

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. $-\frac{1}{3}$ 的绝对值是()

A. -3

B. 3

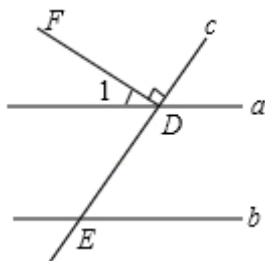
C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

解析: $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$.

答案: C

2. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 与直线 a, b 分别交于点 D, E ，射线 $DF \perp$ 直线 c ，则图中与 $\angle 1$ 互余的角有()



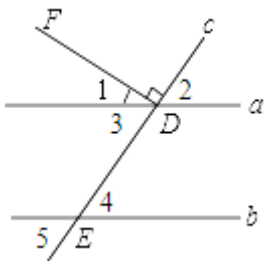
A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

解析: \because 射线 $DF \perp$ 直线 c ,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$,
 即与 $\angle 1$ 互余的角有 $\angle 2, \angle 3$,
 又 $\because a \parallel b$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 5, \angle 2 = \angle 4$,
 \therefore 与 $\angle 1$ 互余的角有 $\angle 4, \angle 5$,
 \therefore 与 $\angle 1$ 互余的角有 4 个.



答案: A.

3. 下列计算正确的是()

A. $b^3 \cdot b^3 = 2b^3$

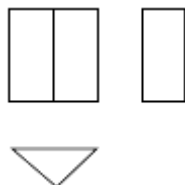
B. $(a+2)(a-2) = a^2 - 4$


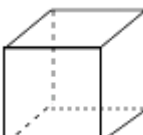


C. $(ab^2)^3 = ab^6$

D. $(8a - 7b) - (4a - 5b) = 4a - 12b$

解析：A、原式= b^6 ，不符合题意；
 B、原式= $a^2 - 4$ ，符合题意；
 C、原式= a^3b^6 ，不符合题意；
 D、原式= $8a - 7b - 4a + 5b = 4a - 2b$ ，不符合题意。
 答案：B

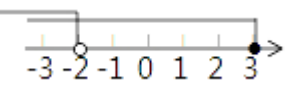
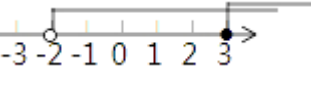
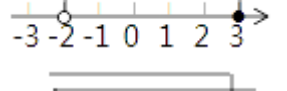
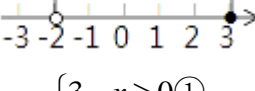
4. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体可能是（ ）



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析：根据俯视图为三角形，主视图以及左视图都是矩形，可得这个几何体为三棱柱。
 答案：C.

5. 不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x+4 > 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是（ ）

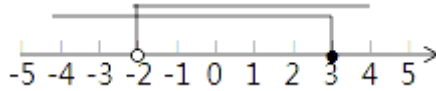
- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析： $\begin{cases} 3-x \geq 0 \text{①} \\ 2x+4 > 0 \text{②} \end{cases}$

解不等式①得， $x \leq 3$

解不等式②得， $x > -2$

在数轴上表示为：



答案：D.

6. 方程 $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$ 的解是()

A. $x = \frac{5}{3}$

B. $x = 5$

C. $x = 4$

D. $x = -5$

解析：方程的两边都乘以 $(x+3)(x-1)$ 得： $2x - 2 = x + 3$,

解方程得： $x = 5$,

经检验 $x = 5$ 是原方程的解，

所以原方程的解是 $x = 5$.

答案：B.

7. 下列说法正确的是()

A. 调查孝感区居民对创建“全国卫生城市”的知晓度，宜采用抽样调查

B. 一组数据 85, 95, 90, 95, 95, 90, 90, 80, 95, 90 的众数为 95

C. “打开电视，正在播放乒乓球比赛”是必然事件

D. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币一次，出现两个正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$

解析：A、调查孝感区居民对创建“全国卫生城市”的知晓度，宜采用抽样调查，正确；

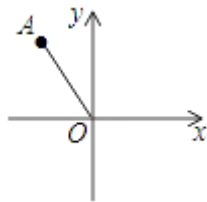
B、一组数据 85, 95, 90, 95, 95, 90, 90, 80, 95, 90 的众数为 95 和 90，故错误；

C、“打开电视，正在播放乒乓球比赛”是随机事件，故错误；

D、同时抛掷两枚质地均匀的硬币一次，出现两个正面朝上的概率为 $\frac{1}{4}$.

