2016年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）数学

一、填空题(共 14 小题，每小题 5 分，满分 70 分)

1. 已知集合 A={-1，2，3，6}，B={x|-2＜x＜3}，则 A∩B=____.
解析：∵集合 A={-1，2，3，6}，B={x|-2＜x＜3}，
∴A∩B={-1，2}.
答案：{-1，2}

2. 复数 z=(1+2i)(3-i)，其中 i 为虚数单位，则 z 的实部是____.
解析：z=(1+2i)(3-i)=5+5i，
则 z 的实部是 5.
答案：5.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$的焦距是____.

解析：双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$中，a=$\sqrt{7}$，b=$\sqrt{3}$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，

∴双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$的焦距是$2\sqrt{10}$.

答案：$2\sqrt{10}$.

4. 已知一组数据 4.7，4.8，5.1，5.4，5.5，则该组数据的方差是____.
解析：∵数据 4.7，4.8，5.1，5.4，5.5 的平均数为：

$\bar{x}=\frac{1}{5}(4.7+4.8+5.1+5.4+5.5)=5.1$，

∴该组数据的方差：

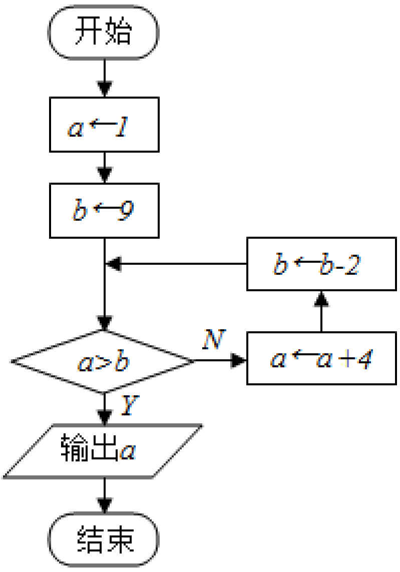
$S^2=\frac{1}{5}[(4.7-5.1)^2+(4.8-5.1)^2+(5.1-5.1)^2+(5.4-5.1)^2+(5.5-5.1)^2]=0.1$.

答案：0.1.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是____.

解析：由 $3-2x-x^2\geqslant 0$ 得：$x^2+2x-3\leqslant 0$，
解得：x∈[-3，1]，
答案：[-3，1]

6. 如图是一个算法的流程图，则输出的 a 的值是____.



解析：当 a=1，b=9 时，不满足 a＞b，故 a=5，b=7，
当 a=5，b=7 时，不满足 a＞b，故 a=9，b=5
当 a=9，b=5 时，满足 a＞b，
故输出的 a 值为 9.
答案：9

7. 将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有 1，2，3，4，5，6 个点的正方体玩具)先后抛掷 2 次，则出现向上的点数之和小于 10 的概率是____.
解析：将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有 1，2，3，4，5，6 个点的正方体玩具)先后抛掷 2 次，
基本事件总数为 n=6×6=36，
出现向上的点数之和小于 10 的对立事件是出现向上的点数之和不小于 10，
出现向上的点数之和不小于 10 包含的基本事件有：
(4，6)，(6，4)，(5，5)，(5，6)，(6，5)，(6，6)，共 6 个，
∴出现向上的点数之和小于 10 的概率：

$$p=1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}.$$

答案：$\frac{5}{6}$.

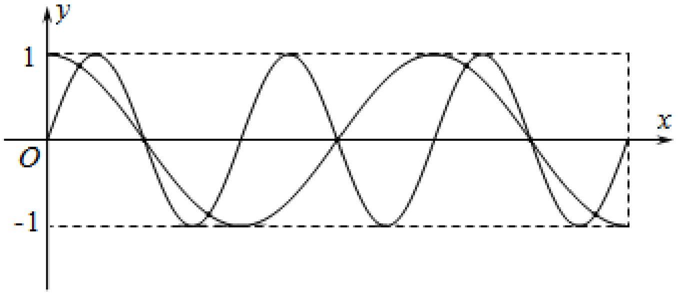
8. 已知$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前 n 项和，若 $a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，则 a_9 的值是____.
解析：∵$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前 n 项和，$a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，

$$\therefore \begin{cases} a_1+(a_1+d)^2=-3 \\ 5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=10 \end{cases},$$

解得 $a_1=-4$，d=3，
∴$a_9=-4+8\times 3=20$．
答案：20．

9. 定义在区间[0，3π]上的函数 y=sin2x 的图象与 y=cosx 的图象的交点个数是____.

