

2018 年吉林省长春市朝阳区中考一模数学

一、选择题(共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

1. 在 0, -2, $-\sqrt{2}$, 1 这四个数中, 最小的数是()

A. 0

B. -2

C. $-\sqrt{2}$

D. 1

解析: 根据有理数的大小比较法则比较大小, 再得出选项即可.

$$-2 < -\sqrt{2} < 0 < 1,$$

最小的数是-2.

答案: B

2. 据国家统计局统计, 我国 2017 年全年的棉花总产量约为 5490000 吨. 将 5490000 这个数用科学记数法表示为()

A. 5.49×10^6

B. 54.9×10^6

C. 5.49×10^7

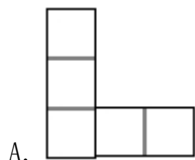
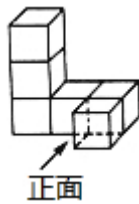
D. 0.549×10^7

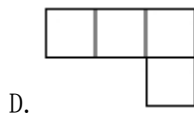
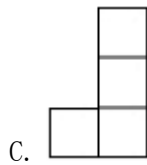
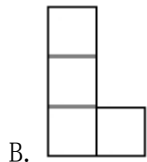
解析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

将 5490000 用科学记数法表示为: 5.49×10^6 .

答案: A

3. 如图, 用 6 个完全相同的小正方体组成的立体图形, 它的俯视图是()





解析：根据俯视图是从上边看得到的图形，可得答案.

从上边看第一列是一个小正方形，第二列是一个小正方形，第三列是两个小正方形，

答案：D

4. a^6 可以表示为 ()

A. $6a$

B. $a^2 \cdot a^3$

C. $(a^3)^2$

D. $a^{12} \div a^2$

解析：根据同底数幂的乘法、幂的乘方、同底数幂的除法分别计算可得.

A、 $6a$ 表示 $6 \times a$ ，此选项不符合题意；

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，此选项不符合题意；

C、 $(a^3)^2 = a^6$ ，此选项符合题意；

D、 $a^{12} \div a^2 = a^{10}$ ，此选项不符合题意.

答案：C

5. 小明拿 40 元钱购买雪糕和矿泉水，已知每瓶矿泉水 2 元，每支雪糕 1.5 元，他买了 5 瓶矿泉水， x 支雪糕，则所列关于 x 的不等式正确的是 ()

A. $2x + 1.5 \times 5 < 40$

B. $2x + 1.5 \times 5 \leq 40$

C. $2 \times 5 + 1.5x \geq 40$

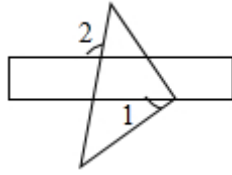
D. $2 \times 5 + 1.5x \leq 40$

解析：根据“矿泉水的单价 \times 矿泉水的数量 + 雪糕的单价 \times 雪糕的数量 ≤ 40 元钱”可得不等式.

根据题意，可列不等式 $2 \times 5 + 1.5x \leq 40$.

答案：D

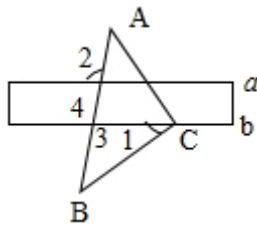
6. 等腰直角三角尺与直尺按如图位置摆放，且三角尺在直角顶点在直尺的一边上. 若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 95°
- B. 100°
- C. 105°
- D. 110°

解析：根据等腰直角三角形得出 $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=\angle B=45^\circ$ ，根据三角形内角和求出 $\angle 3$ ，根据对顶角和平行线性质求出 $\angle 2=\angle 3$ 即可。

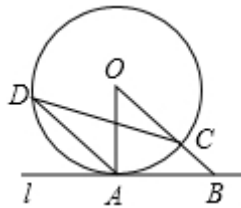
如图：



$\because \triangle ACB$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore \angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=\angle B=45^\circ$ ，
 $\because a \parallel b$ ，
 $\therefore \angle 2=\angle 4$
 $\because \angle 3=\angle 4$ ，
 $\therefore \angle 3=180^\circ - \angle 1 - \angle B=180^\circ - 35^\circ - 45^\circ = 100^\circ$ ，
 $\therefore \angle 2=100^\circ$.

