7}{10}$

B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{3}{10}$

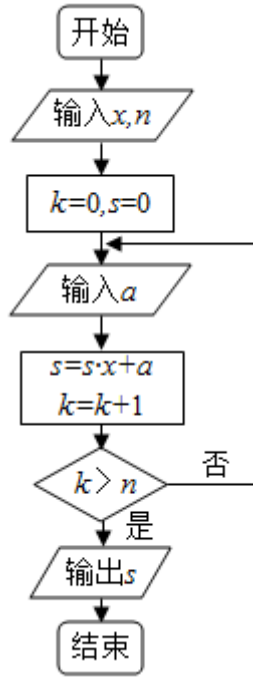
解析：∵红灯持续时间为 40 秒，至少需要等待 15 秒才出现绿灯，

∴一名行人前 25 秒来到该路口遇到红灯，

∴至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为 $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ 。

答案：B.

9. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图，若输入的 $x=2$ ， $n=2$ ，依次输入的 a 为 2，2，5，则输出的 $s=()$



- A. 7
- B. 12
- C. 17
- D. 34

解析：根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案.

∵输入的 $x=2$, $n=2$,

当输入的 a 为 2 时, $S=2$, $k=1$, 不满足退出循环的条件;

当再次输入的 a 为 2 时, $S=6$, $k=2$, 不满足退出循环的条件;

当输入的 a 为 5 时, $S=17$, $k=3$, 满足退出循环的条件;

故输出的 S 值为 17.

答案：C

10. 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是()

- A. $y=x$
- B. $y=\lg x$
- C. $y=2^x$

D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

解析：函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$,

函数 $y=x$ 的定义域和值域均为 \mathbb{R} , 不满足要求;

函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 \mathbb{R} , 不满足要求;

函数 $y=2^x$ 的定义域为 \mathbb{R} , 值域为 $\mathbb{R}(0, +\infty)$, 不满足要求;

函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$, 满足要求.

答案：D

11. 函数 $f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的最大值为 ()

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

解析：运用二倍角的余弦公式和诱导公式，可得 $y = 1 - 2\sin 2x + 6\sin x$ ，令 $t = \sin x (-1 \leq t \leq 1)$ ，可得函数 $y = -2t^2 + 6t + 1$ ，配方，结合二次函数的最值的求法，以及正弦函数的值域即可得到所求最大值。

$$\text{函数 } f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - 2\sin^2 x + 6\sin x,$$

$$\text{令 } t = \sin x (-1 \leq t \leq 1),$$

$$\text{可得函数 } y = -2t^2 + 6t + 1 = -2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2},$$

由 $\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$ ，可得函数在 $[-1, 1]$ 递增，

即有 $t = 1$ 即 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 时，函数取得最大值 5。

答案：B.

12. 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(x) = f(2-x)$ ，若函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点为

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ ，则 $\sum_{i=1}^m x_i =$ ()

- A. 0
- B. m
- C. $2m$
- D. $4m$

解析： \because 函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(x) = f(2-x)$ ，

故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，

函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 的图象也关于直线 $x = 1$ 对称，

故函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点也关于直线 $x = 1$ 对称，

$$\text{故 } \sum_{i=1}^m x_i = \frac{m}{2} \times 2 = m.$$

答案：B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 已知向量 $\vec{a}=(m, 4)$, $\vec{b}=(3, -2)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $m=$ _____.

解析：直接利用向量共线的充要条件列出方程求解即可.

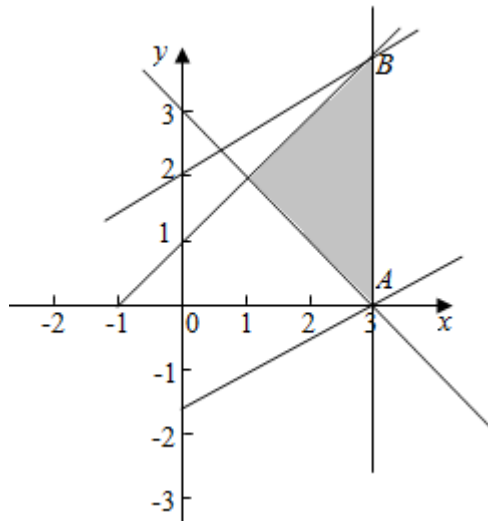
向量 $\vec{a}=(m, 4)$, $\vec{b}=(3, -2)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

可得 $12=-2m$, 解得 $m=-6$.

答案：-6.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最小值为_____.

