

2016年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)数学理

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ， Z 为整数集，则 $A \cap Z$ 中元素的个数是()

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

解析：∵ $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ， Z 为整数集，

∴ $A \cap Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap Z$ 中元素的个数是 5.

答案：C.

2. 设 i 为虚数单位，则 $(x+i)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为()

- A. $-15x^4$
- B. $15x^4$
- C. $-20ix^4$
- D. $20ix^4$

解析： $(x+i)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为 $C_6^4 x^4 \cdot i^2 = -15x^4$.

答案：A

3. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有的点()

- A. 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- B. 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
- D. 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

解析：把函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得函数 $y = \sin 2(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象.

答案：D.

4. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数，其中奇数的个数为()

- A. 24
- B. 48
- C. 60
- D. 72

解析：要组成无重复数字的五位奇数，则个位只能排 1, 3, 5 中的一个数，共有 3 种排法，

然后还剩 4 个数，剩余的 4 个数可以在十位到万位 4 个位置上全排列，共有 $A_4^4=24$ 种排法。

由分步乘法计数原理得，由 1、2、3、4、5 组成的无重复数字的五位数中奇数有 $3 \times 24=72$ 个。

答案：D

5. 某公司为激励创新，计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是()

(参考数据： $\lg 1.12=0.05$ ， $\lg 1.3=0.11$ ， $\lg 2=0.30$)

- A. 2018 年
- B. 2019 年
- C. 2020 年
- D. 2021 年

解析：设第 n 年开始超过 200 万元，

$$\text{则 } 130 \times (1+12\%)^{n-2015} > 200,$$

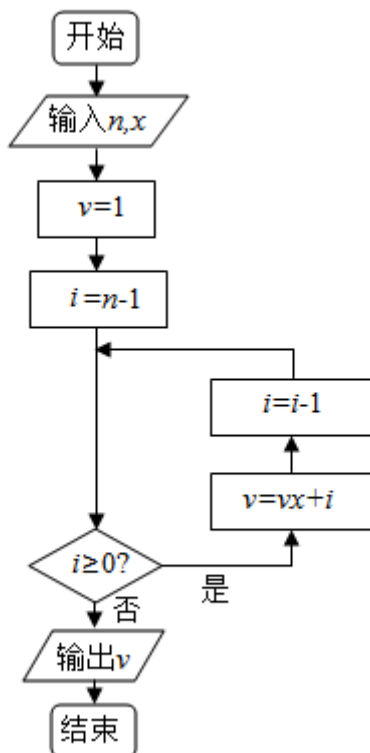
$$\text{化为: } (n-2015) \lg 1.12 > \lg 2 - \lg 1.3,$$

$$n-2015 > \frac{0.30-0.11}{0.05} = 3.8. \text{ 取 } n=2019.$$

因此开始超过 200 万元的年份是 2019 年。

答案：B.

6. 秦九韶算法求某多项式值的一个实例，若输入 n, x 的值分别为 3, 2, 则输出 v 的值为()



- A. 9
- B. 18

C. 20

D. 35

解析：初始值 $n=3$, $x=2$, 程序运行过程如下所示：

$v=1$

$i=2$ $v=1 \times 2+2=4$

$i=1$ $v=4 \times 2+1=9$

$i=0$ $v=9 \times 2+0=18$

$i=-1$ 跳出循环，输出 v 的值为 18.

答案：B

7. 设 p : 实数 x, y 满足 $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2$, q : 实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x-1, \\ y \geq 1-x, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 则 p 是 q 的 ()

A. 必要不充分条件

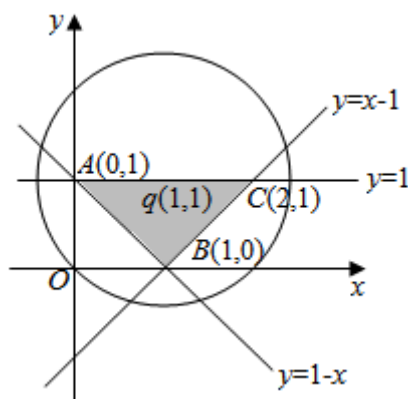
B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析： $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ 表示以 $(1, 1)$ 为圆心，以 2 为半径的圆内区域(包括边界)；

满足 $\begin{cases} y \geq x-1, \\ y \geq 1-x, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 的可行域如图有阴影部分所示，



故 p 是 q 的必要不充分条件.