答案：B

7. 如图，直线 l 是 $\odot O$ 的切线，点 A 为切点， B 为直线 l 上一点，连接 OB 交 $\odot O$ 于点 C ， D 是优弧 AC 上一点，连接 AD 、 CD 。若 $\angle ABO=40^\circ$ 。则 $\angle D$ 的大小是（ ）



- A. 50°
- B. 40°
- C. 35°
- D. 25°

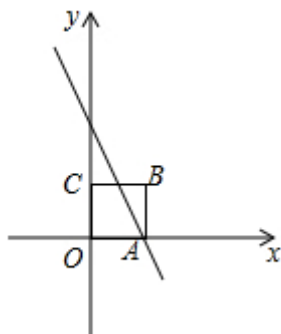
解析：先根据切线的性质得到 $\angle OAB=90^\circ$ ，再利用互余计算出 $\angle AOB=50^\circ$ ，然后根据圆周角定理求解。

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线，
 $\therefore OA \perp AB$ ，
 $\therefore \angle OAB=90^\circ$ ，

$$\begin{aligned} \because \angle B &= 38^\circ, \\ \therefore \angle AOB &= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ, \\ \therefore \angle D &= \frac{1}{2} \angle AOB = 25^\circ. \end{aligned}$$

答案：D

8. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 OABC 的边 OA 在 x 轴的正半轴上，OC 在 y 轴的正半轴上，一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 A，且与边 BC 有交点，若正方形的边长为 2，则 k 的值不可能是 ()



- A. -2
- B. $-\frac{3}{2}$
- C. -1
- D. $-\frac{1}{2}$

解析：根据题意可以得到点 A、B、C 的坐标，从而可以得到关于 k 的不等式，从而可以求得 k 的取值范围，本题得以解决.

由题意可得，

点 A 的坐标为 (2, 0)，点 C 的坐标为 (0, 2)，点 B 的坐标为 (2, 2)，

\because 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 A，且与边 BC 有交点，

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2k + b \\ b \geq 2 \end{cases},$$

解得， $k \leq -1$.

答案：D

二、填空题(共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

9. 函数 $y = \frac{2018}{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

解析：根据分式有意义的条件：分式的分母不能为 0 即可列不等式求解.

根据题意得 $x-1 \neq 0$,

解得： $x \neq 1$.

答案： $x \neq 1$

10. 一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 的根的判别式的值是_____.

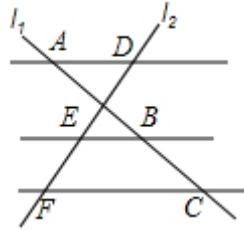
解析: 根据根的判别式等于 b^2-4ac , 代入求值即可.

$$\because a=1, b=-3, c=1,$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 1\times 1=5.$$

答案: 5

11. 如图, $AD\parallel BE\parallel CF$, 直线 l_1, l_2 与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和点 D、E、F. 若 $AB=4.5$, $BC=3$, $EF=2$, 则 DE 的长度是_____.



解析: 根据平行线分线段成比例得到比例式, 代入数据即可得到结论.

$$\because AD\parallel BE\parallel CF,$$

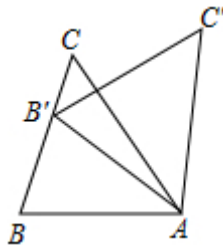
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\text{即: } \frac{4.5}{3} = \frac{DE}{2},$$

$$\therefore DE=3.$$

答案: 3

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=70^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转一定角度得到 $\triangle AB'C'$, 使点 B 的对应点 B' 恰好落在边 BC 上. 若 $AC\perp B'C'$, 则 $\angle C'$ 的大小是_____度.



解析: 首先根据旋转的性质求出 $\angle BAB'$ 的度数, 进而判断出 $\angle BAB' = \angle CAC'$, 最后利用垂直的知识求出 $\angle C'$ 的度数.

$\because \triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转一定角度得到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore AB=AB',$$

$$\therefore \angle B=\angle BB'A,$$

$$\therefore \angle BAB' = 180^\circ - \angle B - \angle BB'A,$$

$$\because \angle B=70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAB' = 40^\circ,$$

$$\because \angle BAB' + \angle B'AC = \angle BAC, \angle C'AC + \angle B'AC = \angle CAB',$$

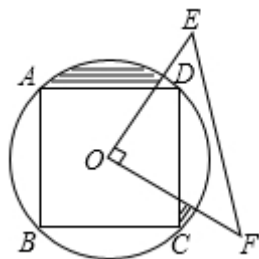
$$\therefore \angle BAB' = \angle CAC' = 40^\circ,$$

$$\because AC\perp B'C',$$

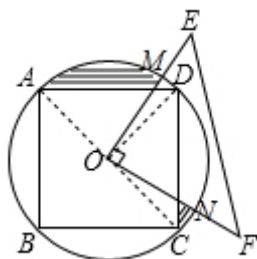
$$\therefore \angle C' = 90^\circ - \angle CAC' = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

答案：50°

13. 如图，正方形 ABCD 内接于 $\odot O$ ， $\text{Rt}\triangle OEF$ 的直角顶点与圆心 O 重合. 若 $AB=\sqrt{2}$ ，则图中阴影部分图形的面积和为_____ (结果保留 π).