答案：A.

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(-1, \sqrt{3})$ ，以原点 O 为中心，将点 A 顺时针旋转 150° 得到点 A'，则点 A' 的坐标为()



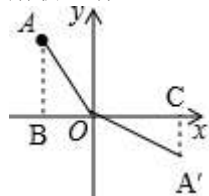
A. $(0, -2)$

B. $(1, -\sqrt{3})$

C. $(2, 0)$

D. $(\sqrt{3}, -1)$

解析：作 $AB \perp x$ 轴于点 B，



$\therefore AB = \sqrt{3}$ 、 $OB = 1$,

则 $\tan \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \angle A'OB = 30^\circ$

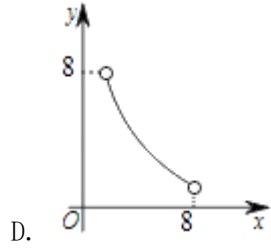
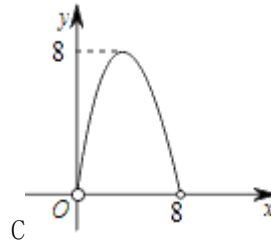
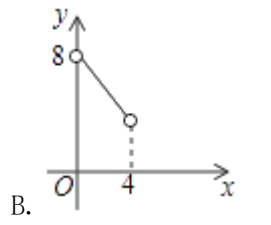
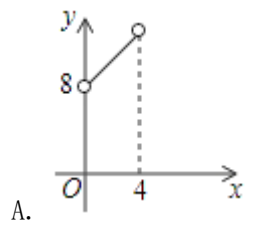
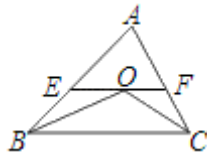
\therefore 将点 A 顺时针旋转 150° 得到点 A' 后, 如图所示,

$OA' = OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\angle A'OC = 30^\circ$,

$\therefore A'C = 1$ 、 $OC = \sqrt{3}$, 即 $A'(\sqrt{3}, -1)$.

答案: D.

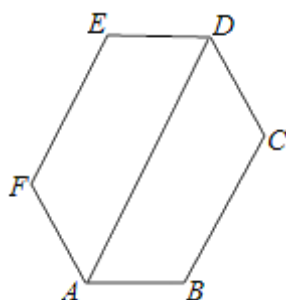
9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 连接 OB, OC, 过点 O 作 $EF \parallel BC$ 分别交 AB, AC 于点 E, F. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 8, $BC = x$, $\triangle AEF$ 的周长为 y, 则表示 y 与 x 的函数图象大致是 ()



解析: \because 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,
 $\therefore \angle ABO = \angle CBO$, $\angle ACO = \angle BCO$,
 $\because EF \parallel BC$,
 $\therefore \angle EOB = \angle CBO$, $\angle FOC = \angle BCO$,
 $\therefore \angle ABO = \angle EOB$, $\angle ACO = \angle FOC$,

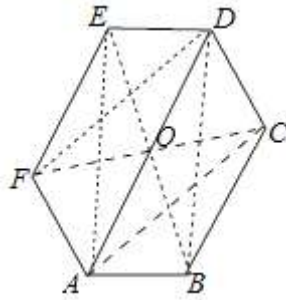
$\therefore BE=OE, CF=OF,$
 $\therefore \triangle AEF$ 的周长 $y=AE+EF+AF=AE+OE+OF+AF=AB+AC,$
 $\because \triangle ABC$ 的周长为 8, $BC=x,$
 $\therefore AB+AC=8-x,$
 $\therefore y=8-x,$
 $\because AB+AC > BC,$
 $\therefore y > x,$
 $\therefore 8-x > x,$
 $\therefore 0 < x < 4,$
 即 y 与 x 的函数关系式为 $y=8-x (x < 4),$
 答案: B.

10. 如图, 六边形 ABCDEF 的内角都相等, $\angle DAB=60^\circ,$ $AB=DE,$ 则下列结论成立的个数是 ()
 ① $AB \parallel DE;$ ② $EF \parallel AD \parallel BC;$ ③ $AF=CD;$ ④ 四边形 ACDF 是平行四边形; ⑤ 六边形 ABCDEF 既是中心对称图形, 又是轴对称图形.



- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

解析: \because 六边形 ABCDEF 的内角都相等,
 $\therefore \angle EFA=\angle FED=\angle FAB=\angle ABC=120^\circ,$
 $\because \angle DAB=60^\circ,$
 $\therefore \angle DAF=60^\circ,$
 $\therefore \angle EFA+\angle DAF=180^\circ, \angle DAB+\angle ABC=180^\circ,$
 $\therefore AD \parallel EF \parallel CB,$ 故②正确,
 $\therefore \angle FED+\angle EDA=180^\circ,$
 $\therefore \angle EDA=\angle ADC=60^\circ,$
 $\therefore \angle EDA=\angle DAB,$
 $\therefore AB \parallel DE,$ 故①正确,
 $\because \angle FAD=\angle EDA, \angle CDA=\angle BAD, EF \parallel AD \parallel BC,$
 \therefore 四边形 EFAD, 四边形 BCDA 是等腰梯形,
 $\therefore AF=DE, AB=CD,$
 $\because AB=DE,$
 $\therefore AF=CD,$ 故③正确,
 连接 CF 与 AD 交于点 O, 连接 DF、AC、AE、DB、BE.
 $\because \angle CDA=\angle DAF,$
 $\therefore AF \parallel CD, AF=CD,$
 \therefore 四边形 AFDC 是平行四边形, 故④正确,
 同法可证四边形 AEDB 是平行四边形,
 $\therefore AD$ 与 CF, AD 与 BE 互相平分,
 $\therefore OF=OC, OE=OB, OA=OD,$
 \therefore 六边形 ABCDEF 既是中心对称图形, 故⑤正确.



答案：D.

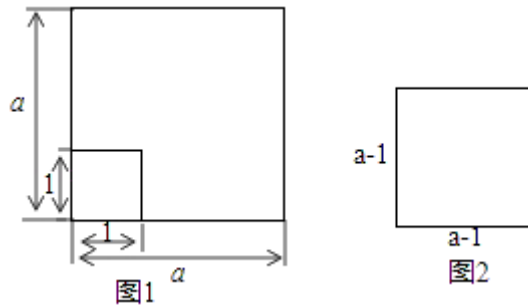
二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

11. 我国是世界上人均拥有淡水量较少的国家，全国淡水资源的总量约为 27500 亿 m^3 ，应节约用水，数 27500 用科学记数法表示为_____.

解析：27500=2.75×10⁴.

答案：2.75×10⁴.

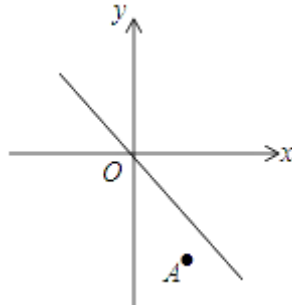
12. 如图所示，图 1 是一个边长为 a 的正方形剪去一个边长为 1 的小正方形，图 2 是一个边长为 (a - 1) 的正方形，记图 1，图 2 中阴影部分的面积分别为 S_1 ， S_2 ，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 可化简为_____.



解析： $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2 - 1}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1}$,

答案： $\frac{a+1}{a-1}$.

13. 如图，将直线 $y = -x$ 沿 y 轴向下平移后的直线恰好经过点 A(2, -4)，且与 y 轴交于点 B，在 x 轴上存在一点 P 使得 PA+PB 的值最小，则点 P 的坐标为_____.



解析：如图所示，作点 B 关于 x 轴对称的点 B'，连接 AB'，交 x 轴于 P，则点 P 即为所求，设直线 $y = -x$ 沿 y 轴向下平移后的直线解析式为 $y = -x+a$ ，

把 A(2, -4) 代入可得， $a = -2$ ，

∴ 平移后的直线为 $y = -x - 2$ ，

令 $x=0$ ，则 $y = -2$ ，即 B(0, -2)

∴ B' (0, 2),

设直线 AB' 的解析式为 $y=kx+b$,

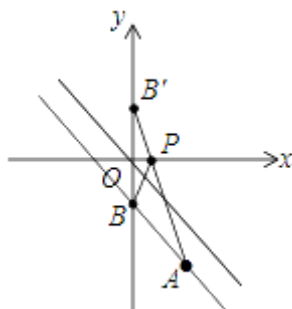
把 A(2, -4), B' (0, 2) 代入可得,

$$\begin{cases} -4 = 2k + b \\ 2 = b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -3 \\ b = 2 \end{cases},$$