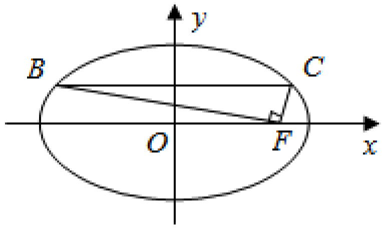
解析：画出函数 y=sin2x 与 y=cosx 在区间[0，3π]上的图象如下：



由图可知，共 7 个交点.

答案：7.

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B，C 两点，且∠BFC=90°，则该椭圆的离心率是____.



解析：设右焦点 F(c，0)，

将 $y=\frac{b}{2}$ 代入椭圆方程可得 $x=\pm a\sqrt{1-\frac{b^2}{4b^2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

可得 $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{b}{2})$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{b}{2})$，

由∠BFC=90°，可得 $k_{BF}\cdot k_{CF}=-1$，

即有 $\frac{\frac{b}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a-c}\cdot\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a-c}=-1$，

化简为 $b^2=3a^2-4c^2$，

由 $b^2=a^2-c^2$，即有 $3c^2=2a^2$，

由 $e=\frac{c}{a}$，可得 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，

可得 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

答案：$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. 设 f(x)是定义在 R 上且周期为 2 的函数，在区间[-1，1)上，$f(x)=\begin{cases}x+a, & -1\le x<0\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, & 0\le x<1\end{cases}$，

其中 a∈R，若 $f(-\frac{5}{2})=f(\frac{9}{2})$，则 f(5a)的值是____.

解析：f(x)是定义在 R 上且周期为 2 的函数，在区间[-1，1)上，$f(x)=\begin{cases}x+a, & -1\le x<0\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, & 0\le x<1\end{cases}$，

$\therefore f(-\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+a$，

$f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=\left|\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{10}$，

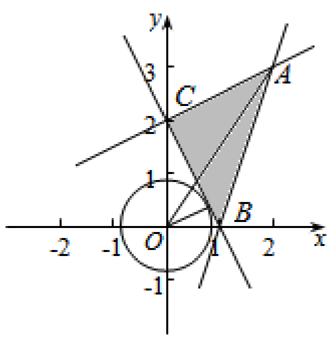
$\therefore a=\frac{3}{5}$，

$\therefore f(5a)=f(3)=f(-1)=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$，

答案：$-\frac{2}{5}$

12. 已知实数 x，y 满足$\begin{cases}x-2y+4\ge 0\\ 2x+y-2\ge 0\\ 3x-y-3\le 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的取值范围是____.

解析：作出不等式组对应的平面区域，



设 $z=x^2+y^2$，则 z 的几何意义是区域内的点到原点距离的平方，
由图象知 A 到原点的距离最大，
点 O 到直线 BC：2x+y-2=0 的距离最小，

由$\begin{cases}x-2y+4=0\\ 3x-y-3=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$，即 A(2，3)，此时 $z=2^2+3^2=4+9=13$，

点 O 到直线 BC：2x+y-2=0 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

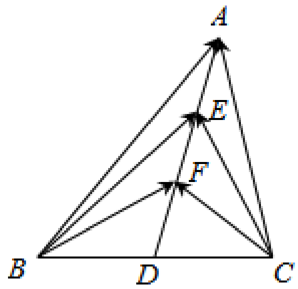
则 $z=d^2=(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=\frac{4}{5}$，

故 z 的取值范围是$[\frac{4}{5},13]$.

答案：$[\frac{4}{5},13]$.

13. 如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E，F 是 AD 上的两个三等分点，

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4,\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是____.



