2016年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)数学理

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.设集合A={x|-2≤x≤2}，Z为整数集，则A∩Z中元素的个数是(　　)

A.3

B.4

C.5

D.6

解析：∵A={x|-2≤x≤2}，Z为整数集，

∴A∩Z={-2，-1，0，1，2}，则A∩Z中元素的个数是5.

答案：C.

2.设i为虚数单位，则$(x+i)^6$的展开式中含x^4的项为(　　)

A.$-15x^4$

B.$15x^4$

C.$-20ix^4$

D.$20ix^4$

解析：$(x+i)^6$的展开式中含x^4的项为$C_6^4x^4\cdot i^2=-15x^4$.

答案：A

3.为了得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象，只需把函数y=sin2x的图象上所有的点(　　)

A.向左平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

B.向右平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C.向左平行移动$\frac{\pi}{6}$个单位长度

D.向右平行移动$\frac{\pi}{6}$个单位长度

解析:把函数y=sin2x的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,可得函数$y=\sin2(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象.

答案：D.

4.用数字1，2，3，4，5组成没有重复数字的五位数，其中奇数的个数为(　　)

A.24

B.48

C.60

D.72

解析：要组成无重复数字的五位奇数，则个位只能排1，3，5中的一个数，共有3种排法，

然后还剩 4 个数，剩余的 4 个数可以在十位到万位 4 个位置上全排列，共有 A_4^4=24 种排法.

由分步乘法计数原理得，由 1、2、3、4、5 组成的无重复数字的五位数中奇数有 3×24=72 个.

答案：D

5.某公司为激励创新，计划逐年加大研发资金投入.若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是(　　)

(参考数据：lg1.12=0.05，lg1.3=0.11，lg2=0.30)

A.2018 年

B.2019 年

C.2020 年

D.2021 年

解析：设第 n 年开始超过 200 万元，

则 $130\times(1+12\%)^{n-2015}>200$，

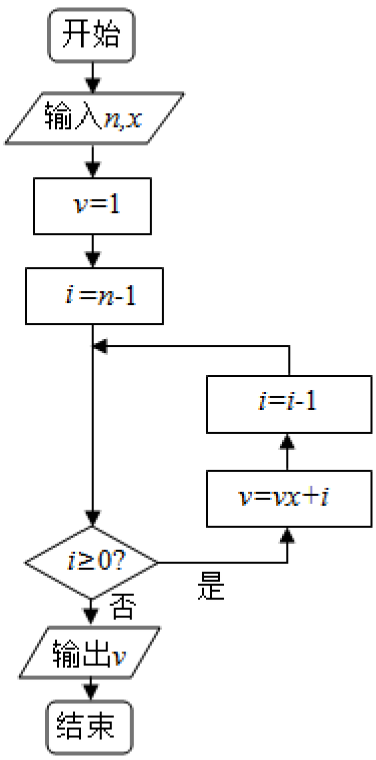
化为：$(n-2015)\lg1.12>\lg2-\lg1.3$，

$n-2015>\dfrac{0.30-0.11}{0.05}$=3.8.取 n=2019.

因此开始超过 200 万元的年份是 2019 年.

答案：B.

6.秦九韶算法求某多项式值的一个实例,若输入 n,x 的值分别为 3,2,则输出 v 的值为(　　)



A.9

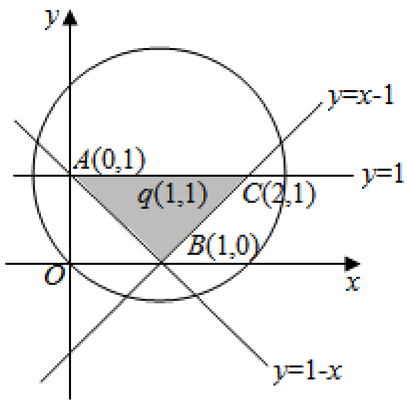
B.18

C. 20
D. 35
解析：初始值 n=3，x=2，程序运行过程如下所示：
v=1
i=2 v=1×2+2=4
i=1 v=4×2+1=9
i=0 v=9×2+0=18
i=-1 跳出循环，输出 v 的值为 18.
答案：B

7. 设 p：实数 x，y 满足 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$，q：实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\geq x-1, \\ y\geq 1-x, \\ y\leq 1, \end{cases}$ 则 p 是 q 的(　　)