答案：A

8. 设 O 为坐标原点, P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上任意一点, M 是线段 PF 上的点, 且 $|PM|=2|MF|$, 则直线 OM 的斜率的最大值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

解析：由题意可得 $F(\frac{p}{2}, 0)$ ，设 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ ，

显然当 $y_0 < 0$ ， $k_{OM} < 0$ ；当 $y_0 > 0$ ， $k_{OM} > 0$ 。

要求 k_{OM} 的最大值，设 $y_0 > 0$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF} = (\frac{y_0^2}{6p} + \frac{p}{3}, \frac{y_0}{3})$$

$$\text{可得 } k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{3}}{\frac{y_0^2}{6p} + \frac{p}{3}} = \frac{2}{\frac{y_0}{p} + \frac{2p}{y_0}} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{y_0}{p} \cdot \frac{2p}{y_0}}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当 $y_0^2 = 2p^2$ ，取得等号。

答案：C

9. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线， l_1 与 l_2 垂直相

交于点 P ，且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B ，则 $\triangle PAB$ 的面积取值范围是 ()

A. $(0, 1)$

B. $(0, 2)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(1, +\infty)$

解析：设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($0 < x_1 < 1 < x_2$)，

当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) = -\frac{1}{x}$ ，当 $x > 1$ 时， $f'(x) = \frac{1}{x}$ ，

$$\therefore l_1 \text{ 的斜率 } k_1 = -\frac{1}{x_1}, l_2 \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{1}{x_2},$$

$$\because l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 垂直, 且 } x_2 > x_1 > 0, \therefore k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -1, \text{ 即 } x_1 x_2 = 1.$$

$$\text{直线 } l_1: y = -\frac{1}{x_1}(x-x_1) - \ln x_1, l_2: y = \frac{1}{x_2}(x-x_2) + \ln x_2.$$

取 $x=0$ 分别得到 $A(0, 1-\ln x_1), B(0, -1+\ln x_2)$ ，

$$|AB| = |1 - \ln x_1 - (-1 + \ln x_2)| = |2 - (\ln x_1 + \ln x_2)| = |2 - \ln x_1 x_2| = 2.$$

$$\text{联立两直线方程可得交点 } P \text{ 的横坐标为 } x = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |x_P| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{2}{x_1+x_2} = \frac{2}{x_1 + \frac{1}{x_1}}$$

\therefore 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 且 $0 < x_1 < 1$,

$$\therefore x_1 + \frac{1}{x_1} > 1 + 1 = 2, \text{ 则 } 0 < \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_1}} < \frac{1}{2}, \therefore 0 < \frac{2}{x_1 + \frac{1}{x_1}} < 1.$$

$\therefore \triangle PAB$ 的面积取值范围是 $(0, 1)$.

答案: A.

10. 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -2$,

动点 P, M 满足 $|AP| = 1$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是 ()

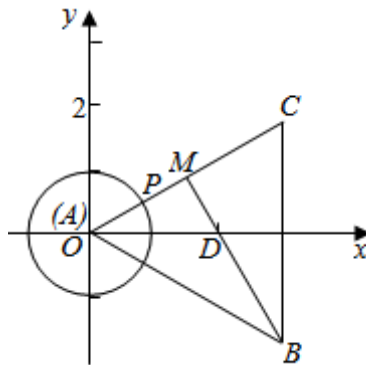
A. $\frac{43}{4}$

B. $\frac{49}{4}$

C. $\frac{37 + 6\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{37 + 2\sqrt{33}}{4}$

解析: 由 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 可得 D 为 $\triangle ABC$ 的外心,