解析：由约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图,



联立 $\begin{cases} x=3 \\ x-y+1=0 \end{cases}$, 解得 $B(3, 4)$.

化目标函数 $z=x-2y$ 为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$,

由图可知, 当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 过 $B(3, 4)$ 时, 直线在 y 轴上的截距最大, z 有最小值为:

$3-2 \times 4=-5$.

答案：-5.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b =$ _____.

解析: 运用同角的平方关系可得 $\sin A, \sin C$, 再由诱导公式和两角和的正弦公式, 可得 $\sin B$,

运用正弦定理可得 $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, 代入计算即可得到所求值.

由 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{5}{13}$, 可得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13},$$

$$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65},$$

$$\text{由正弦定理可得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{1 \times \frac{63}{65}}{\frac{3}{5}} = \frac{21}{13}.$$

答案: $\frac{21}{13}$.

16. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是_____.

解析: 根据丙的说法知, 丙的卡片上写着 1 和 2, 或 1 和 3;

(1) 若丙的卡片上写着 1 和 2, 根据乙的说法知, 乙的卡片上写着 2 和 3;

\therefore 根据甲的说法知, 甲的卡片上写着 1 和 3;

(2) 若丙的卡片上写着 1 和 3, 根据乙的说法知, 乙的卡片上写着 2 和 3;

又甲说, “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”;

\therefore 甲的卡片上写的数字不是 1 和 2, 这与已知矛盾;

\therefore 甲的卡片上的数字是 1 和 3.

答案: 1 和 3.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 = 4$, $a_5 + a_7 = 6$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据已知构造关于首项和公差方程组, 解得答案.

答案: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_3+a_4=4, a_5+a_7=6.$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1+5d=4 \\ 2a_1+10d=6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a_1=1 \\ d=25 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{5}n + \frac{3}{5}.$$

(II) 设 $b_n=[a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[2.6]=2$.

解析: (II) 根据 $b_n=[a_n]$, 列出数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项, 相加可得答案.

答案: (II) $\because b_n=[a_n]$,

$$\therefore b_1=b_2=b_3=1,$$

$$b_4=b_5=2,$$

$$b_6=b_7=b_8=3,$$

$$b_9=b_{10}=4.$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=3 \times 1+2 \times 2+3 \times 3+2 \times 4=24$.

18. 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
频数	60	50	30	30	20	10

(I) 记 A 为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 求 $P(A)$ 的估计值.

解析: (I) 求出 A 为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费” 的人数. 总事件人数, 即可求 $P(A)$ 的估计值.

答案: (I) 记 A 为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 事件 A 的人数为: $60+50=110$, 该险种的 200 名续保,

$$P(A) \text{ 的估计值为: } \frac{110}{200} = \frac{11}{20}.$$

(II) 记 B 为事件：“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”. 求 P(B) 的估计值.

解析：(II) 求出 B 为事件：“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%” 的人数. 然后求 P(B) 的估计值.

答案：(II) 记 B 为事件：“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”.

事件 B 的人数为：30+30=60，P(B) 的估计值为： $\frac{60}{200} = \frac{3}{10}$.

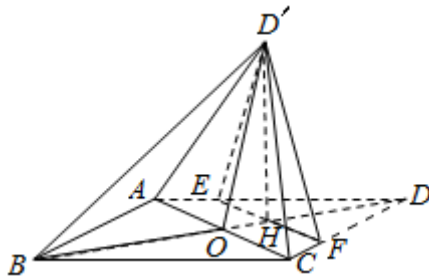
(III) 求续保人本年度的平均保费估计值.

解析：(III) 利用人数与保费乘积的和除以总续保人数，可得本年度的平均保费估计值.

答案：(III) 续保人本年度的平均保费估计值为

$$\bar{x} = \frac{0.85a \times 60 + a \times 50 + 1.25a \times 30 + 1.5a \times 30 + 1.75a \times 20 + 2a \times 10}{200} = 1.1925a.$$

19. 如图，菱形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 E、F 分别在 AD，CD 上，AE=CF，EF 交 BD 于点 H，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置.



(I) 证明：AC \perp HD' .

解析：(I) 根据直线平行的性质以及线面垂直的判定定理先证明 EF \perp 平面 DD' H 即可.

答案：(I) \because 菱形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 E、F 分别在 AD，CD 上，AE=CF，

\therefore EF \parallel AC，且 EF \perp BD，

又 D' H \perp EF，

D' H \cap DH=H，

\therefore EF \perp 平面 DD' H，

\because HD' \subset 平面 D' HD，

\therefore EF \perp HD' ，

\because EF \parallel AC，

\therefore AC \perp HD' .