A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
解析：$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$ 表示以(1，1)为圆心，以 2 为半径的圆内区域(包括边界)；

满足 $\begin{cases} y\geq x-1, \\ y\geq 1-x, \\ y\leq 1, \end{cases}$ 的可行域如图有阴影部分所示，



故 p 是 q 的必要不充分条件.
答案：A

8. 设 O 为坐标原点，P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上任意一点，M 是线段 PF 上的点，且|PM|=2|MF|，则直线 OM 的斜率的最大值为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

解析：由题意可得 F($\dfrac{p}{2}$，0)，设 P($\dfrac{{y_0}^2}{2p}$，y0)，

显然当 y_0<0，k_{OM}<0；当 y_0>0，k_{OM}>0.
要求 k_{OM}的最大值，设 y_0>0，

则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{OF}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{OF}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OF}=\left(\dfrac{{y_0}^2}{6p}+\dfrac{p}{3}，\dfrac{y_0}{3}\right)$

可得 $k_{OM}=\dfrac{\frac{y_0}{3}}{\frac{{y_0}^2}{6p}+\frac{p}{3}}=\dfrac{2}{\frac{y_0}{p}+\frac{2p}{y_0}}\le\dfrac{2}{2\sqrt{\frac{y_0}{p}\cdot\frac{2p}{y_0}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 ${y_0}^2=2p^2$，取得等号.
答案：C

9. 设直线 l_1，l_2分别是函数 f(x)=$\begin{cases}-\ln x, 0<x<1,\\ \ln x，x>1,\end{cases}$ 图象上点 P_1，P_2处的切线，l_1与 l_2垂直相交于点 P，且 l_1，l_2分别与 y 轴相交于点 A，B，则△PAB 的面积的取值范围是(　　)
A. (0，1)
B. (0，2)
C. (0，+∞)
D. (1，+∞)
解析：设 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)(0<x_1<1<x_2)$，
当 0<x<1 时，f′(x)=$-\dfrac{1}{x}$，当 x>1 时，f′(x)=$\dfrac{1}{x}$，

∴l_1的斜率 $k_1=-\dfrac{1}{x_1}$，l_2的斜率 $k_2=\dfrac{1}{x_2}$，

∵l_1与 l_2垂直，且 $x_2>x_1>0$，∴$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=-1$，即 $x_1x_2=1$.

直线 l_1：$y=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)-\ln x_1$，$l_2$：$y=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)+\ln x_2$.

取 x=0 分别得到 A(0，$1-\ln x_1$)，B(0，$-1+\ln x_2$)，
$|AB|=|1-\ln x_1-(-1+\ln x_2)|=|2-(\ln x_1+\ln x_2)|=|2-\ln x_1x_2|=2$.

联立两直线方程可得交点 P 的横坐标为 $x=\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$，

∴$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|x_P|=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{2}{x_1+\frac{1}{x_1}}$.

∵函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在(0，1)上为减函数，且 $0<x_1<1$，

∴$x_1+\frac{1}{x_1}>1+1=2$，则 $0<\frac{1}{x_1+\frac{1}{x_1}}<\frac{1}{2}$，∴$0<\frac{2}{x_1+\frac{1}{x_1}}<1$.

∴△PAB 的面积的取值范围是(0，1).

答案：A.

10.在平面内，定点 A，B，C，D 满足$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$=-2，

动点 P，M 满足|AP|=1，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，则$|\overrightarrow{BM}|^2$的最大值是(　　)

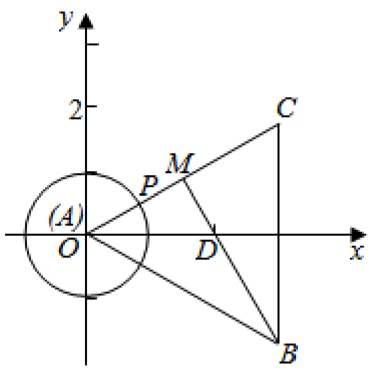
A. $\frac{43}{4}$

B. $\frac{49}{4}$

C. $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

解析：由$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，可得 D 为△ABC 的外心，



又$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$，可得$\overrightarrow{DB}\cdot\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)=0$，$\overrightarrow{DC}\cdot\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)$，

即$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

即有 DB⊥AC，DC⊥AB，可得 D 为△ABC 的垂心，

则 D 为△ABC 的中心，即△ABC 为正三角形.