又 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$, 可得 $\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = 0$, $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = 0$,

即 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

即有 $DB \perp AC$, $DC \perp AB$, 可得 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心,

则 D 为 $\triangle ABC$ 的中心, 即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

由 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -2$, 即有 $|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DA}| \cos 120^\circ = -2$, 解得 $|\overrightarrow{DA}| = 2$, $\triangle ABC$ 的边长为 $4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$,

以 A 为坐标原点, AD 所在直线为 x 轴建立直角坐标系 xOy,

可得 $B(3, -\sqrt{3})$, $C(3, \sqrt{3})$, $D(2, 0)$,

由 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, 可设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, ($0 \leq \theta < 2\pi$),

由 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 可得 M 为 PC 的中点, 即有 $M(\frac{3+\cos \theta}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sin \theta}{2})$,

$$\text{则 } |\overrightarrow{BM}|^2 = (3 - \frac{3+\cos \theta}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}+\sin \theta}{2} + \sqrt{3})^2 =$$

$$\frac{(3-\cos \theta)^2}{4} + \frac{(3\sqrt{3}+\sin \theta)^2}{4} = \frac{37-6\cos \theta+6\sqrt{3}\sin \theta}{4}$$

$$= \frac{37+12\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}{4},$$

当 $\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=1$, 即 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时, 取得最大值, 且为 $\frac{49}{4}$.

答案: B

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} =$ _____.

解析: $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos(2 \times \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币, 当至少有一枚硬币正面向上时, 就说这次试验成功, 则在 2 次试验中成功次数 X 的均值是 _____.

解析: \because 同时抛掷两枚质地均匀的硬币, 当至少有一枚硬币正面向上时, 就说这次试验成功,

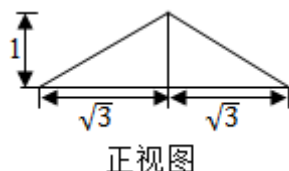
$$\therefore \text{这次试验成功的概率 } p = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{在 2 次试验中成功次数 } X \sim B(2, \frac{3}{4}),$$

∴在 2 次试验中成功次数 X 的均值 $E(X) = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

答案: $\frac{3}{2}$.

13. 已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形, 该三棱锥的正视图如图所示, 则该三棱锥的体积是_____.



解析: ∵三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形,

结合给定的三棱锥的正视图, 可得: 三棱锥的底面是底为 $2\sqrt{3}$, 高为 1,

棱锥的高为 1, 故棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1) \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 4^x$, 则 $f(-\frac{5}{2}) + f(1) =$ _____.

解析: ∵ $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期为 2 的奇函数,

$$\therefore f(-\frac{5}{2}) = f(-2 - \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}),$$

$$\because x \in (0, 1) \text{ 时, } f(x) = 4^x, \therefore f(-\frac{5}{2}) = -2,$$

∵ $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期为 2 的奇函数,

$$\therefore f(-1) = f(1), f(-1) = -f(1), \therefore f(1) = 0, \therefore f(-\frac{5}{2}) + f(1) = -2.$$

答案: -2

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x, y)$ 不是原点时, 定义 P 的“伴随点”为 $P'(\frac{y}{x^2 + y^2},$

$-\frac{x}{x^2 + y^2})$; 当 P 是原点时, 定义 P 的“伴随点”为它自身, 平面曲线 C 上所有点的“伴

随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”. 现有下列命题:

①若点 A 的“伴随点”是点 A' , 则点 A' 的“伴随点”是点 A ;

②单位圆的“伴随曲线”是它自身;

③若曲线 C 关于 x 轴对称, 则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称;

④一条直线的“伴随曲线”是一条直线.

其中的真命题是_____ (写出所有真命题的序列).