解析：根据题意作出合适的辅助线，即可得到图中阴影部分图形的面积和. 连接 OD、OC、OA，如图所示：

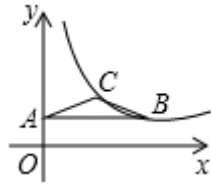


$\because \angle EOF=90^\circ$ ，四边形 ABCD 是正方形，
 $\therefore \angle DOC=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle DOM=\angle CON$ ，
 \therefore 扇形 ODM 与扇形 OCN 的圆心角相等，半径相等，则它们的面积相等，
 $\because AB=\sqrt{2}$ ， $\angle AOD=90^\circ$ ，
 $\therefore OA=OD=1$ ，
 则图中阴影部分图形的面积和就是弓形 AMD 的面积，

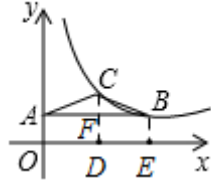
\therefore 图中阴影部分图形的面积和是： $\frac{90 \times \pi \times 1^2}{360} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

答案： $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

14. 如图，在平面直角坐标系中，等腰三角形 ABC 的顶点 A 在 y 轴上，底边 AB \parallel x 轴，顶点 B、C 在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上. 若 $AC=\sqrt{5}$ ，点 A 的纵坐标为 1，则 k 的值为_____.



解析：如图所示，过 C 作 $CD \perp x$ 轴，过 B 作 $BE \perp x$ 轴于 E，



$\because AB \parallel x$ 轴，点 A 的纵坐标为 1，

\therefore 点 B 的纵坐标为 1，

设点 B 的坐标为 $(k, 1)$ ，则点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}k, 2)$ ，

$\therefore AF = \frac{1}{2}k$ ， $CF = 2 - 1 = 1$ ，

又 $\because AC = \sqrt{5}$ ， $\angle AFC = 90^\circ$ ，

$\therefore (\frac{1}{2}k)^2 + 1 = (\sqrt{5})^2$ ，

解得 $k = \pm 4$ ，

又 $\because k > 0$ ，

$\therefore k = 4$ 。

答案：4

三、解答题(本大题 10 小题，共 78 分)

15. 先化简，再求值 $(a-1)^2 - 2a(a-1) + (2a+1)(2a-1)$ ，其中 $a = \sqrt{5}$ 。

解析：原式利用平方差公式，完全平方公式，以及单项式乘以多项式法则计算，去括号合并得到最简结果，把 a 的值代入计算即可求出值。

答案：原式 $= a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 2a + 4a^2 - 1 = 3a^2$ ，

当 $a = \sqrt{5}$ 时，原式 $= 3 \times 5 = 15$ 。

16. 在一个不透明的盒子中装有三张卡片，分别标有数字为 1，2，7，这些卡片除数字不同外其余均相同。洗匀后，小强从盒子中随机抽取一张卡片记下数字后放回，洗匀后再随机抽取一张卡片。用画树状图或列表的方法，求两次抽取的卡片上数字之和为偶数的概率。

解析：首先根据题意列表求得所有等可能的结果与抽到的两张卡片上的数字之和为偶数的情况，再利用概率公式即可求得答案。

答案：根据题意，列表如下：

	1	2	7
1	2	3	8
2	3	4	9
7	8	9	14

所以 $P(\text{两次抽取的卡片上数字之和为偶数}) = \frac{5}{9}$.

17. 某同学准备购买笔和本子送给农村希望小学的同学，在市场上了解到某种本子的单价比某种笔的单价少 4 元，且用 30 元买这种本子的数量与用 50 元买这种笔的数量相同，求这种笔的单价.

解析：首先设这种笔单价为 x 元，则本子单价为 $(x-4)$ 元，根据题意可得等量关系：30 元买这种本子的数量=50 元买这种笔的数量，由等量关系可得方程，进而解答即可.

答案：设这种笔单价为 x 元.

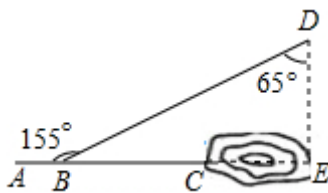
$$\text{由题意，得 } \frac{30}{x-4} = \frac{50}{x}.$$

解得 $x=10$.

经检验 $x=10$ 是原方程的解，且符合题意.

答：这种笔的单价是 10 元.

18. 为了打通抚松到万良的最近公路，在一座小山的底部打通隧道. 甲、乙两施工队按如图所示进行施工，甲施工队沿 AC 方向开山修路，乙施工队在这座小山的另一边 E 处沿射线 CA 方向同时施工. 从 AC 上的一点 B ，取 $\angle ABD=155^\circ$ ，经测得 $BD=1200\text{m}$ ， $\angle D=65^\circ$ ，求开挖点 E 与点 B 之间的距离 (结果精确到 1m). 【参考数据： $\sin 65^\circ = 0.906$ ， $\cos 65^\circ = 0.423$ ， $\tan 65^\circ = 2.145$.】



解析：先根据三角形外角的性质求出 $\angle AED$ 的度数，再根据锐角三角函数的定义即可得出结论.