由 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$=-2,即有 $\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DA}\right|$cos120° =-2,解得 $\left|\overrightarrow{DA}\right|$=2,△ABC 的边长为 4cos30° =2$\sqrt{3}$，

以 A 为坐标原点，AD 所在直线为 x 轴建立直角坐标系 xOy，

可得 B(3，-$\sqrt{3}$)，C(3，$\sqrt{3}$)，D(2，0)，

由|$\overrightarrow{AP}$|=1，可设 P(cosθ，sinθ)，(0≤θ<2π)，

由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，可得 M 为 PC 的中点，即有 M($\frac{3+\cos\theta}{2}$，$\frac{\sqrt{3}+\cos\theta}{2}$)，

则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=(3-\frac{3+\cos\theta}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+\sin\theta}{2}+\sqrt{3})^2=$

$\frac{(3-\cos\theta)^2}{4}+\frac{\left(3\sqrt{3}+\sin\theta\right)^2}{4}=\frac{37-6\cos\theta+6\sqrt{3}\sin\theta}{4}$

$=\frac{37+12\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}{4}$，

当 sin(θ-$\frac{\pi}{6}$)=1，即θ=$\frac{2\pi}{3}$时，取得最大值，且为$\frac{49}{4}$.

答案：B

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=$______________.

解析：$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos(2\times\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

12.同时抛掷两枚质地均匀的硬币，当至少有一枚硬币正面向上时，就说这次试验成功，则在 2 次试验中成功次数 X 的均值是______________.

解析:∵同时抛掷两枚质地均匀的硬币,当至少有一枚硬币正面向上时,就说这次试验成功,

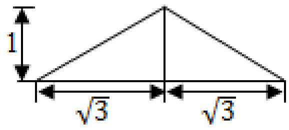
∴这次试验成功的概率 p=1-($\frac{1}{2}$)^2=$\frac{3}{4}$，

∴在 2 次试验中成功次数 X～B(2，$\frac{3}{4}$)，

∴在2次试验中成功次数X的均值$E(X)=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$.

13.已知三棱锥的四个面都是腰长为2的等腰三角形，该三棱锥的正视图如图所示，则该三棱锥的体积是______________.



正视图

解析：∵三棱锥的四个面都是腰长为2的等腰三角形，

结合给定的三棱锥的正视图，可得：三棱锥的底面是底为$2\sqrt{3}$，高为1，

棱锥的高为1，故棱锥的体积$V=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1)\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

14.已知函数f(x)是定义在R上的周期为2的奇函数，当$0<x<1$时，$f(x)=4^x$，则$f(-\frac{5}{2})+f(1)=$______________.

解析：∵f(x)是定义在R上周期为2的奇函数，

∴$f(-\frac{5}{2})=f(-2-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$，

∵$x\in(0,1)$时，$f(x)=4^x$，∴$f(-\frac{5}{2})=-2$，

∵f(x)是定义在R上周期为2的奇函数，

∴$f(-1)=f(1)$，$f(-1)=-f(1)$，∴$f(1)=0$，∴$f(-\frac{5}{2})+f(1)=-2$.

答案：-2

15.在平面直角坐标系中，当P(x，y)不是原点时，定义P的“伴随点”为$P'(\frac{y}{x^2+y^2}$，$-\frac{x}{x^2+y^2})$；当P是原点时，定义P的“伴随点“为它自身，平面曲线C上所有点的“伴随点”所构成的曲线C′定义为曲线C的“伴随曲线”.现有下列命题：

①若点A的“伴随点”是点A′，则点A′的“伴随点”是点A;

②单位圆的“伴随曲线”是它自身;

③若曲线C关于x轴对称，则其“伴随曲线”C′关于y轴对称；
④一条直线的“伴随曲线”是一条直线.
其中的真命题是__________(写出所有真命题的序列).