(II) 若 AB=5，AC=6，AE= $\frac{5}{4}$ ，OD' = $2\sqrt{2}$ ，求五棱锥 D' -ABCFE 体积.

解析：(II) 根据条件求出底面五边形的面积，结合平行线段的性质证明 OD' 是五棱锥 D'

-ABCFE 的高，即可得到结论.

答案：(II)若 $AB=5$, $AC=6$, 则 $AO=3$, $BO=OD=4$,

$$\because AE = \frac{5}{4}, AD=AB=5,$$

$$\therefore DE = 5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4},$$

$\because EF \parallel AC$,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EH}{AO} = \frac{DH}{OD} = \frac{\frac{15}{4}}{5} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EH = \frac{9}{4}, EF = 2EH = \frac{9}{2}, DH = 3, OH = 4 - 3 = 1,$$

$$\because HD' = DH = 3, OD' = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{满足 } HD'^2 = OD'^2 + OH^2,$$

则 $\triangle OHD'$ 为直角三角形，且 $OD' \perp OH$,

即 $OD' \perp$ 底面 ABCD,

即 OD' 是五棱锥 $D' - ABCFE$ 的高.

底 面 五 边 形 的 面 积

$$S = \frac{1}{2} \times AC \square OB + \frac{(EF + AC) \square OH}{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + \frac{\left(\frac{9}{2} + 6\right) \times 1}{2} = 12 + \frac{21}{4} = \frac{69}{4},$$

$$\text{则五棱锥 } D' - ABCFE \text{ 体积 } V = \frac{1}{3} S \square OD' = \frac{1}{3} \times \frac{69}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{23\sqrt{2}}{2}.$$

20. 已知函数 $f(x) = (x+1) \ln x - a(x-1)$.

(I) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

解析：(I) 当 $a=4$ 时，求出曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率，即可求出切线方程.

答案：(I) 当 $a=4$ 时， $f(x) = (x+1) \ln x - 4(x-1)$.

$f(1)=0$ ，即点为 $(1, 0)$,

$$\text{函数的导数 } f'(x) = \ln x + (x+1) \square \frac{1}{x} - 4,$$

$$\text{则 } f'(1) = \ln 1 + 2 - 4 = 2 - 4 = -2,$$

即函数的切线斜率 $k=f'(1)=-2$,

则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y=-2(x-1)=-2x+2$.

(II) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ ，求 a 的取值范围.

解析：(II)先求出 $f'(x) > f'(1) = 2 - a$ ，再结合条件，分类讨论，即可求 a 的取值范围.

答案：(II) $\because f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$,

$$\therefore f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x - a,$$

$$\therefore f''(x) = \frac{x-1}{x^2},$$

$\because x > 1, \therefore f''(x) > 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f'(x) > f'(1) = 2 - a$.

① $a \leq 2, f'(x) > f'(1) \geq 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x) > f(1) = 0$, 满足题意;

② $a > 2$, 存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, $f'(x_0) = 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(1) = 0$, 可得存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, $f(x_0) < 0$, 不合题意.

综上所述, $a \leq 2$.

21. 已知 A 是椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点, 斜率为 $k (k > 0)$ 的直线交 E 与 A, M 两点, 点

N 在 E 上, $MA \perp NA$.

(I) 当 $|AM| = |AN|$ 时, 求 $\triangle AMN$ 的面积.

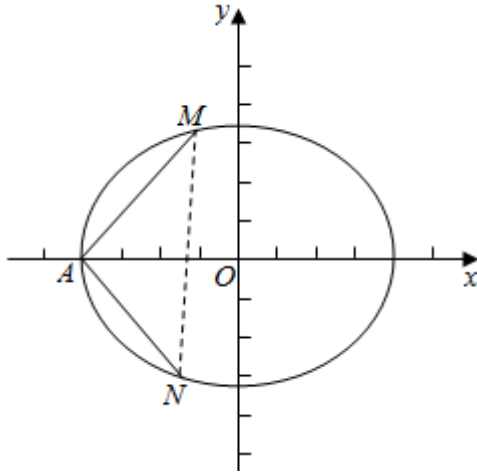
解析：(I) 依题意知椭圆 E 的左顶点 $A(-2, 0)$, 由 $|AM| = |AN|$, 且 $MA \perp NA$, 可知 $\triangle AMN$ 为等

腰直角三角形, 设 $M(a-2, a)$, 利用点 M 在 E 上, 可得 $3(a-2)^2 + 4a^2 = 12$, 解得: $a = \frac{12}{7}$, 从

而可求 $\triangle AMN$ 的面积.