解析: ①若点 A(x, y) 的“伴随点”是点 A' ($\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}$), 则点 A' ($\frac{y}{x^2+y^2},$

$-\frac{x}{x^2+y^2}$) 的“伴随点”是点 (-x, -y), 故不正确;

②由①可知, 单位圆的“伴随曲线”是它自身, 故正确;

③若曲线 C 关于 x 轴对称, 点 A(x, y) 关于 x 轴的对称点为 (x, -y), “伴随点”是点 A'

($-\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}$), 则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称, 故正确;

④设直线方程为 $y=kx+b$ ($b \neq 0$), 点 A(x, y) 的“伴随点”是点 A' (m, n), 则

\because 点 A(x, y) 的“伴随点”是点 A' ($\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}$), $\therefore \frac{n}{m} = -\frac{x}{y}$, $\therefore x = -\frac{bn}{kn+m}$,

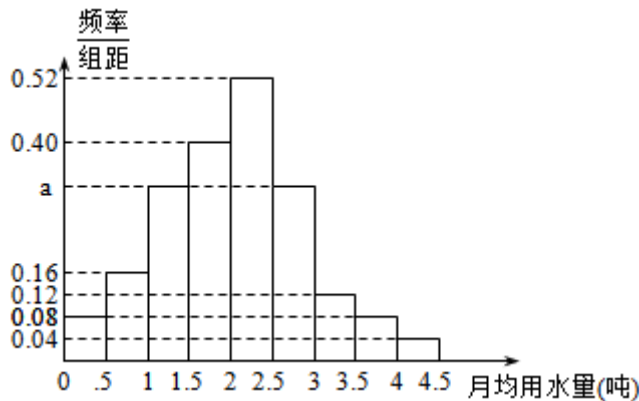
$y = \frac{bm}{kn+m}$,

$\because m = \frac{y}{x^2+y^2}$, \therefore 代入整理可得 $m^2 + n^2 - \frac{k}{b}n - 1 = 0$ 表示圆, 故不正确.

答案: ②③.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨), 一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费, 超出 x 的部分按议价收费. 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0, 0.5)$, $[0.5, 1)$, \dots , $[4, 4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.



(I) 求直方图中 a 的值;

(II) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(III) 若该市政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 x (吨), 估计 x 的值, 并说明理由.

解析: (I) 根据各组的累积频率为 1, 构造方程, 可得 a 值;

(II) 由图可得月均用水量不低于 3 吨的频率, 进而可估算出月均用水量不低于 3 吨的人数;

(II) 由图可得月均用水量低于 2.5 吨的频率及月均用水量低于 3 吨的频率, 进而可得 x 值.

答案: (I) $\because 0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.4 + 0.52 + 0.12 + 0.08 + 0.04 + 2a) = 1$,

$\therefore a = 0.3$;

(II) 由图可得月均用水量不低于 3 吨的频率为: $0.5 \times (0.12 + 0.08 + 0.04) = 0.12$,

由 $30 \times 0.12 = 3.6$ 得: 全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数约为 3.6 万;

(II) 由图可得月均用水量低于 2.5 吨的频率为: $0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.3 + 0.4 + 0.52) = 0.73 < 85\%$;

月均用水量低于 3 吨的频率为: $0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.3 + 0.4 + 0.52 + 0.3) = 0.88 > 85\%$;

则 $x = 2.5 + 0.5 \times \frac{0.85 - 0.73}{0.3 \times 0.5} = 2.9$ 吨.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

(I) 证明: $\sin A \sin B = \sin C$;

(II) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

解析: (I) 将已知等式通分后利用两角和的正弦函数公式整理, 利用正弦定理, 即可证明.

(II) 由余弦定理求出 A 的余弦函数值, 利用 (I) 的条件, 求解 B 的正切函数值即可.

答案: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$,

\therefore 由正弦定理得: $\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin C}$,

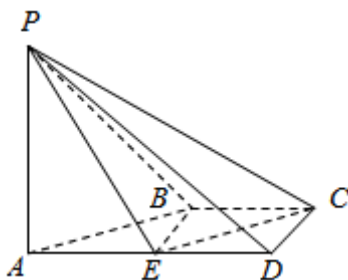
$\therefore \frac{\cos A \sin B + \cos B \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = 1$,

$\because \sin(A+B) = \sin C. \therefore$ 整理可得: $\sin A \sin B = \sin C$,

(II) $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 由余弦定理可得 $\cos A = \frac{3}{5}$.