解析：①若点A(x，y)的“伴随点”是点A′（$\frac{y}{x^2+y^2}$，$-\frac{x}{x^2+y^2}$），则点A′（$\frac{y}{x^2+y^2}$，$-\frac{x}{x^2+y^2}$）的“伴随点”是点(-x，-y)，故不正确；

②由①可知，单位圆的“伴随曲线”是它自身，故正确；
③若曲线C关于x轴对称，点A(x，y)关于x轴的对称点为(x，-y)，“伴随点”是点A′（$-\frac{y}{x^2+y^2}$，$-\frac{x}{x^2+y^2}$），则其“伴随曲线”C′关于y轴对称，故正确；

④设直线方程为y=kx+b(b≠0)，点A(x，y)的“伴随点”是点A′(m，n)，则

∵点A(x，y)的“伴随点”是点A′（$\frac{y}{x^2+y^2}$，$-\frac{x}{x^2+y^2}$），∴$\frac{n}{m}=-\frac{x}{y}$，∴x=$-\frac{bn}{kn+m}$，

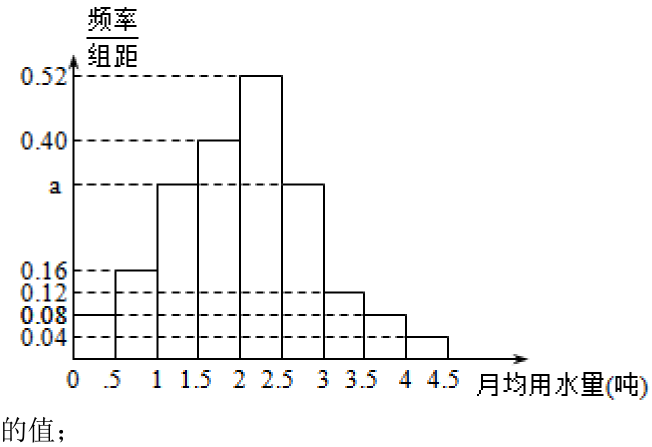
y=$\frac{bm}{kn+m}$，

∵m=$\frac{y}{x^2+y^2}$，∴代入整理可得$m^2+n^2-\frac{k}{b}n-1$=0表示圆，故不正确.

答案：②③.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.我国是世界上严重缺水的国家，某市政府为了鼓励居民节约用水，计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准x(吨)，一位居民的月用水量不超过x的部分按平价收费，超出x的部分按议价收费.为了了解居民用水情况，通过抽样，获得了某年100位居民每人的月均用水量(单位：吨)，将数据按照[0，0.5)，[0.5，1)，…，[4，4.5)分成9组，制成了如图所示的频率分布直方图.



(Ⅰ)求直方图中a的值；
(Ⅱ)设该市有30万居民，估计全市居民中月均用水量不低于3吨的人数，并说明理由；

(III)若该市政府希望使85%的居民每月的用水量不超过标准 x(吨)，估计 x 的值，并说明理由.

解析：(Ⅰ)根据各组的累积频率为1，构造方程，可得 a 值；

(Ⅱ)由图可得月均用水量不低于3吨的频率，进而可估算出月均用水量不低于3吨的人数；

(Ⅱ)由图可得月均用水量低于2.5吨的频率及月均用水量低于3吨的频率，进而可得 x 值.

答案：(Ⅰ)∵0.5×(0.08+0.16+0.4+0.52+0.12+0.08+0.04+2a)=1，

∴a=0.3；

(Ⅱ)由图可得月均用水量不低于3吨的频率为：0.5×(0.12+0.08+0.04)=0.12，

由30×0.12=3.6得：全市居民中月均用水量不低于3吨的人数约为3.6万；

(Ⅱ)由图可得月均用水量低于 2.5 吨的频率为：0.5×(0.08+0.16+0.3+0.4+0.52)=0.73＜85%；

月均用水量低于3吨的频率为：0.5×(0.08+0.16+0.3+0.4+0.52+0.3)=0.88＞85%；

则 x=2.5+0.5×$\frac{0.85-0.73}{0.3\times 0.5}$=2.9吨.

17.在△ABC中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

(Ⅰ)证明：sinAsinB=sinC；

(Ⅱ)若 $b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$，求 tanB.

解析：(Ⅰ)将已知等式通分后利用两角和的正弦函数公式整理，利用正弦定理，即可证明.

(Ⅱ)由余弦定理求出 A 的余弦函数值，利用(Ⅰ)的条件，求解 B 的正切函数值即可.

