

## 2014 年云南省中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题只有一个正确选项，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2014 年云南省)  $|-1| =$  ( )

- A.  $-1$  B.  $1$  C.  $-7$  D.  $7$

考点：绝对值.

分析：根据负数的绝对值是它的相反数，可得答案.

解答：解： $|-1| = 1$ ,

故选：B.

点评：本题考查了相反数，在一个数的前面加上负号就是这个数的相反数.

2. (3 分) (2014 年云南省) 下列运算正确的是 ( )

- A.  $3x^2 + 2x^3 = 5x^6$  B.  $5^0 = 0$  C.  $2^{-3} = \frac{1}{8}$  D.  $(x^3)^2 = x^6$

考点：幂的乘方与积的乘方；合并同类项；零指数幂；负整数指数幂.

分析：根据合并同类项，可判断 A，根据非 0 的 0 次幂，可判断 B，根据负整数指数幂，可判断 C，根据幂的乘方，可判断 D.

解答：解：A、系数相加字母部分不变，故 A 错误；

B、非 0 的 0 次幂等于 1，故 B 错误；

C、 $2^{-3} = \frac{1}{8}$ ，故 C 错误；

D、底数不变指数相乘，故 D 正确；

故选：D.

点评：本题考查了幂的乘方，幂的乘方底数不变指数相乘是解题关键.

3. (3 分) (2014 年云南省) 不等式组  $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$  的解集是 ( )

- A.  $x > \frac{1}{2}$  B.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  C.  $x < \frac{1}{2}$  D.  $x \geq -1$

考点：解一元一次不等式组.

分析：分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

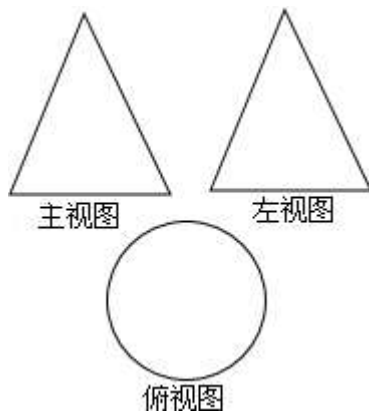
解答：解： $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \text{ ①} \\ x + 1 \geq 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，由①得， $x > \frac{1}{2}$ ，由②得， $x \geq -1$ ，

故此不等式组的解集为： $x > \frac{1}{2}$ .

故选 A.

点评：本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

4. (3 分) (2014 年云南省) 某几何体的三视图如图所示，则这个几何体是 ( )



- A. 圆柱                      B. 正方体                      C. 球                      D. 圆锥

考点： 由三视图判断几何体. \_

分析： 由主视图和左视图确定是柱体，锥体还是球体，再由俯视图确定具体形状.

解答： 解：根据主视图和左视图为三角形判断出是锥体，根据俯视图是圆形可判断出这个几何体应该是圆锥，故选 D.

点评： 主视图和左视图的大致轮廓为三角形的几何体为锥体，俯视图为圆就是圆锥.

5. (3分) (2014年云南省) 一元二次方程  $x^2 - x - 2 = 0$  的解是 ( )

- A.  $x_1 = 1, x_2 = 2$                       B.  $x_1 = 1, x_2 = -2$                       C.  $x_1 = -1, x_2 = -2$   
D.  $x_1 = -1, x_2 = 2$

考点： 解一元二次方程-因式分解法. \_

分析： 直接利用十字相乘法分解因式，进而得出方程的根

解答： 解：  $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x - 2)(x + 1) = 0,$$

解得：  $x_1 = -1, x_2 = 2$ .

故选： D.

点评： 此题主要考查了十字相乘法分解因式解方程，正确分解因式是解题关键.

6. (3分) (2014年云南省) 据统计，2013年我国用义务教育经费支持了 13940000 名农民工随迁子女在城市里接受义务教育，这个数字用科学计数法可表示为 ( )

- A.  $1.394 \times 10^7$                       B.  $13.94 \times 10^7$                       C.  $1.394 \times 10^6$  D.  $13.94 \times 10^5$

考点： 科学记数法—表示较大的数. \_

分析： 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 1$  时，n 是正数；当原数的绝对值  $< 1$  时，n 是负数.

解答： 解：  $13\ 940\ 000 = 1.394 \times 10^7$ ,

故选： A.