$\sin A = \frac{4}{5}, \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3}{4}, \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin C} = 1, \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{1}{4}, \tan B = 4$.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp CD$, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD$.



(I) 在平面 PAD 内找一点 M, 使得直线 CM // 平面 PAB, 并说明理由;

(II) 若二面角 P-CD-A 的大小为 45° , 求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.

解析: (I) 延长 AB 交直线 CD 于点 M, 由点 E 为 AD 的中点, 可得 $AE=ED=\frac{1}{2}AD$, 由 $BC=CD=\frac{1}{2}AD$,

可得 $ED=BC$, 已知 $ED \parallel BC$. 可得四边形 BCDE 为平行四边形, 即 $EB \parallel CD$. 利用线面平行的判定定理证明得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE 即可.

(II) 如图所示, 由 $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, 异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° $AB \cap CD = M$, 可得 $AP \perp$ 平面 ABCD. 由 $CD \perp PD, PA \perp AD$. 因此 $\angle PDA$ 是二面角 P-CD-A 的平面角, 大小为 45° . $PA=AD$.

不妨设 $AD=2$, 则 $BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$. 可得 $P(0, 0, 2)$, $E(0, 1, 0)$, $C(-1, 2, 0)$, 利用法向量的性质、向量夹角公式、线面角计算公式即可得出.

答案: (I) 延长 AB 交直线 CD 于点 M, \because 点 E 为 AD 的中点, $\therefore AE=ED=\frac{1}{2}AD$,

$\because BC=CD=\frac{1}{2}AD$, $\therefore ED=BC$,

$\because AD \parallel BC$, 即 $ED \parallel BC$. \therefore 四边形 BCDE 为平行四边形, 即 $EB \parallel CD$.

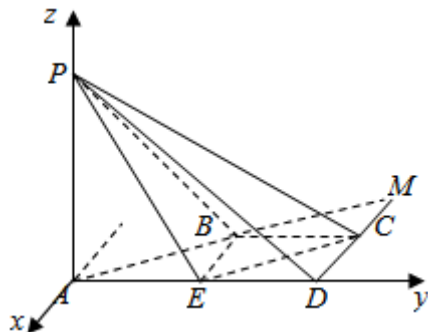
$\because AB \cap CD = M$, $\therefore M \in CD$, $\therefore CM \parallel BE$,

$\because BE \subset$ 平面 PBE, $\therefore CM \parallel$ 平面 PBE,

$\because M \in AB$, $AB \subset$ 平面 PAB,

$\therefore M \in$ 平面 PAB, 故在平面 PAB 内可以找到一点 M ($M=AB \cap CD$), 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE.

(II) 如图所示, $\because \angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, 异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° , $AB \cap CD = M$,



$\therefore AP \perp$ 平面 ABCD. $\therefore CD \perp PD, PA \perp AD$.

因此 $\angle PDA$ 是二面角 P-CD-A 的平面角, 大小为 45° . $\therefore PA=AD$.

不妨设 $AD=2$, 则 $BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$. $\therefore P(0, 0, 2)$, $E(0, 1, 0)$, $C(-1, 2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{EC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{PE} = (0, 1, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$,

设平面 PCE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \end{cases}$ 可得: $\begin{cases} y - 2z = 0, \\ -x + y = 0. \end{cases}$

令 $y=2$, 则 $x=2, z=1$, $\therefore \vec{n} = (2, 2, 1)$.

设直线 PA 与平面 PCE 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{9} \times 2} = \frac{1}{3}$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1} = qS_n$, 其中 $q > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 若 $2a_2, a_3, a_2+2$ 成等差数列, 求 a_n 的通项公式;

(II) 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率为 e_n , 且 $e_2 = \frac{5}{3}$, 证明: $e_1 + e_2 + \dots + e_n > \frac{4^n - 3^n}{3^{n-1}}$.