解析：∵D 是 BC 的中点，E，F 是 AD 上的两个三等分点，

$\therefore\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$，

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF}$，

$\therefore\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=-1$，

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=9\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=4$，

$\therefore\overrightarrow{DF}^2=\frac{5}{8},\overrightarrow{BD}^2=\frac{13}{8}$，

又∵ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DF}$，

$\therefore\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=\frac{7}{8}$，

答案：$\frac{7}{8}$

14. 在锐角三角形 ABC 中，若 sinA=2sinBsinC，则 tanAtanBtanC 的最小值是____.
解析：由 sinA=sin(π-A)=sin(B+C)=sinBcosC+cosBsinC，sinA=2sinBsinC，
可得 sinBcosC+cosBsinC=2sinBsinC，①
由三角形 ABC 为锐角三角形，则 cosB＞0，cosC＞0，
在①式两侧同时除以 cosBcosC 可得 tanB+tanC=2tanBtanC，

又 $tanA=-tan（\pi-A）=-tan（B+C）=-\frac{tanB+tanC}{1-tanBtanC}$ ②，

则 $tanAtanBtanC=-\frac{tanB+tanC}{1-tanBtanC}\cdot tanBtanC$，

由 tanB+tanC=2tanBtanC 可得 $tanAtanBtanC=-\frac{2(tanBtanC)^2}{1-tanBtanC}$，

令 tanBtanC=t，由 A，B，C 为锐角可得 tanA＞0，tanB＞0，tanC＞0，

由②式得 1-tanBtanC＜0，解得 t＞1，

$tanAtanBtanC=-\frac{2t^2}{1-t}=-\frac{2}{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}}$，

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$，由 t＞1 得，$-\frac{1}{4}\le\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}<0$，

因此 tanAtanBtanC 的最小值为 8，

当且仅当 t=2 时取到等号，此时 tanB+tanC=4，tanBtanC=2，

解得 $tanB=2+\sqrt{2}$，$tanC=2-\sqrt{2}$，$tanA=4$，(或 tanB，tanC 互换)，此时 A，B，C 均为锐角.

答案：8

二、解答题(共 6 小题，满分 90 分)

15. 在△ABC 中，AC=6，$cosB=\frac{4}{5}$，$C=\frac{\pi}{4}$.

(1)求 AB 的长；

(2)求 $cos(A-\frac{\pi}{6})$ 的值.

解析：(1)利用正弦定理，即可求 AB 的长；

(2)求出 cosA、sinA，利用两角差的余弦公式求 $cos(A-\frac{\pi}{6})$ 的值.

答案：(1)∵△ABC 中，$cosB=\frac{4}{5}$，

∴ $sinB=\frac{3}{5}$，

∵ $\frac{AB}{sinC}=\frac{AC}{sinB}$，

∴ $AB=\frac{6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{5}}=5\sqrt{2}$；

(2) $cosA=-cos(C+B)=sinBsinC-cosBcosC=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

∵A 为三角形的内角，

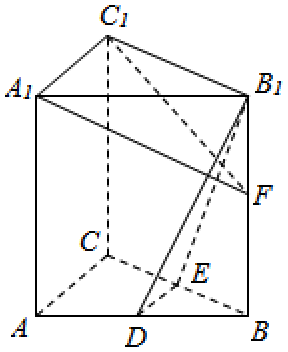
∴ $sinA=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore cos(A-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}cosA+\frac{1}{2}sinA=\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$.

16. 如图，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$．求证：

(1)直线 DE∥平面 A_1C_1F；

(2)平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.



解析：(1)通过证明 DE∥AC，进而 DE∥A_1C_1，据此可得直线 DE∥平面 $A_1C_1F_1$；

(2)通过证明 $A_1F\perp DE$ 结合题目已知条件 $A_1F\perp B_1D$，进而可得平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.