答案： $\because \angle ABD=155^\circ$ ， $\angle D=65^\circ$ ，

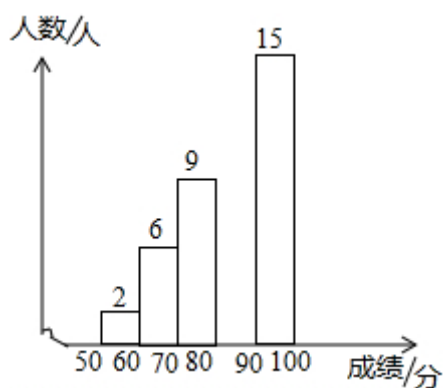
$$\therefore \angle AED=155^\circ - 65^\circ = 90^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $\angle BED=90^\circ$ ， $\sin 65^\circ = \frac{BE}{BD}$.

$$\therefore BE=BD \cdot \sin 65^\circ = 1200 \times 0.906 = 1087.2 \approx 1087\text{m}.$$

答：开挖点 E 离点 B 的距离约为 1087m.

19. 为了传承中华优秀传统文化，某校组织八年级学生参加了“汉字听写”大赛，赛后发现所有参赛学生的成绩均不低于 50 分. 为了更好地了解大赛的成绩分布情况，随机抽取了其中若干名学生的成绩(成绩 x 取整数，总分 100 分)作为样本进行整理，绘制如下不完整的条形统计图.



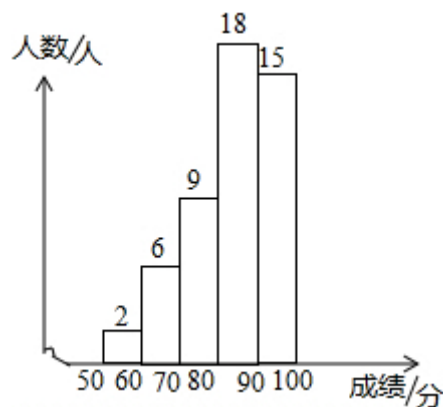
汉字听写大赛成绩分数段统计表汉字听写大赛成绩分数段条形统计图

分数段	频数
$50 \leq x < 60$	2
$60 \leq x < 70$	6
$70 \leq x < 80$	9
$80 \leq x < 90$	18
$90 \leq x \leq 100$	15

(1) 补全条形统计图.

解析：(1) 根据频数分布表补全条形图即可得.

答案：(1) 补全条形图如下：



(2) 这次抽取的学生成绩的中位数在_____的分数段中；这次抽取的学生成绩在 $60 \leq x < 70$

的分数段的人数占抽取人数的百分比是_____.

解析：(2)根据中位数的定义求解可得，将成绩在 $60 \leq x < 70$ 的分数段的人数除以总人数可得百分比.

答案：(2)∵被调查的总人数为 $2+6+9+18+15=50$ 人，而第 25、26 个数据均落在 $80 \leq x < 90$ ，
∴这次抽取的学生成绩的中位数在 $80 \leq x < 90$ 的分数段中，

这次抽取的学生成绩在 $60 \leq x < 70$ 的分数段的人数占抽取人数的百分比是 $\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$.

故答案为： $80 \leq x < 90$ ，12%.

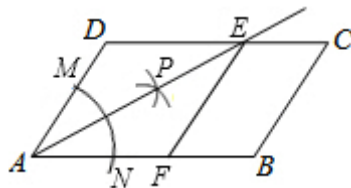
(3)若该校八年级一共有学生 350 名，成绩在 90 分以上(含 90 分)为“优”，则八年级参加这次比赛的学生中成绩“优”等的约有多少人？

解析：(3)用总人数乘以样本中 90 分以上(含 90 分)的人数所占比例可得.

答案：(3) $350 \times \frac{15}{50} = 105$.

答：该年级参加这次比赛的学生中成绩“优”等的约有 105 人.

20. 如图，在平行四边形 ABCD 中，以点 A 为圆心，以任意长为半径画圆弧，分别交边 AD、AB 于点 M、N，再分别以点 M、N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 长为半径画圆弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 CD 于点 E，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F. 求证：四边形 ADEF 是菱形.



解析：利用基本作法判定 AE 平分 $\angle BAD$ ，再根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel EF$ ，则可判断四边形 ADEF 是平行四边形，再利用 AE 平分 $\angle BAD$ 证明 $\angle AED = \angle DAE$ ，则 $AD = AE$ ，然后根据菱形的判定方法可判断四边形 ADEF 是菱形.