点评： 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

7. (3分) (2014年云南省) 已知扇形的圆心角为 $45^\circ$ , 半径长为12, 则该扇形的弧长为 ( )

- A.  $\frac{3\pi}{4}$                       B.  $2\pi$                       C.  $3\pi$                       D.  $12\pi$

考点: 弧长的计算. \_

分析: 根据弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$ , 代入相应数值进行计算即可.

解答: 解: 根据弧长公式:  $l=\frac{45\cdot\pi\cdot 12}{180}=3\pi$ ,

故选: C.

点评: 此题主要考查了弧长计算, 关键是掌握弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$ .

8. (3分) (2014年云南省) 学校为了丰富学生课余活动开展了一次“爱我云南, 唱我云南”的歌咏比赛, 共有18名同学入围, 他们的决赛成绩如下表:

成绩(分)	9.40	9.50	9.60	9.70	9.80	9.90
人数	2	3	5	4	3	1

则入围同学决赛成绩的中位数和众数分别是 ( )

- A. 9.70, 9.60                      B. 9.60, 9.60                      C. 9.60, 9.70  
D. 9.65, 9.60

考点: 众数; 中位数. \_

分析: 根据中位数和众数的概念求解.

解答: 解:  $\because$  共有18名同学,

则中位数为第9名和第10名同学成绩的平均分, 即中位数为:  $\frac{9.60+9.60}{2}=9.60$ ,

众数为: 9.60.

故选 B.

点评: 本题考查了中位数和众数的概念, 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数; 将一组数据按照从小到大(或从大到小)的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

## 二、填空题(本大题共6个小题, 每小题3分, 满分18分)

9. (3分) (2014年云南省) 计算:  $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\underline{\sqrt{2}}$ .

考点: 二次根式的加减法. \_

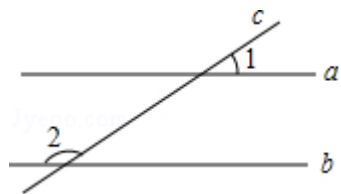
分析: 运用二次根式的加减法运算的顺序, 先将二次根式化成最简二次根式, 再合并同类二次根式即可.

解答: 解: 原式 $=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ .

故答案为:  $\sqrt{2}$ .

点评: 合并同类二次根式实际是把同类二次根式的系数相加, 而根指数与被开方数都不变.

10. (3分) (2014年云南省) 如图, 直线  $a \parallel b$ , 直线  $a, b$  被直线  $c$  所截,  $\angle 1 = 37^\circ$ , 则  $\angle 2 = \underline{143^\circ}$ .



考点: 平行线的性质.

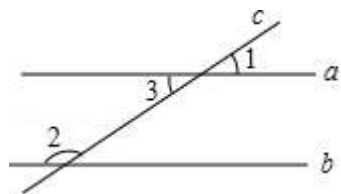
分析: 根据对顶角相等可得  $\angle 3 = \angle 1$ , 再根据两直线平行, 同旁内角互补列式计算即可得解.

解答: 解:  $\angle 3 = \angle 1 = 37^\circ$  (对顶角相等),

$\because a \parallel b$ ,

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$ .

故答案为:  $143^\circ$ .



点评: 本题考查了平行线的性质, 对顶角相等的性质, 熟记性质并准确识图是解题的关键.

11. (3分) (2014年云南省) 写出一个图象经过一, 三象限的正比例函数  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ) 的解析式 (关系式)  $\underline{y = 2x}$ .

考点: 正比例函数的性质.

专题: 开放型.

分析: 根据正比例函数  $y = kx$  的图象经过一, 三象限, 可得  $k > 0$ , 写一个符合条件的数即可.

解答: 解:  $\because$  正比例函数  $y = kx$  的图象经过一, 三象限,

$\therefore k > 0$ ,

取  $k = 2$  可得函数关系式  $y = 2x$ .

故答案为:  $y = 2x$ .

点评: 此题主要考查了正比例函数的性质, 关键是掌握正比例函数图象的性质: 它是经过原点的一条直线. 当  $k > 0$  时, 图象经过一、三象限,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $k < 0$  时, 图象经过二、四象限,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

12. (3分) (2014•天津) 抛物线  $y = x^2 - 2x + 3$  的顶点坐标是  $\underline{(1, 2)}$ .

考点: 二次函数的性质.

专题: 计算题.

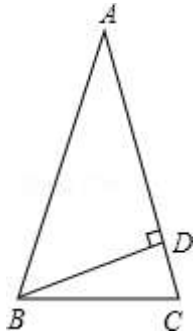
分析： 已知抛物线的解析式是一般式，用配方法转化为顶点式，根据顶点式的坐标特点，直接写出顶点坐标.