答案：(Ⅰ)在△ABC中，∵$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$，

∴由正弦定理得：$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin C}$，

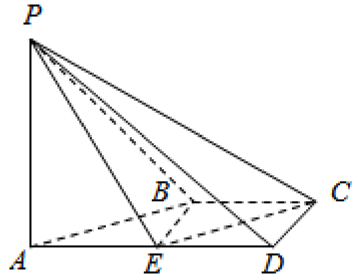
∴$\frac{\cos A\sin B+\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\sin A\sin B}=1$，

∵sin(A+B)=sinC.∴整理可得：sinAsinB=sinC，

(Ⅱ)$b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$，由余弦定理可得 cosA=$\frac{3}{5}$.

sinA= $\frac{4}{5}$，$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{3}{4}$，$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin C}$=1，$\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{1}{4}$，tanB=4.

18.如图，在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥CD，AD∥BC，∠ADC=∠PAB=90°，BC=CD=$\frac{1}{2}$AD.



(I)在平面 PAD 内找一点 M，使得直线 CM∥平面 PAB，并说明理由；
(II)若二面角 P-CD-A 的大小为 45°，求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.

解析:(I)延长 AB 交直线 CD 于点 M,由点 E 为 AD 的中点,可得 AE=ED=$\frac{1}{2}$AD,由 BC=CD=$\frac{1}{2}$AD,可得 ED=BC，已知 ED∥BC.可得四边形 BCDE 为平行四边形，即 EB∥CD.利用线面平行的判定定理证明得直线 CM∥平面 PBE 即可.

(II)如图所示，由∠ADC=∠PAB=90°，异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° AB∩CD=M，可得 AP⊥平面 ABCD.由 CD⊥PD,PA⊥AD.因此∠PDA 是二面角 P-CD-A 的平面角,大小为 45°.PA=AD.不妨设 AD=2，则 BC=CD=$\frac{1}{2}$AD=1.可得 P(0，0，2)，E(0，1，0)，C(-1，2，0)，利用法向量的性质、向量夹角公式、线面角计算公式即可得出.

答案：(I)延长 AB 交直线 CD 于点 M，∵点 E 为 AD 的中点，∴AE=ED=$\frac{1}{2}$AD，

∵BC=CD=$\frac{1}{2}$AD，∴ED=BC，

∵AD∥BC，即 ED∥BC.∴四边形 BCDE 为平行四边形，即 EB∥CD.

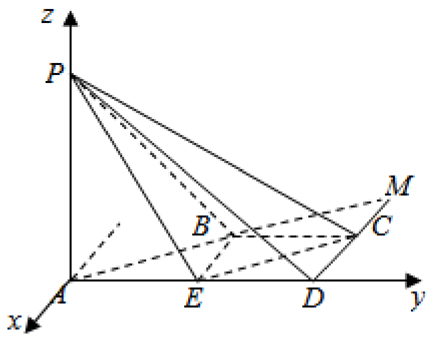
∵AB∩CD=M，∴M∈CD，∴CM∥BE，

∵BE⊂平面 PBE，∴CM∥平面 PBE，

∵M∈AB，AB⊂平面 PAB，

∴M∈平面 PAB，故在平面 PAB 内可以找到一点 M(M=AB∩CD)，使得直线 CM∥平面 PBE.

(II)如图所示，∵∠ADC=∠PAB=90°，异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90°，AB∩CD=M，



∴AP⊥平面 ABCD.∴CD⊥PD，PA⊥AD.

因此∠PDA 是二面角 P-CD-A 的平面角，大小为 45°.∴PA=AD.

不妨设 AD=2，则 BC=CD=$\frac{1}{2}$AD=1.∴P(0，0，2)，E(0，1，0)，C(-1，2，0)，

∴$\overrightarrow{EC}$=(-1，1，0)，$\overrightarrow{PE}$=(0，1，-2)，$\overrightarrow{AP}$=(0，0，2)，

设平面 PCE 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$可得：$\begin{cases}y-2z=0,\\ -x+y=0.\end{cases}$

令 y=2，则 x=2，z=1，∴$\vec{n}$=(2，2，1).

设直线 PA 与平面 PCE 所成角为θ，则 sinθ=|cos＜$\overrightarrow{AP}$，$\vec{n}$＞|=$\frac{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{9}\times 2}=\frac{1}{3}$.

19.已知数列{a_n}的首项为 1，S_n为数列{a_n}的前 n 项和，$S_{n+1}=qS_{n+1}$，其中 q＞0，n∈N^*.