∴ 直线 AB' 的解析式为 $y = -3x + 2$,

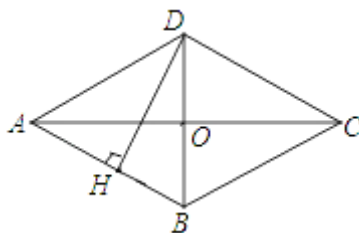
令 $y=0$, 则 $x = \frac{2}{3}$,

∴ P($\frac{2}{3}$, 0).



答案: ($\frac{2}{3}$, 0).

14. 如图, 四边形 ABCD 是菱形, $AC=24$, $BD=10$, $DH \perp AB$ 于点 H, 则线段 BH 的长为_____.



解析: ∵ 四边形 ABCD 是菱形, $AC=24$, $BD=10$,

∴ $AO=12$, $OD=5$, $AC \perp BD$,

∴ $AD=AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$,

∵ $DH \perp AB$,

∴ $AO \times BD = DH \times AB$,

∴ $12 \times 10 = 13 \times DH$,

∴ $DH = \frac{120}{13}$,

$$\therefore BH = \sqrt{10^2 - \left(\frac{120}{13}\right)^2} = \frac{50}{13}.$$

答案: $\frac{50}{13}$.

15. 已知半径为 2 的 $\odot O$ 中, 弦 $AC=2$, 弦 $AD=2\sqrt{2}$, 则 $\angle COD$ 的度数为_____.

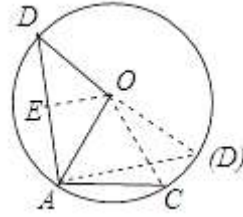
解析: 连接 OC, 过点 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E, 如图所示.

∵ $OA=OC=AC$,

∴ $\angle OAC=60^\circ$.

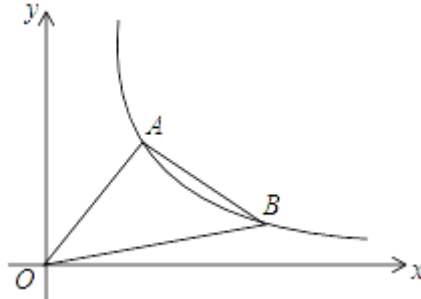
∵ $AD=2\sqrt{2}$, $OE \perp AD$,

$\therefore AE = \sqrt{2}$, $OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{2}$,
 $\therefore \angle OAD = 45^\circ$,
 $\therefore \angle CAD = \angle OAC + \angle OAD = 105^\circ$ 或 $\angle CAD = \angle OAC - \angle OAD = 15^\circ$,
 $\therefore \angle COD = 360^\circ - 2 \times 105^\circ = 150^\circ$ 或 $\angle COD = 2 \times 15^\circ = 30^\circ$.

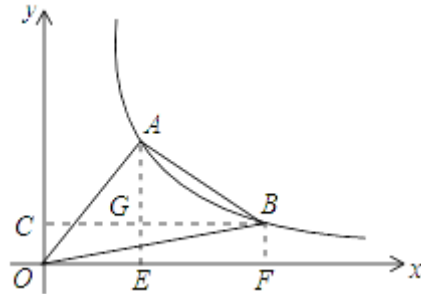


答案: 150° 或 30° .

16. 如图, 在平面直角坐标系中, $OA=AB$, $\angle OAB=90^\circ$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过 A, B 两点. 若点 A 的坐标为 $(n, 1)$, 则 k 的值为_____.



解析: 作 $AE \perp x$ 轴于 E, $BF \perp x$ 轴于 F, 过 B 点作 $BC \perp y$ 轴于 C, 交 AE 于 G, 如图所示:



则 $AG \perp BC$,
 $\because \angle OAB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OAE + \angle BAG = 90^\circ$,
 $\because \angle OAE + \angle AOE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AOE = \angle GAB$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BAG$ 中, $\begin{cases} \angle AOE = \angle GAB \\ \angle AOE = \angle AGB = 90^\circ, \\ AO = AB \end{cases}$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BAG$ (AAS),
 $\therefore OE = AG$, $AE = BG$,
 \because 点 A $(n, 1)$,
 $\therefore AG = OE = n$, $BG = AE = 1$,
 $\therefore B(n+1, 1-n)$,
 $\therefore k = n \times 1 = (n+1)(1-n)$,
 整理得: $n^2 + n - 1 = 0$,

解得： $n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (负值舍去)，

$$\therefore n = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

答案： $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

三、解答题(本大题共 8 小题，共 72 分)

17. 计算： $-2^2 + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$.