解答： 解：  $\because y=x^2-2x+3=x^2-2x+1-1+3=(x-1)^2+2$ ,

$\therefore$  抛物线  $y=x^2-2x+3$  的顶点坐标是  $(1, 2)$ .

点评： 此题考查了二次函数的性质，二次函数  $y=a(x-h)^2+k$  的顶点坐标为  $(h, k)$ ，对称轴为  $x=h$ ，此题还考查了配方法求顶点式.

13. (3分) (2014年云南省) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ ， $BD \perp AC$ 于点D，则 $\angle CBD=$ 18°.



考点： 等腰三角形的性质.

分析： 根据已知可求得两底角的度数，再根据三角形内角和定理不难求得 $\angle DBC$ 的度数.

解答： 解：  $\because AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=72^\circ$ .

$\because BD \perp AC$ 于点D，

$\therefore \angle CBD=90^\circ-72^\circ=18^\circ$ .

故答案为：  $18^\circ$ .

点评： 本题主要考查等腰三角形的性质，解答本题的关键是会综合运用等腰三角形的性质和三角形的内角和定理进行答题，此题难度一般.

14. (3分) (2014年云南省) 观察规律并填空

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \bullet = ;$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \bullet \bullet \bullet = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet = ;$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet = ;$$

...

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}. \quad (\text{用含 } n \text{ 的代数式表示, } n \text{ 是正整数, 且 } n \geq 2)$$

考点： 规律型：数字的变化类. .

分析： 由前面算式可以看出：算式的左边利用平方差公式因式分解，中间的数字互为倒数，乘积为1，只剩下两端的（1-）和（1+）相乘得出结果.

解答： 解：  $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$= \dots \dots \dots \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2n}.$$

故答案为：  $\frac{n+1}{2n}$ .

点评： 此题考查算式的运算规律，找出数字之间的联系，得出运算规律，解决问题.

### 三、解答题（本大题共 9 个小题，满分 60 分）

15. (5分) (2014年云南省) 化简求值：  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$ , 其中  $x =$ .

考点： 分式的化简求值. .

专题： 计算题.

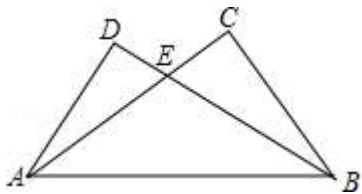
分析： 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，约分得到最简结果，将 x 的值代入计算即可求出值.

解答： 解： 原式 =  $\frac{x(x-1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} = x+1,$

当  $x =$  时，原式 =.

点评： 此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

16. (5分) (2014年云南省) 如图，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  中，AC 与 BD 相交于点 E， $AD=BC$ ， $\angle DAB = \angle CBA$ ，求证：  $AC=BD$ .



考点： 全等三角形的判定与性质. .

专题： 证明题.

分析： 根据“SAS”可证明 $\triangle ADB \cong \triangle BAC$ ，由全等三角形的性质即可证明  $AC=BD$ 。

解答： 证明：在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle BAC$ 中，

$$\begin{cases} AD=BC \\ \angle DAB=\angle CBA, \\ AB=BA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle BAC$  (SAS),

$\therefore AC=BD$ .

点评： 本题考查了全等三角形的判定和性质，全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具。在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件。

17. (6分) (2014年云南省) 将油箱注满  $k$  升油后，轿车行驶的总路程  $S$  (单位：千米) 与平均耗油量  $a$  (单位：升/千米) 之间是反比例函数关系  $S=$  ( $k$  是常数， $k \neq 0$ )。已知某轿车油箱注满油后，以平均耗油量为每千米耗油 0.1 升的速度行驶，可行驶 700 千米。

(1) 求该轿车可行驶的总路程  $S$  与平均耗油量  $a$  之间的函数解析式 (关系式)；

(2) 当平均耗油量为 0.08 升/千米时，该轿车可以行驶多少千米？

考点： 反比例函数的应用。

分析： (1) 将  $a=0.1$ ,  $s=700$  代入到函数的关系  $S=$  中即可求得  $k$  的值，从而确定解析式；

(2) 将  $a=0.08$  代入求得的函数的解析式即可求得  $s$  的值。

解答： 解：(1) 由题意得：  $a=0.1$ ,  $s=700$ ,

代入反比例函数关系  $S=$  中，

解得：  $k=sa=70$ ,

所以函数关系式为：  $s=\frac{70}{a}$ ;