答案：(I) 由椭圆 E 的方程: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 知, 其左顶点 $A(-2, 0)$,

$\because |AM| = |AN|$, 且 $MA \perp NA$, $\therefore \triangle AMN$ 为等腰直角三角形,



$\therefore MN \perp x$ 轴, 设 M 的纵坐标为 a , 则 $M(a-2, a)$,

\because 点 M 在 E 上, $\therefore 3(a-2)^2 + 4a^2 = 12$, 整理得: $7a^2 - 12a = 0$, $\therefore a = \frac{12}{7}$ 或 $a = 0$ (舍),

$$\therefore S_{\square AMN} = \frac{1}{2} a \times 2a = a^2 = \frac{144}{49} .$$

(II) 当 $2|AM| = |AN|$ 时, 证明: $\sqrt{3} < k < 2$.

解析: (II) 设直线 l_{AM} 的方程为: $y = k(x+2)$, 直线 l_{AN} 的方程为: $y = -\frac{1}{k}(x+2)$, 联立

$$\begin{cases} y = k(x+2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \text{ 利用韦达定理及弦长公式可分别求}$$

$$\text{得 } |AM| = 1 + k^2 |x_M - (-2)| = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}, \quad |AN| = \frac{12\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}}{3+4\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{12k\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4}, \text{ 结合}$$

$2|AM| = |AN|$, 可得 $\frac{2}{3+4k^2} = \frac{k}{3k^2+4}$, 整理后, 构造函数 $f(k) = 4k^3 - 6k^2 + 3k - 8$, 利用导数法

可判断其单调性, 再结合零点存在定理即可证得结论成立.

答案: (II) 设直线 l_{AM} 的方程为: $y = k(x+2)$, 直线 l_{AN} 的方程为: $y = -\frac{1}{k}(x+2)$, 由

$$\begin{cases} y = k(x+2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得: } (3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \therefore x_M - 2 = -\frac{16k^2}{3+4k^2}, \therefore$$

$$x_M = 2 - \frac{16k^2}{3+4k^2} = \frac{6-8k^2}{3+4k^2},$$

$$\therefore |AM| = \sqrt{1+k^2} |x_M - (-2)| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{6-8k^2+6+8k^2}{3+4k^2} = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}.$$

$\because k > 0,$

$$\therefore |AN| = \frac{12\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}}{3+4\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{12k\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4},$$

$$\text{又} \because 2|AM| = |AN|, \therefore \frac{2}{3+4k^2} = \frac{k}{3k^2+4},$$

整理得: $4k^3 - 6k^2 + 3k - 8 = 0,$

设 $f(k) = 4k^3 - 6k^2 + 3k - 8,$

则 $f'(k) = 12k^2 - 12k + 3 = 3(2k-1)^2 \geq 0,$

$\therefore f(k) = 4k^3 - 6k^2 + 3k - 8$ 为 $(0, +\infty)$ 的增函数,

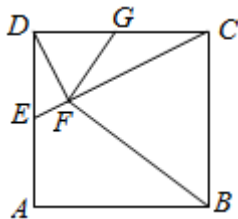
又 $f(\sqrt{3}) = 4 \times 3\sqrt{3} - 6 \times 3 + 3\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 = \sqrt{675} - \sqrt{676} < 0,$ $f(2) = 4 \times 8 - 6 \times 4 + 3$

$\times 2 - 8 = 6 > 0,$

$\therefore \sqrt{3} < k < 2.$

请考生在第 22~24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选修 4-1: 几何证明选讲]

22. 如图, 在正方形 ABCD 中, E, G 分别在边 DA, DC 上(不与端点重合), 且 DE=DG, 过 D 点作 $DF \perp CE$, 垂足为 F.



(I) 证明: B, C, G, F 四点共圆.

解析: (I) 证明 B, C, G, F 四点共圆可证明四边形 BCGF 对角互补, 由已知条件可知 $\angle BCD = 90^\circ$, 因此问题可转化为证明 $\angle GFB = 90^\circ$.