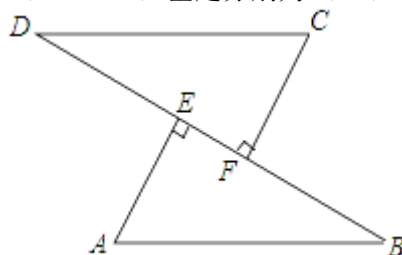
解析：根据乘方的意义、立方根的定义、特殊角的三角函数值化简计算即可.

答案：原式 $= -4 - 2 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= -4 - 2 + 1$$

$$= -5.$$

18. 如图，已知 $AB=CD$ ， $AE \perp BD$ ， $CF \perp BD$ ，垂足分别为 E ， F ， $BF=DE$ ，求证： $AB \parallel CD$.



解析：根据全等三角形的判定与性质，可得 $\angle B = \angle D$ ，根据平行线的判定，可得答案.

答案： $\because AE \perp BD$ ， $CF \perp BD$ ，

$$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\because BF = DE,$$

$$\therefore BF + EF = DE + EF,$$

$$\therefore BE = DF.$$

在 $Rt\triangle AEB$ 和 $Rt\triangle CFD$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ BE = DF \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle AEB \cong Rt\triangle CFD (HL),$$

$$\therefore \angle B = \angle D,$$

$$\therefore AB \parallel CD.$$

19. 今年四月份，某校在孝感市争创“全国文明城市”活动中，组织全体学生参加了“弘扬孝德文化，争做文明学生”的知识竞赛，赛后随机抽取了部分参赛学生的成绩，按得分划分成 A，B，C，D，E，F 六个等级，并绘制成如下两幅不完整的统计图表.

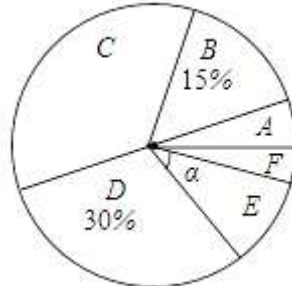
等级	得分 x (分)	频数 (人)
A	$95 \leq x \leq 100$	4
B	$90 \leq x < 95$	m
C	$85 \leq x < 90$	n
D	$80 \leq x < 85$	24
E	$75 \leq x < 80$	8

F	$70 \leq x < 75$	4
---	------------------	---

请根据图表提供的信息，解答下列问题：

(1) 本次抽样调查样本容量为____，表中： $m=$ ____， $n=$ ____；扇形统计图中，E等级对应扇形的圆心角 α 等于____度；

(2) 该校决定从本次抽取的 A 等级学生(记为甲、乙、丙、丁)中，随机选择 2 名成为学校文明宣讲志愿者，请你用列表法或画树状图的方法，求恰好抽到甲和乙的概率。



解析：(1) 由 D 等级人数及其百分比求得总人数，总人数乘以 B 等级百分比求得其人数，根据各等级人数之和等于总人数求得 n 的值，360 度乘以 E 等级人数所占比例可得；

(2) 画出树状图即可解决问题。

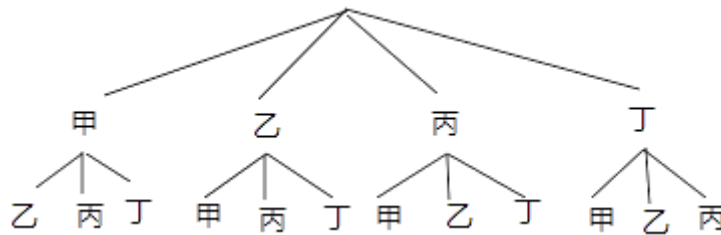
答案：(1) 本次抽样调查样本容量为 $24 \div 30\% = 80$ ，