(2) 将  $a=0.08$  代入  $s=\frac{70}{a}$  得：  $s=\frac{70}{0.08}=\frac{70}{0.08}=875$  千米，

故该轿车可以行驶多 875 米；

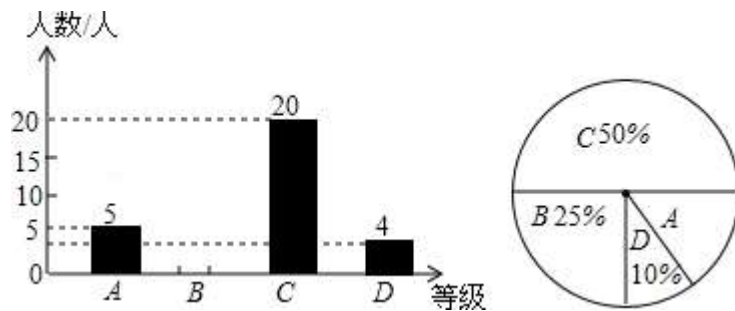
点评： 本题考查了反比例函数的应用，解题的关键是从实际问题中抽象出反比例函数模型。

18. (9分) (2014年云南省) 为了解本校九年级学生期末数学考试情况，销量在九年级随机抽取了一部分学生的期末数学成绩为样本，分为 A、B (89~80分)、C (79~60分)、D (59~0分) 四个等级进行统计，并将统计结果绘制成如下统计图，请你根据统计图解答以下问题：

(1) 这次随机抽取的学生共有多少人？

(2) 请补全条形统计图；

(3) 这个学校九年级共有学生 1200 人，若分数为 80 分 (含 80 分) 以上为优秀，请估计这次九年级学生期末数学考试成绩为优秀的学生人数大约有多少？



考点： 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析： (1) 抽查人数可由 C 等所占的比例为 50%，根据总数=某等人数÷比例来计算；

(2) 可由总数减去 A、C、D 的人数求得 B 等的人数，再补全条形统计图；

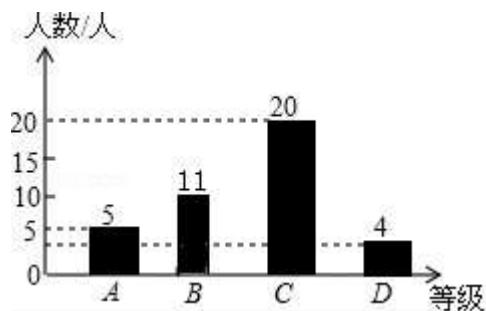
(3) 用样本估计总体. 用总人数 1200 乘以样本中测试成绩等级在 80 分（含 80 分）以上的学生所占百分比即可.

解答： 解：(1)  $20 \div 50\% = 40$ （人），

答：这次随机抽取的学生共有 40 人；

(2) B 等级人数： $40 - 5 - 20 - 4 = 11$ （人）

条形统计图如下：



(3)  $1200 \times \frac{5+11}{40} \times 100\% = 480$ （人），

这次九年级学生期末数学考试成绩为优秀的学生人数大约有 480 人.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

19. (7 分) (2014 年云南省) 某市“艺术节”期间，小明、小亮都想去观看茶艺表演，但是只有一张茶艺表演门票，他们决定采用抽卡片的方法确定谁去. 规则如下：

将正面分别标有数字 1、2、3、4 的四张卡片（除数字外其余都相同）洗匀后，背面朝上放置在桌面上，随机抽出一张记下数字后放回；重新洗匀后背面朝上放置在桌面上，再随机抽出一张记下数字. 如果两个数字之和为奇数，则小明去；如果两个数字之和为偶数，则小亮去.

(1) 请用列表或画树状图的方法表示抽出的两张卡片上的数字之和的所有可能出现的结果；

(2) 你认为这个规则公平吗？请说明理由.

考点： 游戏公平性；列表法与树状图法.