答案：证明：由作法得 AE 平分 $\angle BAD$ ，

∵ 四边形 ABCD 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，

∴ $DE \parallel AF$ ， $\angle AED = \angle BAE$ ，

∵ $EF \parallel BC$ ，

∴ $AD \parallel EF$ ，

∴ 四边形 ADEF 是平行四边形，

∵ AE 平分 $\angle BAD$ ，

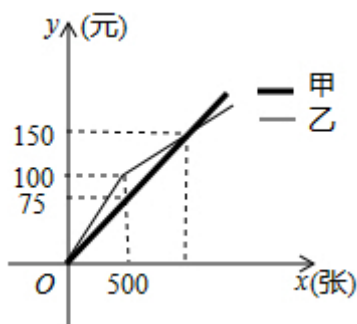
∴ $\angle DAE = \angle BAE$ ，

∴ $\angle AED = \angle DAE$ ，

∴ $AD = AE$ ，

∴ 四边形 ADEF 是菱形.

21. 某社区准备进行“为了地球，远离白色污染”的宣传活动，需要制定宣传单，选择社区附近的甲、乙两家印刷社印刷，他们各自制作这种宣传单的费 y (元)与宣传单数量 x (张)之间的函数图象如图所示，结合图象解答下列问题：



(1) 求甲印刷社制作这种宣传单每张的钱数.

解析: (1) 根据题意得出甲印刷社收费 y (元) 与印数 x (张) 的函数关系式即可.

答案: (1) $75 \div 500 = 0.15$ (元).

答: 甲印刷社制作此种宣传单每张 0.15 元.

(2) 当 $x > 500$ 时, 求乙印刷社所需的费用 y 与 x 之间的函数关系式.

解析: (2) 设乙印刷社所需的费用 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$, 代入数值解答即可.

答案: (2) 当 $x > 500$ 时, 设乙印刷社所需的费用 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$.

$\because 150 \div 0.15 = 1000$,

\therefore 直线 $y = kx + b$ 经过点 $(1000, 150)$.

由题意, 得
$$\begin{cases} 500k + b = 100 \\ 1000k + b = 150 \end{cases}$$
,

解得
$$\begin{cases} k = 0.1 \\ b = 50 \end{cases}$$
,

$\therefore y = 0.1x + 50$.

(3) 如果该社区在制作这种宣传单时, 第一次印刷了 800 张宣传单, 第二次印刷了 1200 张宣传单, 直接写出该社区两次印刷这种宣传单共花费的最少钱数.

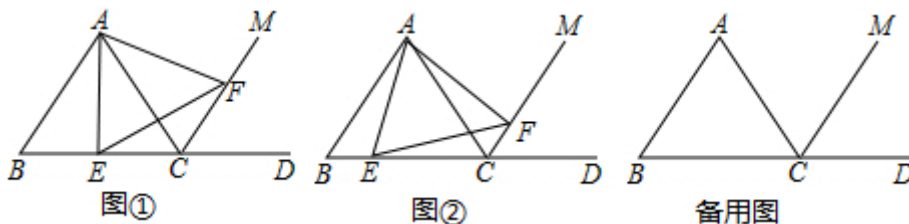
解析: (3) 计算该社区印制两次这种宣传单共花费的费用即可.

答案: (3) 该社区印制两次这种宣传单共花费最少为 290 元.

22. 【感知】如图①, $\triangle ABC$ 是等边三角形, CM 是外角 $\angle ACD$ 的平分线, E 是边 BC 中点, 在 CM 上截取 $CF = BE$, 连接 AE 、 EF 、 AF . 易证: $\triangle AEF$ 是等边三角形 (不需要证明).

【探究】如图②, $\triangle ABC$ 是等边三角形, CM 是外角 $\angle ACD$ 的平分线, E 是边 BC 上一点 (不与点 B 、 C 重合), 在 CM 上截取 $CF = BE$, 连接 AE 、 EF 、 AF . 求证: $\triangle AEF$ 是等边三角形.

【应用】将图②中的 “ E 是边 BC 上一点” 改为 “ E 是边 BC 延长线上一点”, 其他条件不变. 当四边形 $ACEF$ 是轴对称图形, 且 $AB = 2$ 时, 请借助备用图, 直接写出四边形 $ACEF$ 的周长.



解析：【探究】如图②，根据 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，可得：AE=AF，再证明 $\angle EAF=60^\circ$ ，根据有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形可得结论；

【应用】

如图③，同理得： $\triangle AEF$ 是等边三角形，根据 AF=EF，及四边形 ACEF 是轴对称图形，则 CE=AC=2，AE \perp CF，根据直角三角形 30 度角的性质和勾股定理可计算 AF 的长，各边相加可得结论.

答案：【探究】如图②， $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB=AC, \angle B=\angle ACB=60^\circ .$$

$$\therefore \angle ACD=120^\circ .$$

\because CM 是外角 $\angle ACD$ 的平分线，

$$\therefore \angle ACF = \frac{1}{2} \angle ACD = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle B = \angle ACF = 60^\circ .$$

\because CF=BE，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$.