(Ⅰ)若 $2a_2$，a_3，a_2+2 成等差数列，求 a_n 的通项公式；

(Ⅱ)设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{a^2{}_n}=1$ 的离心率为 e_n，且 $e_2=\frac{5}{3}$，证明：$e_1+e_2+...+e_n>\frac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$.

解析：(Ⅰ)由条件利用等比数列的定义和性质，求得数列{an}为首项等于 1、公比为 q 的等比数列，再根据 $2a_2$，a_3，a_2+2 成等差数列求得公比 q 的值，可得$\{a_n\}$的通项公式.

(Ⅱ)利用双曲线的定义和简单性质求得 $e_n=\sqrt{1+a_n{}^2}$，根据 $e_2=\frac{5}{3}=\sqrt{1+q^2}$，求得 q 的值，可得$\{a_n\}$的解析式，再利用放缩法可得∴$e_n=\sqrt{1+a_n{}^2}>(\frac{4}{3})^{n-1}$，从而证得不等式成立.

答案：(Ⅰ)∵$S_{n+1}=qS_{n+1}$①，∴当 n≥2 时，$S_n=qS_{n-1}+1$ ②，两式相加你可得 $a_{n+1}=q\cdot a_n$，
即从第二项开始，数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 q.
当 n=1 时，∵数列$\{a_n\}$的首项为 1，∴$a_1+a_2=S_2=q\cdot a_1+1$，∴$a_2=q=a_1\cdot q$，
∴数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 q.
∵$2a_2$，a_3，a_2+2 成等差数列，
∴$2q+q+2=2q^2$，求得 q=2，或 $q=-\frac{1}{2}$.
根据 q>0，故取 q=2，∴$a_n=2^{n-1}$，$n\in N^*$.

(Ⅱ)设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{a^2{}_n}=1$ 的离心率为 e_n，∴$e_n=\frac{\sqrt{1+a_n{}^2}}{1}=\sqrt{1+a_n{}^2}$.

由于数列$\{a_n\}$为首项等于 1、公比为 q 的等比数列，
∴$e_2=\frac{5}{3}=\sqrt{1+a_2{}^2}=\sqrt{1+q^2}$，$q=\frac{4}{3}$，

∴$a_n=(\frac{4}{3})^{n-1}$，∴$e_n=\sqrt{1+a_n{}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^{2n-2}}>\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{2n-2}}=\frac{4^{n-1}}{3}$.

∴$e_1+e_2+...+e_n>1+\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+\cdots+(\frac{4}{3})^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-\frac{4}{3}}=\frac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$，原不等式得证.

20.已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0)的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶点，直线 l：y=-x+3 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.
(Ⅰ)求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；
(Ⅱ)设 O 是坐标原点，直线 l′平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且与直线 l 交于点 P.证明：存在常数λ，使得$|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求λ的值.
解析：(Ⅰ)根据椭圆的短轴端点 C 与左右焦点 F_1、F_2 构成等腰直角三角形，结合直线 l 与椭圆 E 只有一个交点，
利用判别式△=0，即可求出椭圆 E 的方程和点 T 的坐标；
(Ⅱ)设出点 P 的坐标，根据 l′∥OT 写出 l′的参数方程，代人椭圆 E 的方程中，整理得出

方程，

再根据参数的几何意义求出$|PT|^2$、$|PA|$和$|PB|$，由$|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$求出λ的值.

答案：(Ⅰ)设短轴一端点为C(0，b)，左右焦点分别为$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，其中$c>0$，则$c^2+b^2=a^2$；

由题意，$\triangle F_1F_2C$为直角三角形，

∴$|F_1F_2|^2=|F_1C|^2+|F_2C|^2$，解得$b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

代入直线l：$y=-x+3$，可得$3x^2-12x+18-2b^2=0$，

又直线l与椭圆E只有一个交点，则$\triangle=12^2-4\times3(18-2b^2)=0$，解得$b^2=3$，

∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$；

由$b^2=3$，解得$x=2$，则$y=-x+3=1$，所以点T的坐标为(2，1)；

(Ⅱ)设$P(x_0，3-x_0)$在l上，由$k_{OT}=\frac{1}{2}$，l′平行OT，

得l′的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+2t,\\ y=3-x_0+t,\end{cases}$