分析：（1）用列表法将所有等可能的结果一一列举出来即可；

（2）求得两人获胜的概率，若相等则公平，否则不公平。

解答：解：（1）根据题意列表得：

1234  
12345  
23456  
34567  
45678

（2）由列表得：共 16 种情况，其中奇数有 8 种，偶数有 8 种，

∴ 和为偶数和和为奇数的概率均为，

∴ 这个游戏公平。

点评： 本题考查了游戏公平性及列表与列树形图的知识，难度不大，是经常出现的一个知识点。

20.（6分）（2014年云南省）“母亲节”前夕，某商店根据市场调查，用 3000 元购进第一批盒装花，上市后很快售完，接着又用 5000 元购进第二批这种盒装花。已知第二批所购花的盒数是第一批所购花盒数的 2 倍，且每盒花的进价比第一批的进价少 5 元。求第一批盒装花每盒的进价是多少元？

考点： 分式方程的应用。

分析： 设第一批盒装花的进价是  $x$  元/盒，则第一批进的数量是： $\frac{3000}{x}$ ，第二批进的数量是： $\frac{5000}{x-5}$ ，再根据等量关系：第二批进的数量=第一批进的数量 $\times 2$  可得方程。

解答： 解：设第一批盒装花的进价是  $x$  元/盒，则

$$2 \times \frac{3000}{x} = \frac{5000}{x-5},$$

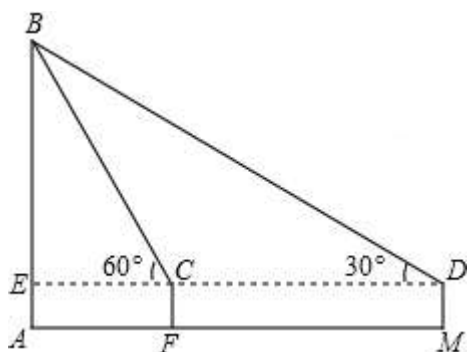
解得  $x=30$

经检验， $x=30$  是原方程的根。

答：第一批盒装花每盒的进价是 30 元。

点评： 本题考查了分式方程的应用。注意，分式方程需要验根，这是易错的地方。

21.（6分）（2014年云南省）如图，小明在  $M$  处用高 1 米（ $DM=1$  米）的测角仪测得旗杆  $AB$  的顶端  $B$  的仰角为  $30^\circ$ ，再向旗杆方向前进 10 米到  $F$  处，又测得旗杆顶端  $B$  的仰角为  $60^\circ$ ，请求出旗杆  $AB$  的高度（取  $\sqrt{3} \approx 1.73$ ，结果保留整数）



考点：解直角三角形的应用-仰角俯角问题．

分析：首先分析图形，根据题意构造直角三角形．本题涉及多个直角三角形，应利用其公共边构造三角关系，进而可求出答案．

解答：解： $\because \angle BDE=30^\circ, \angle BCE=60^\circ,$

$\therefore \angle CBD=60^\circ - \angle BDE=30^\circ=\angle BDE,$

$\therefore BC=CD=10$  米，

在  $Rt\triangle BCE$  中， $\sin 60^\circ = \frac{BE}{BC}$ ，即  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BE}{10}$ ，

$\therefore BE=5\sqrt{3}$ ，

$AB=BE+AE=5\sqrt{3}+1 \approx 10$  米．

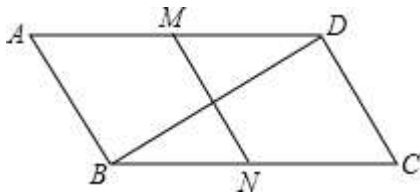
答：旗杆  $AB$  的高度大约是 10 米．

点评：主要考查解直角三角形的应用，本题要求学生借助仰角关系构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形．

22. (7分) (2014年云南省) 如图，在平行四边形  $ABCD$  中， $\angle C=60^\circ$ ， $M$ 、 $N$  分别是  $AD$ 、 $BC$  的中点， $BC=2CD$ ．

(1) 求证：四边形  $MNCD$  是平行四边形；

(2) 求证： $BD=\sqrt{3}MN$ ．



考点：平行四边形的判定与性质．

专题：证明题．

分析：(1) 根据平行四边形的性质，可得  $AD$  与  $BC$  的关系，根据  $MD$  与  $NC$  的关系，可得证明结论；

(2) 根据等边三角形的判定与性质，可得  $\angle DNC$  的度数，根据三角形外角的性质，可得  $\angle DBC$  的度数，根据正切函数，可得答案．