答案：(1)∵D，E 分别为 AB，BC 的中点，

∴DE 为△ABC 的中位线，

∴DE∥AC，

∵ABC-$A_1B_1C_1$ 为棱柱，

∴AC∥A_1C_1，

∴DE∥A_1C_1，

∵ $A_1C_1\subset$平面 A_1C_1F，且 DE$\not\subset$平面 A_1C_1F，

∴DE∥A_1C_1F；

(2)∵ABC-$A_1B_1C_1$ 为直棱柱，

∴$AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，

∴$AA_1\perp A_1C_1$，

又∵$A_1C_1\perp A_1B_1$，且 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，AA_1、$A_1B_1\subset$平面 AA_1B_1B，

∴$A_1C_1\perp$平面 AA_1B_1B，

∵DE∥A_1C_1，

∴DE⊥平面 AA_1B_1B，

又∵$A_1F\subset$平面 AA_1B_1B，

∴DE⊥A_1F，

又∵$A_1F\perp B_1D$，DE∩B_1D=D，且 DE、$B_1D\subset$平面 B_1DE，

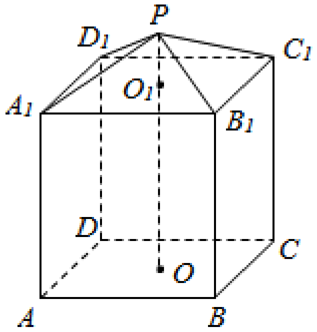
∴$A_1F\perp$平面 B_1DE，

又∵$A_1F\subset$平面 A_1C_1F，

∴平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.

17. 现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部的形状是正四棱锥 P-$A_1B_1C_1D_1$，下部

的形状是正四棱柱ABCD-$A_1B_1C_1D_1$(如图所示)，并要求正四棱柱的高O_1O是正四棱锥的高PO_1的4倍.
(1)若AB=6m，PO_1=2m，则仓库的容积是多少？
(2)若正四棱锥的侧棱长为6m，则当PO_1为多少时，仓库的容积最大？



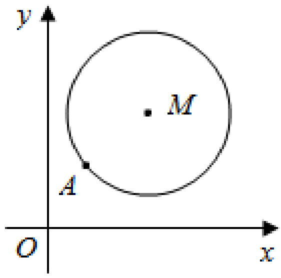
解析：(1)由正四棱柱的高O_1O是正四棱锥的高PO_1的4倍，可得PO_1=2m时，O_1O=8m，进而可得仓库的容积；

(2)设PO_1=xm，则O_1O=4xm，$A_1O_1=\sqrt{36-x^2}m$，$A_1B_1=\sqrt{36-x^2}m$，代入体积公式，求出容积的表达式，利用导数法，可得最大值.

答案：(1)∵PO_1=2m，正四棱柱的高O_1O是正四棱锥的高PO_1的4倍.
∴O_1O=8m，
∴仓库的容积$V=\frac{1}{3}\times6^2\times2+6^2\times8=312m^3$，
(2)若正四棱锥的侧棱长为6m，
设PO_1=xm，
则O_1O=4xm，$A_1O_1=\sqrt{36-x^2}m$，$A_1B_1=\sqrt{36-x^2}m$，
则仓库的容积$V=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2})^2\cdot x+(\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2})^2\cdot 4x=-\frac{26}{3}x^3+312x$，(0<x<6)，
∴V′=$-26x^2+312$，(0<x<6)，
当$0<x<2\sqrt{3}$时，V′>0，V(x)单调递增；
当$2\sqrt{3}<x<6$时，V′<0，V(x)单调递减；
故当$x=2\sqrt{3}$时，V(x)取最大值；
即当$PO_1=2\sqrt{3}$ m时，仓库的容积最大.

18. 如图，在平面直角坐标系xOy中，已知以M为圆心的圆M：$x^2+y^2-12x-14y+60=0$及其上一点A(2，4).
(1)设圆N与x轴相切，与圆M外切，且圆心N在直线x=6上，求圆N的标准方程；
(2)设平行于OA的直线l与圆M相交于B、C两点，且BC=OA，求直线l的方程；
(3)设点T(t，0)满足：存在圆M上的两点P和Q，使得$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数t的取值范

围.



解析：(1)设 N(6，n)，则圆 N 为：$(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$，n＞0，从而得到|7-n|=|n|+5，由此能求出圆 N 的标准方程.

(2)由题意得 $OA=2\sqrt{5}$，$k_{OA}=2$，设 l：y=2x+b，则圆心 M 到直线 l 的距离：$d=\frac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，由此能求出直线 l 的方程.