代入椭圆E中，得$(x_0+2t)^2+2(3-x_0+t)^2=6$，整理得$2t^2+4t+x_0^2-4x_0+4=0$；

设两根为t_A，t_B，则有$t_A\cdot t_B=\frac{(x_0-2)^2}{2}$；

而$|PT|^2=\left(\sqrt{(x_0-2)^2+(3-x_0-1)^2}\right)^2=2(x_0-2)^2$，

$|PA|=\sqrt{\left[(x_0+2t_A)-x_0\right]^2+\left[(3-x_0+t_A)-(3-x_0)\right]^2}=|\sqrt{5}t_A|$，

$|PB|=\sqrt{\left[(x_0+2t_B)-x_0\right]^2+\left[(3-x_0+t_B)-(3-x_0)\right]^2}=|\sqrt{5}t_B|$，

且$|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，∴$\lambda=\frac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{2(x_0-2)^2}{\frac{5}{2}(x_0-2)^2}=\frac{4}{5}$，即存在满足题意的λ值.

21.设函数$f(x)=ax^2-a-\ln x$，其中$a\in R$.

(Ⅰ)讨论f(x)的单调性；

(Ⅱ)确定a的所有可能取值，使得$f(x)>\frac{1}{x}-e^{1-x}$在区间(1，+∞)内恒成立(e=2.718…为自然对数的底数).

解析：(I)利用导数的运算法则得出$f'(x)$，通过对a分类讨论，利用一元二次方程与一元二次不等式的关系即可判断出其单调性；

(Ⅱ)令$g(x)=f(x)-\frac{1}{x}-e^{1-x}=ax^2-\ln x-\frac{1}{x}+e^{1-x}-a$，可得$g(1)=0$，从而$g'(1)\geq0$，解得$a\geq\frac{1}{2}$，

当 a≥$\frac{1}{2}$时，F′(x)=$2a+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+e^{1-x}\geq\frac{x^3+x-2}{x^3}+e^{1-x}$，可得 F′(x)在 a≥$\frac{1}{2}$时恒大于 0，即 F(x)在 x∈(1，+∞)单调递增.由 F(x)＞F(1)=2a-1≥0，可得 g(x)也在 x∈(1，+∞)单调递增，进而利用 g(x)＞g(1)=0，可得 g(x)在 x∈(1，+∞)上恒大于 0，综合可得 a 所有可能取值.

答案：(Ⅰ)由题意，f′(x)=$2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}$，x＞0，

①当 a≤0 时，$2ax^2-1$≤0，f′(x)≤0，f(x)在(0，+∞)上单调递减.

②当 a＞0 时，f′(x)=$\frac{2a\left(x+\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)}{x}$，当 x∈(0，$\sqrt{\frac{1}{2a}}$)时，f′(x)＜0，

当 x∈($\sqrt{\frac{1}{2a}}$，+∞)时，f′(x)＞0，

故 f(x)在(0，12a)上单调递减，在($\sqrt{\frac{1}{2a}}$，+∞)上单调递增.

(Ⅱ)原不等式等价于 f(x)−$\frac{1}{x}$+e^{1-x}＞0 在 x∈(1.+∞)上恒成立，

一方面，令 g(x)=f(x)−$\frac{1}{x}$+e^{1-x}=ax^2−lnx−$\frac{1}{x}$+e^{1-x}−a，

只需 g(x)在 x∈(1.+∞)上恒大于 0 即可，

又∵g(1)=0，故 g′(x)在 x=1 处必大于等于 0.

令 F(x)=g′(x)=2ax−$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$−$e^{1-x}$，g′(1)≥0，可得 a≥$\frac{1}{2}$.

另一方面，当 a≥$\frac{1}{2}$时，F′(x)=$2a+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+e^{1-x}\geq1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+e^{1-x}=\frac{x^3+x-2}{x^3}+e^{1-x}$，

∵x∈(1，+∞)，故 x^3+x−2＞0，又 e^{1-x}＞0，故 F′(x)在 a≥$\frac{1}{2}$时恒大于 0.

∴当 a≥$\frac{1}{2}$时，F(x)在 x∈(1，+∞)单调递增.

∴F(x)＞F(1)=2a−1≥0，故 g(x)也在 x∈(1，+∞)单调递增.

∴g(x)＞g(1)=0，即 g(x)在 x∈(1，+∞)上恒大于 0.

综上，a≥$\frac{1}{2}$.