解答：证明：(1)  $\because ABCD$  是平行四边形，

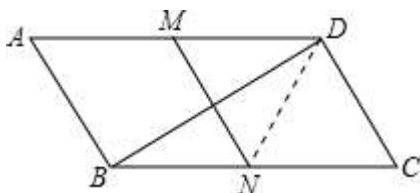
$\therefore AD=BC, AD \parallel BC,$

$\because M$ 、 $N$  分别是  $AD$ 、 $BC$  的中点，

$\therefore MD=NC, MD \parallel NC,$

$\therefore MNCD$  是平行四边形；

(2) 如图：连接  $ND$ ，



$\therefore MNCD$  是平行四边形，

$\therefore MN=DC$ .  
 $\therefore N$  是  $BC$  的中点,  
 $\therefore BN=CN$ ,  
 $\therefore BC=2CD, \angle C=60^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle NVD$  是等边三角形.  
 $\therefore ND=NC, \angle DNC=60^\circ$ .  
 $\therefore \angle DNC$  是  $\triangle BND$  的外角,  
 $\therefore \angle NBD+\angle NDB=\angle DNC$ ,  
 $\therefore DN=NC=NB$ ,  
 $\therefore \angle DBN=\angle BDN=\angle DNC=30^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BDC=90^\circ$ .  
 $\therefore \tan \angle DBC=\frac{DC}{DB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
 $\therefore DB=\sqrt{3}DC=\sqrt{3}MN$ .

点评： 本题考查了平行四边形的判定与性质，利用了一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，等边三角形的判定与性质，正切函数.

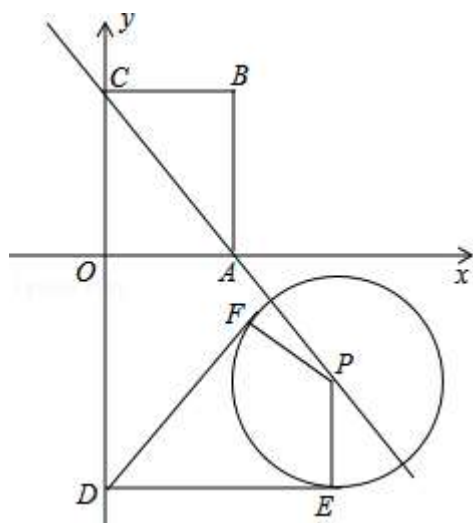
23. (9分) (2014年云南省) 已知如图平面直角坐标系中，点  $O$  是坐标原点，矩形  $ABCD$  是顶点坐标分别为  $A(3, 0)$ 、 $B(3, 4)$ 、 $C(0, 4)$ . 点  $D$  在  $y$  轴上，且点  $D$  的坐标为  $(0, -5)$ ，点  $P$  是直线  $AC$  上的一动点.

(1) 当点  $P$  运动到线段  $AC$  的中点时，求直线  $DP$  的解析式 (关系式)；

(2) 当点  $P$  沿直线  $AC$  移动时，过点  $D$ 、 $P$  的直线与  $x$  轴交于点  $M$ . 问在  $x$  轴的正半轴上是否存在使  $\triangle DOM$  与  $\triangle ABC$  相似的点  $M$ ? 若存在，请求出点  $M$  的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 当点  $P$  沿直线  $AC$  移动时，以点  $P$  为圆心、 $R$  ( $R>0$ ) 为半径长画圆. 得到的圆称为动圆  $P$ . 若设动圆  $P$  的半径长为  $\frac{AC}{2}$ ，过点  $D$  作动圆  $P$  的两条切线与动圆  $P$  分别相切于点

$E$ 、 $F$ . 请探求在动圆  $P$  中是否存在面积最小的四边形  $DEPF$ ? 若存在，请求出最小面积  $S$  的值；若不存在，请说明理由.



考点：圆的综合题；待定系数法求一次函数解析式；垂线段最短；勾股定理；切线长定理；相似三角形的判定与性质。

专题：综合题；存在型；分类讨论。

分析：（1）只需先求出 AC 中点 P 的坐标，然后用待定系数法即可求出直线 DP 的解析式。

（2）由于  $\triangle DOM$  与  $\triangle ABC$  相似，对应关系不确定，可分两种情况进行讨论，利用三角形相似求出 OM 的长，即可求出点 M 的坐标。

（3）易证  $S_{\triangle PED} = S_{\triangle PFD}$ 。从而有  $S_{\text{四边形 DEPF}} = 2S_{\triangle PED} = DE$ 。由  $\angle DEP = 90^\circ$  得  $DE^2 = DP^2 - PE^2 = DP^2 - \frac{25}{4}$ 。根据“点到直线之间，垂线段最短”可得：当  $DP \perp AC$  时，DP 最短，此时