解析: (I) 由条件利用等比数列的定义和性质, 求得数列 $\{a_n\}$ 为首项等于 1、公比为 q 的等比数列, 再根据 $2a_2, a_3, a_2+2$ 成等差数列求得公比 q 的值, 可得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(II) 利用双曲线的定义和简单性质求得 $e_n = \sqrt{1+a_n^2}$, 根据 $e_2 = \frac{5}{3} = \sqrt{1+q^2}$, 求得 q 的值,

可得 $\{a_n\}$ 的解析式, 再利用放缩法可得 $\therefore e_n = \sqrt{1+a_n^2} > (\frac{4}{3})^{n-1}$, 从而证得不等式成立.

答案: (I) $\therefore S_{n+1} = qS_n + 1$ ①, \therefore 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = qS_{n-1} + 1$ ②, 两式相加可得 $a_{n+1} = q \cdot a_n$, 即从第二项开始, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q .

当 $n=1$ 时, \therefore 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, $\therefore a_1 + a_2 = S_2 = q \cdot a_1 + 1$, $\therefore a_2 = q = a_1 \cdot q$,

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q .

$\therefore 2a_2, a_3, a_2+2$ 成等差数列,

$\therefore 2q + q + 2 = 2q^2$, 求得 $q=2$, 或 $q = -\frac{1}{2}$.

根据 $q > 0$, 故取 $q=2$, $\therefore a_n = 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(II) 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率为 e_n , $\therefore e_n = \frac{\sqrt{1+a_n^2}}{1} = \sqrt{1+a_n^2}$.

由于数列 $\{a_n\}$ 为首项等于 1、公比为 q 的等比数列,

$\therefore e_2 = \frac{5}{3} = \sqrt{1+a_2^2} = \sqrt{1+q^2}$, $q = \frac{4}{3}$,

$\therefore a_n = (\frac{4}{3})^{n-1}$, $\therefore e_n = \sqrt{1+a_n^2} = \sqrt{1+(\frac{4}{3})^{2n-2}} > \sqrt{(\frac{4}{3})^{2n-2}} = \frac{4^{n-1}}{3}$.

$\therefore e_1 + e_2 + \dots + e_n > 1 + \frac{4}{3} + (\frac{4}{3})^2 + \dots + (\frac{4}{3})^{n-1} = \frac{1 - (\frac{4}{3})^n}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{4^n - 3^n}{3^{n-1}}$, 原不等式得证.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶

点, 直线 $l: y = -x + 3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T .

(I) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标;

(II) 设 O 是坐标原点, 直线 l' 平行于 OT , 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与直线 l 交于点 P . 证明: 存在常数 λ , 使得 $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$, 并求 λ 的值.

解析: (I) 根据椭圆的短轴端点 C 与左右焦点 F_1, F_2 构成等腰直角三角形, 结合直线 l 与椭圆 E 只有一个交点,

利用判别式 $\Delta = 0$, 即可求出椭圆 E 的方程和点 T 的坐标;

(II) 设出点 P 的坐标, 根据 $l' \parallel OT$ 写出 l' 的参数方程, 代入椭圆 E 的方程中, 整理得出

方程,

再根据参数的几何意义求出 $|PT|^2$ 、 $|PA|$ 和 $|PB|$, 由 $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$ 求出 λ 的值.

答案: (I) 设短轴一端点为 $C(0, b)$, 左右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 其中 $c > 0$, 则 $c^2 + b^2 = a^2$;

由题意, $\triangle F_1F_2C$ 为直角三角形,

$$\therefore |F_1F_2|^2 = |F_1C|^2 + |F_2C|^2, \text{ 解得 } b=c = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

代人直线 $l: y = -x + 3$, 可得 $3x^2 - 12x + 18 - 2b^2 = 0$,

又直线 l 与椭圆 E 只有一个交点, 则 $\Delta = 12^2 - 4 \times 3(18 - 2b^2) = 0$, 解得 $b^2 = 3$,

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

由 $b^2 = 3$, 解得 $x = 2$, 则 $y = -x + 3 = 1$, 所以点 T 的坐标为 $(2, 1)$;