答案: (I) $\because DF \perp CE,$

$\therefore \text{Rt} \triangle DFC \sim \text{Rt} \triangle EDC,$

$$\therefore \frac{DF}{ED} = \frac{CF}{CD},$$

∵ DE=DG, CD=BC,

$$\therefore \frac{DF}{DG} = \frac{CF}{BC},$$

又∵ ∠GDF=∠DEF=∠BCF,

∴ △GDF ∽ △BCF,

∴ ∠CFB=∠DFG,

∴ ∠GFB=∠GFC+∠CFB=∠GFC+∠DFG=∠DFC=90° ,

∴ ∠GFB+∠GCB=180° ,

∴ B, C, G, F 四点共圆.

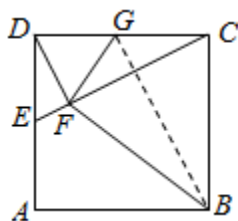
(II) 若 AB=1, E 为 DA 的中点, 求四边形 BCGF 的面积.

解析: (II) 在 Rt△DFC 中, $GF = \frac{1}{2}CD = GC$, 因此可得 △GFB ≌ △GCB, 则 $S_{\text{四边形BCGF}} = 2S_{\triangle BCG}$, 据此

解答.

答案: (II) ∵ E 为 AD 中点, AB=1, ∴ DG=CG=DE= $\frac{1}{2}$,

∴ 在 Rt△DFC 中, $GF = \frac{1}{2}CD = GC$, 连接 GB, Rt△BCG ≌ Rt△BFG,



$$\therefore S_{\text{四边形BCGF}} = 2S_{\triangle BCG} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

[选项 4-4: 坐标系与参数方程]

23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2 + y^2 = 25$.

(I) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 的极坐标方程.

解析: (I) 把圆 C 的标准方程化为一般方程, 由此利用 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$, 能求出圆 C 的极坐标方程.

答案: (I) ∵ 圆 C 的方程为 $(x+6)^2 + y^2 = 25$,

$$\therefore x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0,$$

$$\therefore \rho^2 = x^2 + y^2, \quad x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha,$$

$$\therefore \text{C 的极坐标方程为 } \rho^2 + 12\rho \cos \alpha + 11 = 0.$$

(II) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = \sqrt{10}$, 求

l 的斜率.

解析: (II) 由直线 l 的参数方程求出直线 l 的一般方程, 再求出圆心到直线距离, 由此能求出直线 l 的斜率.

答案: (II) \because 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数),

\therefore 直线 l 的一般方程 $y = \tan \alpha \cdot x$,

$\because l$ 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = \sqrt{10}$, 圆 C 的圆心 $C(-6, 0)$, 半径 $r=5$,

\therefore 圆心 $C(-6, 0)$ 到直线距离 $d = \frac{|-6 \tan \alpha|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{25 - \frac{10}{4}}$,

解得 $\tan^2 \alpha = \frac{5}{3}$, $\therefore \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$.

$\therefore l$ 的斜率 $k = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$.

[选修 4-5: 不等式选讲]

24. 已知函数 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{2} \right|$, M 为不等式 $f(x) < 2$ 的解集.

(I) 求 M .

解析: (I) 分当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, 当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 当 $x > \frac{1}{2}$ 时三种情况, 分别求解不等式,

综合可得答案.

答案: (I) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) < 2$ 可化为: $\frac{1}{2} - x - x - \frac{1}{2} < 2$,

解得: $x > -1$,

$\therefore -1 < x < -\frac{1}{2}$,

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) < 2$ 可化为: $\frac{1}{2} - x + x + \frac{1}{2} = 1 < 2$,

此时不等式恒成立,

$$\therefore \frac{1}{2} - x + x + \frac{1}{2} = 1 < 2,$$

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) < 2$ 可化为: $-\frac{1}{2} + x + x + \frac{1}{2} < 2,$

解得: $x < 1,$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 1,$$

综上所述可得: $M = (-1, 1).$

(II) 证明: 当 $a, b \in M$ 时, $|a+b| < |1+ab|.$

解析: (II) 当 $a, b \in M$ 时, $(a^2-1)(b^2-1) > 0,$ 即 $a^2b^2+1 > a^2+b^2,$ 配方后, 可证得结论.

答案: (II) 当 $a, b \in M$ 时,

$$(a^2-1)(b^2-1) > 0,$$

$$\text{即 } a^2b^2+1 > a^2+b^2,$$

$$\text{即 } a^2b^2+1+2ab > a^2+b^2+2ab,$$

$$\text{即 } (ab+1)^2 > (a+b)^2,$$

$$\text{即 } |a+b| < |1+ab|.$$