(3)$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，即 $|\overrightarrow{TA}|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$，又 $|\overrightarrow{PQ}|\le 10$，得 $t\in[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$，对于任意 $t\in[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$，欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，只需要作直线 TA 的平行线，使圆心到直线的距离为 $\sqrt{25-\frac{|\overrightarrow{TA}|^2}{4}}$，由此能求出实数 t 的取值范围.

答案：(1)∵N 在直线 x=6 上，∴设 N(6，n)，
∵圆 N 与 x 轴相切，∴圆 N 为：$(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$，n＞0，
又圆 N 与圆 M 外切，圆 M：$x^2+y^2-12x-14y+60=0$，即圆 M：$((x-6)^2+(x-7)^2=25$，
∴|7-n|=|n|+5，解得 n=1，
∴圆 N 的标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2)由题意得 $OA=2\sqrt{5}$，$k_{OA}=2$，设 l：y=2x+b，

则圆心 M 到直线 l 的距离：$d=\frac{|12-7+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，

则 $|BC|=2\sqrt{5^2-d^2}=2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}$，$BC=2\sqrt{5}$，即 $2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$，

解得 b=5 或 b=-15，
∴直线 l 的方程为：y=2x+5 或 y=2x-15.

(3)$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TQ}-\overrightarrow{TP}$，即 $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{PQ}|$，

$|\overrightarrow{TA}|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$，

又 $|\overrightarrow{PQ}|\le 10$，即 $\sqrt{(t-2)^2+4^2}\le 10$，解得 $t\in[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$，

对于任意 $t\in[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$，欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

此时，$\left|\overrightarrow{TA}\right| \le 10$，

只需要作直线 TA 的平行线，使圆心到直线的距离为$\sqrt{25-\frac{\left|TA\right|^2}{4}}$，

必然与圆交于 P、Q 两点，此时$\left|\overrightarrow{TA}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$，即$\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

因此实数 t 的取值范围为$t\in[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$.

19. 已知函数 f(x)=a^x+b^x(a＞0，b＞0，a≠1，b≠1).

(1)设 a=2，$b=\frac{1}{2}$.

①求方程 f(x)=2 的根；

②若对于任意 x∈R，不等式 f(2x)≥mf(x)-6 恒成立，求实数 m 的最大值；

(2)若 0＜a＜1，b＞1，函数 g(x)=f(x)-2 有且只有 1 个零点，求 ab 的值.

解析：(1)①利用方程，直接求解即可．②列出不等式，利用二次函数的性质以及函数的最值，转化求解即可.

(2)求出 g(x)=f(x)-2=a^x+b^x-2，求出函数的导数，构造函数$h(x)=\left(\frac{b}{a}\right)^x+\frac{lna}{lnb}$，求出 g(x)的最小值为：g($x_0$)．同理①若 g($x_0$)＜0，g(x)至少有两个零点，与条件矛盾．②若 g(x_0)＞0，利用函数 g(x)=f(x)-2 有且只有 1 个零点，推出 g(x_0)=0，然后求解 ab=1.

答案：函数 f(x)=a^x+b^x(a＞0，b＞0，a≠1，b≠1).

(1)设 a=2，$b=\frac{1}{2}$.

①方程 f(x)=2；即：$2^x+\frac{1}{2^x}=2$，可得 x=0.

②不等式 f(2x)≥mf(x)-6 恒成立，即$2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}\ge m(2^x+\frac{1}{2^x})-6$恒成立.

令$t=2^x+\frac{1}{2^x}$，t≥2.

不等式化为：t^2-mt+4≥0 在 t≥2 时，恒成立．可得：△≤0 或$\begin{cases}\frac{m}{2}\le 2\\ 2^2-2m+4\ge 0\end{cases}$

即：m^2-16≤0 或 m≤4，

∴m∈(-∞，4].

实数 m 的最大值为：4.