DE 也最短，对应的四边形 DEPF 的面积最小。借助于三角形相似，即可求出  $DP \perp AC$  时 DP 的值，就可求出四边形 DEPF 面积的最小值。

解答：解：（1）过点 P 作  $PH \parallel OA$ ，交 OC 于点 H，如图 1 所示。

$\therefore PH \parallel OA$ ,

$\therefore \triangle CHP \sim \triangle COA$ .

$$\therefore \frac{HP}{OA} = \frac{CH}{CO} = \frac{CP}{CA}$$

$\therefore$  点 P 是 AC 中点，

$\therefore CP = CA$ .

$\therefore HP = OA$ ,  $CH = CO$ .

$\therefore A(3, 0)$ 、 $C(0, 4)$ ,

$\therefore OA = 3$ ,  $OC = 4$ .

$\therefore HP = 3$ ,  $CH = 2$ .

$\therefore OH = 2$ .

$\therefore PH \parallel OA$ ,  $\angle COA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle CHP = \angle COA = 90^\circ$ .

$\therefore$  点 P 的坐标为  $(\frac{3}{2}, 2)$ 。

设直线 DP 的解析式为  $y = kx + b$ ,

$\therefore D(0, -5)$ ,  $P(\frac{3}{2}, 2)$  在直线 DP 上，

$$\therefore \begin{cases} b = -5 \\ \frac{3}{2}k + b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{14}{3} \\ b = -5 \end{cases}$$

$\therefore$  直线 DP 的解析式为  $y = \frac{14}{3}x - 5$ 。

（2）①若  $\triangle DOM \sim \triangle ABC$ ，图 2（1）所示，

$\therefore \triangle DOM \sim \triangle ABC$ ,

$$\therefore \frac{DO}{AB} = \frac{OM}{BC}$$

$\therefore$  点 B 坐标为  $(3, 4)$ ，点 D 的坐标为  $(0, -5)$ ，

$\therefore BC = 3$ ,  $AB = 4$ ,  $OD = 5$ 。

$$\therefore \frac{OM}{3}$$

$$\therefore OM = \frac{15}{4}$$

$\therefore$  点 M 在 x 轴的正半轴上,

$\therefore$  点 M 的坐标为  $(\frac{15}{4}, 0)$

② 若  $\triangle DOM \sim \triangle CBA$ , 如图 2 (2) 所示,

$\therefore \triangle DOM \sim \triangle CBA$ ,

$$\therefore \frac{DO}{CB} = \frac{OM}{BA}$$

$\therefore BC=3, AB=4, OD=5$ ,

$$\therefore \frac{OM}{4}$$

$$\therefore OM = \frac{20}{3}$$

$\therefore$  点 M 在 x 轴的正半轴上,

$\therefore$  点 M 的坐标为  $(\frac{20}{3}, 0)$ .

综上所述: 若  $\triangle DOM$  与  $\triangle CBA$  相似, 则点 M 的坐标为  $(\frac{15}{4}, 0)$  或  $(\frac{20}{3}, 0)$ .

(3)  $\therefore OA=3, OC=4, \angle AOC=90^\circ$ ,

$\therefore AC=5$ .

$\therefore PE=PF=AC$ .

$\therefore DE、DF$  都与  $\odot P$  相切,

$\therefore DE=DF, \angle DEP=\angle DFP=90^\circ$ .

$\therefore S_{\triangle PED}=S_{\triangle PFD}$ .

$\therefore S_{\text{四边形 DEPF}}=2S_{\triangle PED}$

$$=2 \times PE \cdot DE$$

$$=PE \cdot DE$$

$$=DE$$

$\therefore \angle DEP=90^\circ$ ,

$$\therefore DE^2=DP^2 - PE^2$$

$$=DP^2 - \frac{25}{4}$$

根据“点到直线之间, 垂线段最短”可得:

当  $DP \perp AC$  时,  $DP$  最短,

此时  $DE$  取到最小值, 四边形  $DEPF$  的面积最小.

$\therefore DP \perp AC$ ,

$\therefore \angle DPC=90^\circ$ .

$\therefore \angle AOC=\angle DPC$ .