\therefore AE=AF， $\angle BAE = \angle CAF$.

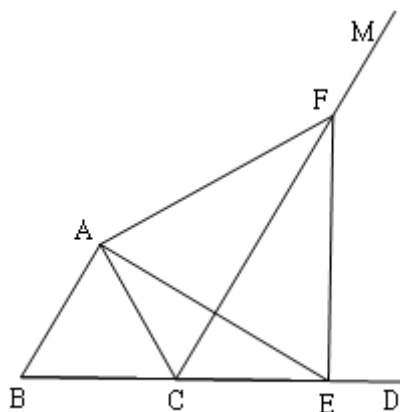
$\because \angle BAC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAF + \angle EAC$.

$\therefore \angle EAF = 60^\circ$.

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形.

【应用】如图③，



图③

同理得： $\triangle AEF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle EAF = 60^\circ, AF = EF,$$

\because 四边形 ACEF 是轴对称图形，

$$\therefore CE = AC = 2, AE \perp CF,$$

Rt $\triangle ACF$ 中， $\angle ACF = 60^\circ$ ，

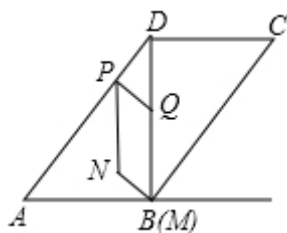
$$\therefore \angle AFC = 30^\circ,$$

$$\therefore CF = 4, AF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 ACEF 的周长} = AC + CE + AF + EF = 2AC + 2AF = 4 + 4\sqrt{3}.$$

23. 如图，BD 是 $\square ABCD$ 的对角线， $AB \perp BD$ ，BD=8cm，AD=10cm，动点 P 从点 D 出发，以 5cm/s

的速度沿 DA 运动到终点 A，同时动点 Q 从点 B 出发，沿折线 BD-DC 运动到终点 C，在 BD、DC 上分别以 8cm/s、6cm/s 的速度运动. 过点 Q 作 $QM \perp AB$ ，交射线 AB 于点 M，连接 PQ，以 PQ 与 QM 为边作 $\square PQMN$. 设点 P 的运动时间为 t (s) ($t > 0$)， $\square PQMN$ 与 $\square ABCD$ 重叠部分图形的面积为 S (cm^2).



(1) $AP = \underline{\hspace{2cm}}$ cm (同含 t 的代数式表示).

解析: (1) 先表示 $PD=t$ ，可得 $AP=10-5t$.

答案: (1) 由题意得: $PD=t$,

$\because AD=10$,

$\therefore AP=10-5t$.

故答案为: $(10-5t)$.

(2) 当点 N 落在边 AB 上时，求 t 的值.

解析: (2) 如图 1，点 N 落在边 AB 上，则 $AP=10-2t$ ， $PN=BQ=8t$ ，证明 $\triangle APN \sim \triangle ADB$ ，列比例式得方程，可得 t 的值.

答案: (2) 如图 1，点 N 落在边 AB 上，

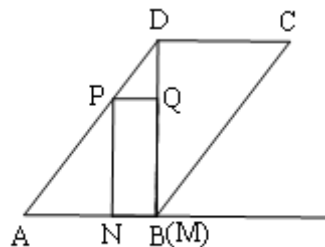


图 1

则 $AP=10-2t$ ， $PN=BQ=8t$ ，

$\because PN \parallel BD$ ，

$\therefore \triangle APN \sim \triangle ADB$ ，

$$\therefore \frac{PN}{BD} = \frac{AP}{AD} ,$$

$$\therefore \frac{8t}{8} = \frac{10-5t}{10} ,$$

$$\frac{4}{5}(10-5t) = 8t ,$$

$$\therefore t = \frac{2}{3} .$$

(3) 求 S 与 t 之间的函数关系式.

解析: (3) 分三种情况:

①当 $0 < t \leq \frac{2}{3}$ 时, 如图 2, 过点 P 作 $PE \perp BD$ 于点 E, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是 Y PQMN;

②当 $\frac{2}{3} < t \leq 1$ 时, 如图 3, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是四边形 PQMG;

③当 $1 < t \leq 2$ 时, 如图 4, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是五边形 PQHBG.

根据三角形和四边形面积和与差可得结论.