(2)g(x)=f(x)-2=a^x+b^x-2，

$g'(x)=a^xlna+b^xlnb=a^x\left[\frac{lna}{lnb}+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]$，0＜a＜1，b＞1 可得$\frac{b}{a}$＞1，令

$h(x)=\left(\frac{b}{a}\right)^x+\frac{lna}{lnb}$，则 h(x)是递增函数，而，lna＜0，lnb＞0，因此，$x_0=log\frac{b}{a}\left(-\frac{lna}{lnb}\right)$时，

$h(x_0)=0$，

因此 x∈(-∞，x_0)时，h(x)＜0，a^xlnb＞0，则 g′(x)＜0.

x∈(x_0，+∞)时，h(x)＞0，a^xlnb＞0，则 g′(x)＞0，

则 g(x)在(-∞，x_0)递减，(x_0，+∞)递增，因此 g(x)的最小值为：g(x_0).

①若 g(x_0)＜0，x＜$loga^2$时，a^x＞a^{loga^2}=2，b^x＞0，则 g(x)＞0，

因此 x1＜$loga^2$，且 x_1＜x_0时，g(x_1)＞0，因此 g(x)在(x_1，x_0)有零点，

则 g(x)至少有两个零点，与条件矛盾.

②若 g(x_0)＞0，函数 g(x)=f(x)-2 有且只有 1 个零点，g(x)的最小值为 g(x_0)，可得 g(x_0)=0，

由 g(0)=a^0+b^0-2=0，

因此 x_0=0，因此$log\frac{b}{a}\left(-\frac{lna}{lnb}\right)=0, -\frac{lna}{lnb}=1$，即 lna+lnb=0，ln(ab)=0，则 ab=1.

可得 ab=1.

20. 记 U={1，2，…，100}，对数列{a_n}(n∈N*)和 U 的子集 T，若$T=\varnothing$，定义 S_T=0；若 T={t_1，t_2，…，t_k}，定义 $S_T=a_{t1}+a_{t2}+\cdots+a_{tk}$. 例如：T={1，3，66}时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设{$a_n$}(n∈N*)是公比为 3 的等比数列，且当 T={2，4}时，S_T=30.

(1)求数列{a_n}的通项公式；

(2)对任意正整数 k(1≤k≤100)，若$T\subseteq${1，2，…，k}，求证：S_T＜a_k+1；

(3)设$C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\geq S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

解析：(1)根据题意，由 S_T 的定义，分析可得 $S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，计算可得 a_2=3，进而可得 a_1 的值，由等比数列通项公式即可得答案；

(2)根据题意，由 S_T 的定义，分析可得 $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots a_k=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}$，由等比数列的前 n 项和公式计算可得证明；

(3)设 A=C_C(C∩D)，B=C_D(C∩D)，则$A\cap B=\varnothing$，进而分析可以将原命题转化为证明 $S_C\geqslant 2S_B$，分 2 种情况进行讨论：①、若$B=\varnothing$，②、若$B\neq\varnothing$，可以证明得到 $S_A\geqslant 2S_B$，即可得证明.

答案：(1)当 T={2，4}时，$S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，

因此 a_2=3，从而$a_1=\frac{a^2}{3}=1$，

故 $a_n=3^{n-1}$，

(2) $S_T\leq a_1+a_2+\ldots a_k=1+3+3^2+\ldots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{2}<3^k=a_{k+1}$，

(3)设 A=C_C(C∩D)，B=C_D(C∩D)，则$A\cap B=\varnothing$，

分析可得 $S_C=S_A+S_{C\cap D}$，$S_D=S_B+S_{C\cap D}$，则 $S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B$，

因此原命题的等价于证明 $S_C\geqslant 2S_B$，

由条件 $S_C\geqslant S_D$，可得 $S_A\geqslant S_B$，

①、若$B=\varnothing$，则 S_B=0，故 $S_A\geqslant 2S_B$，

②、若$B\neq\varnothing$，由 $S_A\geqslant S_B$ 可得$A\neq\varnothing$，设 A 中最大元素为 l，B 中最大元素为 m，

若 m≥l+1，则其与 $S_A<a_{i+1}\leqslant a_m\leqslant S_B$ 相矛盾，

因为$A\cap B=\varnothing$，所以 1≠m，则 1≥m+1，

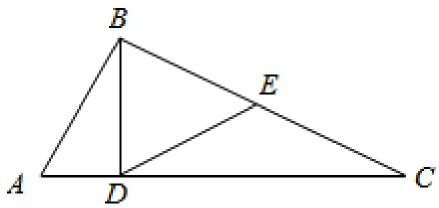
$S_B \leq a_1 + a_2 + \ldots a_m = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{m-1} = \frac{3^m - 1}{2} < \frac{a_{m+1}}{2} = \frac{S_A}{2}$，即 $S_A \geqslant 2S_B$，

综上所述，$S_A \geqslant 2S_B$，

故 $S_C + S_{C\cap D} \geqslant 2S_D$.