$\therefore \angle OCA=\angle PCD, \angle AOC=\angle DPC$ ,

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle DPC$ .

$$\therefore \frac{AO}{DP} = \frac{AC}{DC}$$

$$\because AO=3, AC=5, DC=4 - (-5) = 9,$$

$$\therefore \frac{3}{DP} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore DP = \frac{27}{5}$$

$$\therefore DE^2 = DP^2 - \frac{25}{4}$$

$$= \left(\frac{27}{5}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

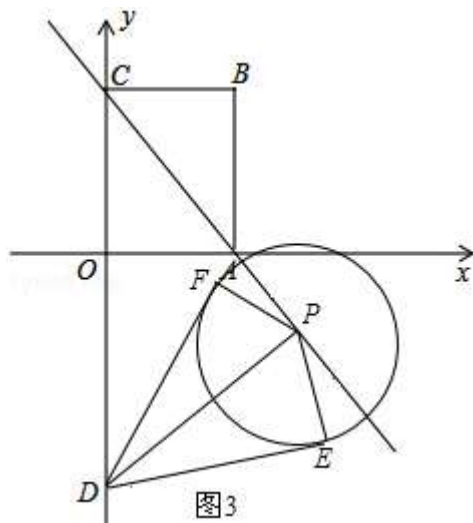
$$= \frac{2291}{100}$$

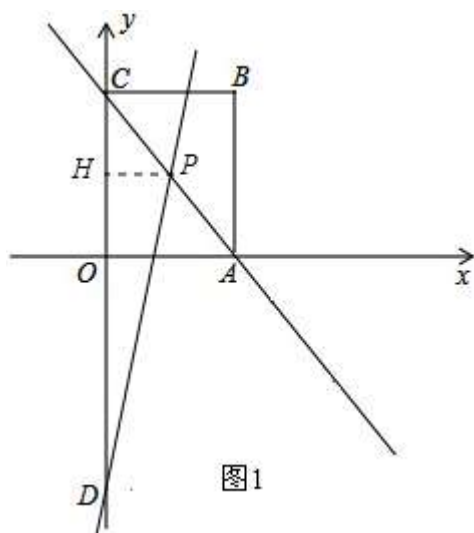
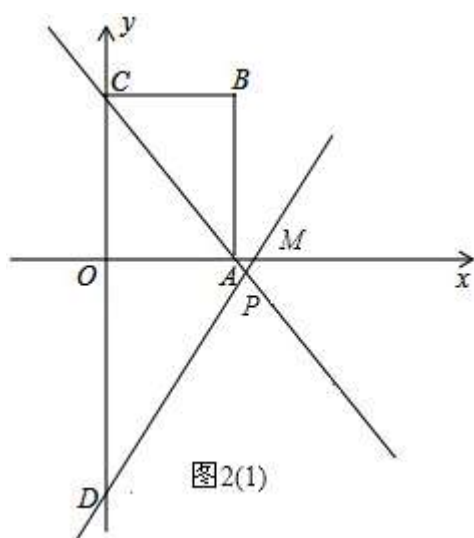
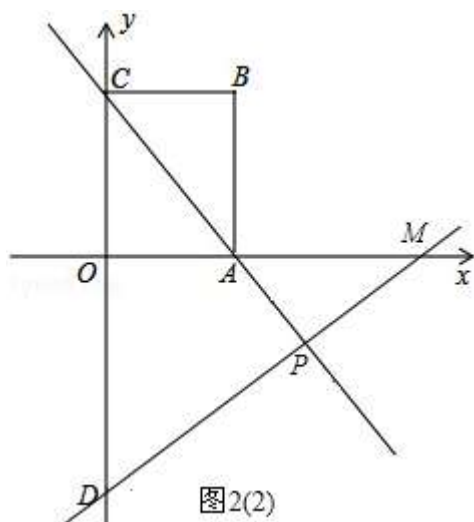
$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2291}}{10}$$

$$\therefore S_{\text{四边形 DEPF}} = DE$$

$$= \frac{\sqrt{2291}}{4}$$

$$\therefore \text{四边形 DEPF 面积的最小值为 } \frac{\sqrt{2291}}{4}$$





点评： 本题考查了相似三角形的判定与性质、用待定系数法求直线的解析式、切线长定理、勾股定理、垂线段最短等知识，考查了分类讨论的思想．将求 DE 的最小值转化为求 DP 的最小值是解决第 3 小题的关键．另外，要注意“ $\triangle DOM$  与  $\triangle ABC$  相似”与“ $\triangle DOM \sim \triangle ABC$ ”之间的区别．