答案: (3)分三种情况:

① $0 < t \leq \frac{2}{3}$ 时, 如图 2, 过点 P 作 $PE \perp BD$ 于点 E, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是 Y PQMN,

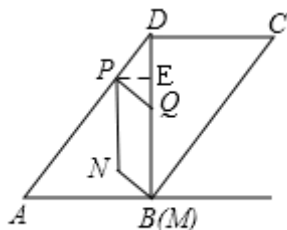


图 2

则 $PE=3t$.

$$S = BQ \cdot BE = 3t \cdot 8t = 24t^2.$$

②当 $\frac{2}{3} < t \leq 1$ 时, 如图 3, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是四边形 PQMG, 则 $BG=3t$,

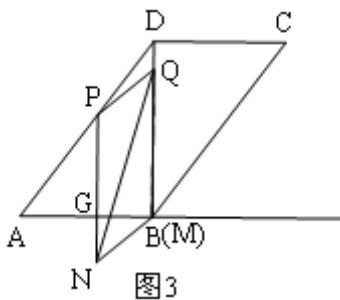


图 3

$$\sin \angle A = \frac{PG}{AP} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

$$PG = \frac{4}{5} AP = \frac{4}{5}(10 - 5t),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(PG + MQ) \cdot BG = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5}(10 - 5t) + 8t \right] \cdot 3t = 6t^2 + 12t.$$

③当 $1 < t \leq 2$ 时, 如图 4, Y PQMN 与 Y ABCD 重叠部分图形是五边形 PQHBG,

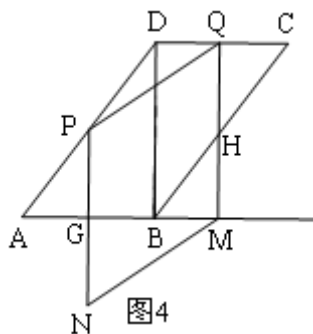


图 4

则 $PG = \frac{4}{5}(10-5t) = 8-4t$, $MQ=8$, $MG = BG + MB = 6(t-1) + 3t = 9t-6$,

$$\tan \angle HBM = \tan \angle A = \frac{HM}{BM} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore HM = \frac{4}{3}BM = \frac{4}{3}DQ = \frac{4}{3}(6t-6) = 8t-8,$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形}PQMG} - S_{\text{VHBM}} = \frac{1}{2}(PG + QM)gMG - \frac{1}{2}BM gHM$$

$$= \frac{1}{2}(9t-6)[8-4t+8] - \frac{1}{2}(6t-6)g(8t-8)$$

$$= -42t^2 + 132t - 72.$$

(4) 连结 NQ , 当 NQ 与 $\triangle ABD$ 的一边平行时, 直接写出 t 的值.

解析: (4) 分三种情况: ① 当 $NQ \parallel AD$ 时, 如图 5, 根据 $DQ = BQ = 4 = 8t$, 得结论;

② 当 $NQ \parallel AB$ 时, 如图 6, 根据 $PN = BQ = 8t$, 列方程为: $8t + 8t = 8 - 4t$, 得结论;

③ 如图 7, 当 Q 与 C 重合, P 与 A 重合时, $t=2$.

答案: (4) ① 当 $NQ \parallel AD$ 时, 如图 5,

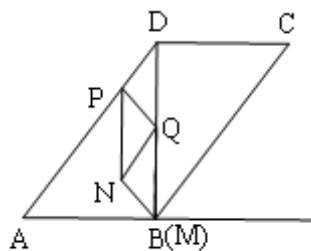


图5

$$\therefore \angle DPQ = \angle PQN = \angle QNB,$$

$$\therefore PQ = BN, \angle PQD = \angle NBQ,$$

$$\therefore \triangle DPQ \cong \triangle QNB,$$

$$\therefore DQ = BQ = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\text{即 } 8t = 4, t = \frac{1}{2}.$$

② 当 $NQ \parallel AB$ 时, 如图 6,

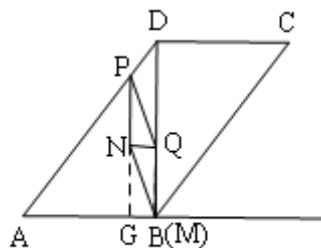


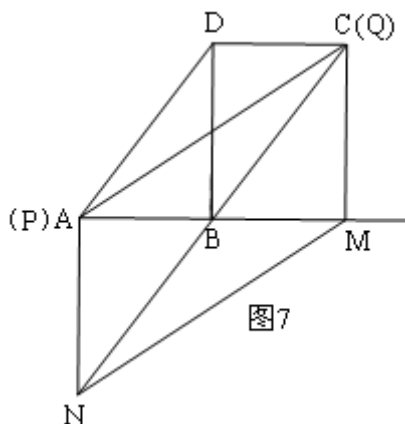
图6

延长 PN 交 AB 于 G , 则 $PG \perp AB$, 则 $PG = 8 - 4t$,

$$\therefore PN = BQ = 8t,$$

$$\therefore 8t+8t=8-4t, t=\frac{2}{5}.$$

③如图 7, 当 Q 与 C 重合, P 与 A 重合时, $t=2$,



此时, $CM=AN=8$, B 是 AM 的中点,

NC 在直线 BC 上,

$\therefore NQ \parallel AD$,

综上所述, t 的值为 $\frac{2}{5}$ 秒或 $\frac{1}{2}$ 秒或 2 秒.