附加题【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两小题评分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.A.【选修 4—1 几何证明选讲】

21. 如图，在△ABC 中，∠ABC=90°，BD⊥AC，D 为垂足，E 为 BC 的中点，求证：∠EDC=∠ABD.



解析：题意，知∠BDC=90°，∠EDC=∠C，利用∠C+∠DBC=∠ABD+∠DBC=90°，可得∠ABD=∠C，从而可证得结论.

答案：由 BD⊥AC 可得∠BDC=90°，

因为 E 为 BC 的中点，所以 DE=CE=$\frac{1}{2}$BC，

则：∠EDC=∠C，

由∠BDC=90°，可得∠C+∠DBC=90°，

由∠ABC=90°，可得∠ABD+∠DBC=90°，

因此∠ABD=∠C，而∠EDC=∠C，

所以，∠EDC=∠ABD.

B.【选修 4—2：矩阵与变换】

22. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，矩阵 B 的逆矩阵 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 AB.

解析：依题意，利用矩阵变换求得 $B = (B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，再利用矩阵乘法的性质可求得答案.

答案：$\because B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，

$\therefore B=(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{2} & \frac{\frac{1}{2}}{2}\\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，又 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，

$\therefore AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{4}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

C.【选修 4—4：坐标系与参数方程】

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，椭圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=cos\theta\\ y=2sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，设直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

解析：分别化直线与椭圆的参数方程为普通方程，然后联立方程组，求出直线与椭圆的交点坐标，代入两点间的距离公式求得答案.

答案：由$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t① \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t②\end{cases}$，由②得 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}y$，

代入①并整理得，$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$.

由$\begin{cases}x=cos\theta\\ y=2sin\theta\end{cases}$，得$\begin{cases}x=cos\theta\\ \frac{y}{2}=sin\theta\end{cases}$，

两式平方相加得 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

联立$\begin{cases}\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{1}{7}\\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{7}\end{cases}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{7}\right)^2+\left(0+\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{16}{7}$.

24. 设 a＞0，$|x-1|<\frac{a}{3},|y-2|<\frac{a}{3}$，求证：|2x+y-4|＜a.

解析：运用绝对值不等式的性质：|a+b|≤|a|+|b|，结合不等式的基本性质，即可得证.

答案：由 a＞0，$|x-1|<\frac{a}{3},|y-2|<\frac{a}{3}$，

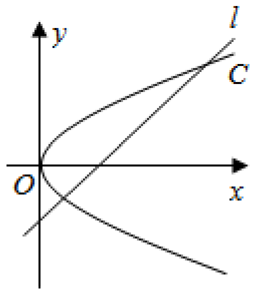
可得|2x+y-4|=|2(x-1)+(y-2)|

$\leqslant 2|x-1|+|y-2|<\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}=a$，

则|2x+y-4|＜a 成立.

附加题【必做题】

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：x-y-2=0，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$.
(1)若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；
(2)已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.
①求证：线段 PQ 的中点坐标为(2-p，-p)；
②求 p 的取值范围.



解析：(1)求出抛物线的焦点坐标，然后求解抛物线方程.
(2)：①设点 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，通过抛物线方程，求解 k_{PQ}，通过 P，Q 关于直线 l 对称，点的 $k_{PQ}=-1$，推出 $\frac{y_1+y_2}{2}=-p$，PQ 的中点在直线 l 上，推出 $\frac{x_1+x_2}{2}=2-p$，即可证明线段 PQ 的中点坐标为(2-p，-p)；

②利用线段 PQ 中点坐标(2-p，-p)．推出 $\begin{cases}y_1+y_2=-2p\\ y_1y_2=4p^2-4p\end{cases}$，得到关于 $y^2+2py+4p^2-4p=0$，有两个不相等的实数根，列出不等式即可求出 p 的范围.