(II) 设 $P(x_0, 3 - x_0)$ 在 l 上, 由 $k_{OT} = \frac{1}{2}$, l' 平行 OT ,

$$\text{得 } l' \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = x_0 + 2t, \\ y = 3 - x_0 + t, \end{cases}$$

代人椭圆 E 中, 得 $(x_0 + 2t)^2 + 2(3 - x_0 + t)^2 = 6$, 整理得 $2t^2 + 4t + x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$;

$$\text{设两根为 } t_A, t_B, \text{ 则有 } t_A \cdot t_B = \frac{(x_0 - 2)^2}{2};$$

$$\text{而 } |PT|^2 = (\sqrt{(x_0 - 2)^2 + (3 - x_0 - 1)^2})^2 = 2(x_0 - 2)^2,$$

$$|PA| = \sqrt{[(x_0 + 2t_A) - x_0]^2 + [(3 - x_0 + t_A) - (3 - x_0)]^2} = |\sqrt{5} t_A|,$$

$$|PB| = \sqrt{[(x_0 + 2t_B) - x_0]^2 + [(3 - x_0 + t_B) - (3 - x_0)]^2} = |\sqrt{5} t_B|,$$

$$\text{且 } |PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|, \therefore \lambda = \frac{|PT|^2}{|PA| \cdot |PB|} = \frac{2(x_0 - 2)^2}{\frac{5}{2}(x_0 - 2)^2} = \frac{4}{5}, \text{ 即存在满足题意的 } \lambda \text{ 值.}$$

21. 设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立 ($e = 2.718 \dots$ 为自然对数的底数).

解析: (I) 利用导数的运算法则得出 $f'(x)$, 通过对 a 分类讨论, 利用一元二次方程与一元二次不等式的关系即可判断出其单调性;

(II) 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} - e^{1-x} = ax^2 - \ln x - \frac{1}{x} + e^{1-x} - a$, 可得 $g(1) = 0$, 从而 $g'(1) \geq 0$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$,

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F'(x) = 2a + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + e^{1-x} \geq \frac{x^3 + x - 2}{x^3} + e^{1-x}$, 可得 $F'(x)$ 在 $a \geq \frac{1}{2}$ 时恒大

于 0, 即 $F(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 单调递增. 由 $F(x) > F(1) = 2a - 1 \geq 0$, 可得 $g(x)$ 也在 $x \in (1, +\infty)$ 单调递增, 进而利用 $g(x) > g(1) = 0$, 可得 $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒大于 0, 综合可得 a 所有可能取值.

答案: (I) 由题意, $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$, $x > 0$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $2ax^2 - 1 \leq 0$, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

② 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2a\left(x + \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)}{x}$, 当 $x \in (0, \sqrt{\frac{1}{2a}})$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty)$ 上单调递增.

(II) 原不等式等价于 $f(x) - \frac{1}{x} + e^{1-x} > 0$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒成立,

一方面, 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} + e^{1-x} = ax^2 - \ln x - \frac{1}{x} + e^{1-x} - a$,

只需 $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒大于 0 即可,

又 $\because g(1) = 0$, 故 $g'(x)$ 在 $x=1$ 处必大于等于 0.

令 $F(x) = g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$, $g'(1) \geq 0$, 可得 $a \geq \frac{1}{2}$.

另一方面, 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F'(x) = 2a + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + e^{1-x} \geq 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + e^{1-x} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} + e^{1-x}$,

$\because x \in (1, +\infty)$, 故 $x^3 + x - 2 > 0$, 又 $e^{1-x} > 0$, 故 $F'(x)$ 在 $a \geq \frac{1}{2}$ 时恒大于 0.

\therefore 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore F(x) > F(1) = 2a - 1 \geq 0$, 故 $g(x)$ 也在 $x \in (1, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore g(x) > g(1) = 0$, 即 $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒大于 0.

综上, $a \geq \frac{1}{2}$.