24. 定义: 在平面直角坐标系中, 过抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴的交点作 y 轴的垂线, 则称这条垂线是该抛物线的伴随直线. 例如: 抛物线 $y=x^2+1$ 的伴随直线为直线 $y=1$. 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+mx+n$ 的伴随直线 l 与该抛物线交于点 A、D (点 A 在 y 轴上), 该抛物线与 x 轴的交点为 B(-1, 0) 和 C (点 C 在点 B 的右侧).

(1) 若直线 l 是 $y=2$, 求该抛物线对应的函数关系式.

解析: (1) 先确定出点 A 的坐标, 再用待定系数法即可得出结论.

答案: (1) 由题意, 得 A 的坐标为 (0, 2).

\therefore 抛物线经过点 B(-1, 0),

$$\therefore \begin{cases} n = 2 \\ -\frac{1}{2} \times (-1)^2 + m \times (-1) + n = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{3}{2}, \\ n = 2 \end{cases},$$

\therefore 该抛物线的对应的函数关系式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) 求点 D 的坐标 (用含 m 的代数式表示).

解析: (2) 将点 B 的坐标代入抛物线得出 $n=m+\frac{1}{2}$, 即可得出结论.

答案：(2) ∵ 抛物线经过点 B(-1, 0),

$$\therefore -\frac{1}{2} \times (-1)^2 + m \times (-1) + n = 0.$$

$$\therefore n = m + \frac{1}{2}.$$

将该抛物线配方, 得 $y = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2}$,

∴ 对称轴是直线 $x=m$.

∴ 点 D 的坐标为 $(2m, m + \frac{1}{2})$.

(3) 设抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 的顶点为 M, 作 OA 的垂直平分线 EF, 交 OA 于点 E, 交该抛物线的对称轴于点 F.

① 当 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形时, 求点 M 的坐标.

② 将直线 EF 沿直线 l 翻折得到直线 GH, 当点 M 到直线 GH 的距离等于点 C 到直线 EF 的距离时, 直接写出 m 的值.

解析：(3) ① 分三种情况, 建立方程求解即可得出结论.

② 先确定出直线 OA, EF, GH 的方程和顶点 M 的坐标, 进而得出点 C 到直线 EF 的距离, 点 M 到 GH 的距离, 建立方程求解即可得出结论.

答案：(3) ① 当 $m > 0$, 且 $\angle AFD = 90^\circ$ 时, 则 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形.

$$\therefore AD = 2AE,$$

$$\therefore 2m = m + \frac{1}{2},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8},$$

∴ 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{8})$,

当 $-\frac{1}{2} < m < 0$, $\angle AFD = 90^\circ$ 时, 则 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AD = 2AE,$$

$$\therefore -2m = m + \frac{1}{2},$$

$$\therefore m = -\frac{1}{6},$$

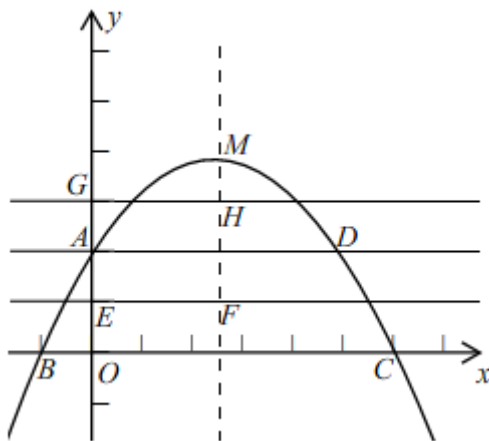
$$\therefore \text{当 } m = -\frac{1}{6} \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{25}{72},$$

∴ 点 M 的坐标为 $(-\frac{1}{6}, \frac{25}{72})$,

当 $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$ 时, $EF > AE$. 此时 $\triangle ADF$ 不是等腰直角三角形,

综上所述, 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{8})$ 或 $(-\frac{1}{6}, \frac{25}{72})$.

②如图所示:



由(2)知, $n = m + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}(x - m)^2 + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2}$,

$\therefore M(m, \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2})$,

\therefore 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 的伴随直线 $l: y = m + \frac{1}{2}$,

$\therefore EF$ 是 OA 的垂直平分线,

\therefore 直线 $EF: y = \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$,

\therefore 点 C 到直线 EF 的距离为 $\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$,

\therefore 将直线 EF 沿直线 l 翻折得到直线 GH ,

\therefore 直线 $GH: y = m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}m + \frac{3}{4}$,

$\therefore M(m, \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2})$,

\therefore 点 M 到直线 GH 的距离为 $\left| \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}m + \frac{3}{4} \right) \right| = \left| \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4} \right|$,

\therefore 点 M 到直线 GH 的距离等于点 C 到直线 EF 的距离,

$\therefore \left| \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$,

$\therefore m = 0$ 或 $m = 1 + \sqrt{2}$ 或 $m = 1 - \sqrt{2}$.