答案：(1)∵l：x-y-2=0，∴l 与 x 轴的交点坐标(2，0)，
即抛物线的焦点坐标(2，0).

$\therefore \frac{p}{2}=2$，

∴抛物线 C：$y^2=8x$.

(2)证明：①设点 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则：$\begin{cases}y_1^2=2px_1\\ y_2^2=2px_2\end{cases}$，

即：$\begin{cases}\dfrac{{y_1}^2}{2p}=x_1\\ \dfrac{{y_2}^2}{2p}=x_2\end{cases}$，$k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{{y_1}^2}{2p}-\dfrac{{y_2}^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$，

又∵P，Q 关于直线 l 对称，∴$k_{PQ}=-1$，即 $y_1+y_2=-2p$，∴$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-p$，

又 PQ 的中点在直线 l 上，∴$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2}+2=2-p$，

∴线段 PQ 的中点坐标为(2-p，-p)；

②因为 Q 中点坐标(2-p，-p)．

∴$\begin{cases}y_1+y_2=-2p\\ x_1+x_2=\dfrac{{y_1}^2+{y_2}^2}{2p}=4-2p\end{cases}$，即$\begin{cases}y_1+y_2=-2p\\ {y_1}^2+{y_2}^2=8p-4p^2\end{cases}$

∴$\begin{cases}y_1+y_2=-2p\\ y_1y_2=4p^2-4p\end{cases}$，即关于 $y^2+2py+4p^2-4p=0$，有两个不相等的实数根，

∴△＞0，$(2p)^2-4(4p^2-4p)>0$，

∴ $p\in(0,\dfrac{4}{3})$．

26. (1)求 $7C_6^3-4C_7^4$ 的值；

(2)设 m，n∈N*，n≥m，求证：

$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\ldots+nC_{n-1}^m+(n+1)C_n^m=(m+1)C_{n+2}^{m+2}$．

解析：(1)由已知直接利用组合公式能求出 $7C_6^3-4C_7^4$ 的值．

(2)对任意 m∈N*，当 n=m 时，验证等式成立；再假设 n=k(k≥m)时命题成立，推导出当 n=k+1 时，命题也成立，由此利用数学归纳法能证明 $(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\ldots+nC_{n-1}^m+(n+1)C_n^m=(m+1)C_{n+2}^{m+2}$．

答案：(1) $7C_6^3-4C_7^4$

$=\dfrac{7\times6\times5\times4}{3\times2\times1}-\dfrac{4\times7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}$

=7×20-4×35=0．

证明：(2)对任意 m∈N*，

①当 n=m 时，左边=$(m+1)C_m^m=m+1$，

右边=$(m+1)C_{m+2}^{m+2}=m+1$，等式成立．

②假设 n=k(k⩾m)时命题成立，
即

$$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\ldots+kC_{k-1}^m+(k+1)C_k^m=(m+1)C_{k+2}^{m+2},$$

当 n=k+1 时，
左边=

$$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\ldots+kC_{k-1}^m+(k+1)C_k^m+(k+2)C_{k+1}^m=$$

$$(m+1)C_{k+2}^{m+2}+(k+2)C_{k+1}^m,$$

右边=$(m+1)C_{k+3}^{m+2}$

∵ $(m+1)C_{k+3}^{m+2}-(m+1)C_{k+2}^{m+2}$

$$=(m+1)\left[\frac{(k+3)!}{(m+2)!(k-m+1)!}-\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m)!}\right]$$

$$=(m+1)\times\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m+1)!}[k+3-(k-m+1)]$$

$$=(k+2)\frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!}$$

$$=(k+2)C_{k+1}^m,$$

∴ $(m+1)C_{k+2}^{m+2}+(k+2)C_{k+1}^m=(m+1)C_{k+3}^{m+2}$，

∴左边=右边，
∴n=k+1 时，命题也成立，
∴ m，n ∈ N*，n ⩾ m，

$$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\ldots+nC_{n-1}^m+(n+1)C_n^m=(m+1)C_{n+2}^{m+2}.$$