则 $m = 80 \times 15\% = 12$ ， $n = 80 - (4 + 12 + 24 + 8 + 4) = 28$ ，

扇形统计图中，E 等级对应扇形的圆心角 $\alpha = 360^\circ \times \frac{8}{80} = 36^\circ$ ，

故答案为：80，12，8，36；

(2) 树状图如图所示，



\therefore 从四人中随机抽取两人有 12 种可能，恰好是甲和乙的有 2 种可能，

\therefore 抽取两人恰好是甲和乙的概率是 $\frac{1}{6}$ 。

20. 如图，已知矩形 ABCD ($AB < AD$)。

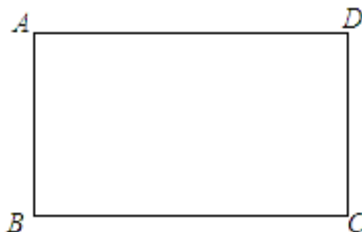
(1) 请用直尺和圆规按下列步骤作图，保留作图痕迹；

① 以点 A 为圆心，以 AD 的长为半径画弧交边 BC 于点 E，连接 AE；

② 作 $\angle DAE$ 的平分线交 CD 于点 F；

③ 连接 EF；

(2) 在 (1) 作出的图形中，若 $AB = 8$ ， $AD = 10$ ，则 $\tan \angle FEC$ 的值为____。

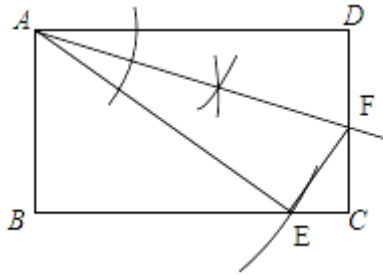


解析：(1) 根据题目要求作图即可；

(2) 由 (1) 知 $AE = AD = 10$ 、 $\angle DAF = \angle EAF$ ，可证 $\triangle DAF \cong \triangle EAF$ 得 $\angle D = \angle AEF = 90^\circ$ ，即可得 $\angle FEC =$

$\angle BAE$, 从而由 $\tan \angle FEC = \tan \angle BAE = \frac{BE}{AB}$ 可得答案.

答案: (1) 如图所示;



(2) 由 (1) 知 $AE=AD=10$ 、 $\angle DAF=\angle EAF$,

$\because AB=8$,

$\therefore BE = \sqrt{AE^2 - AB^2} = 6$,

在 $\triangle DAF$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$$\because \begin{cases} AD = AF \\ \angle DAF = \angle EAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAF \cong \triangle EAF$ (SAS),

$\therefore \angle D = \angle AEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEA + \angle FEC = 90^\circ$,

又 $\because \angle BEA + \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEC = \angle BAE$,

$\therefore \tan \angle FEC = \tan \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{4}$.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $x_1 \cdot x_2$ 满足 $3x_1 = |x_2| + 2$, 求 m 的值.

解析: (1) 根据方程的系数结合根的判别式, 即可得出 $\Delta = 20 - 4m \geq 0$, 解之即可得出结论;

(2) 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = 6$ ①、 $x_1 \cdot x_2 = m + 4$ ②, 分 $x_2 \geq 0$ 和 $x_2 < 0$ 可找出 $3x_1 = x_2 + 2$ ③或 $3x_1 = -x_2 + 2$ ④, 联立 ①③ 或 ①④ 求出 x_1, x_2 的值, 进而可求出 m 的值.

答案: (1) \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4(m+4) = 20 - 4m \geq 0$,

解得: $m \leq 5$,

$\therefore m$ 的取值范围为 $m \leq 5$.

(2) \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

$\therefore x_1 + x_2 = 6$ ①, $x_1 \cdot x_2 = m + 4$ ②.

$\because 3x_1 = |x_2| + 2$,

当 $x_2 \geq 0$ 时, 有 $3x_1 = x_2 + 2$ ③,

联立 ①③ 解得: $x_1 = 2, x_2 = 4$,

$\therefore 8 = m + 4, m = 4$;

当 $x_2 < 0$ 时, 有 $3x_1 = -x_2 + 2$ ④,

联立 ①④ 解得: $x_1 = -2, x_2 = 8$ (不合题意, 舍去).

\therefore 符合条件的 m 的值为 4.

22. 为满足社区居民健身的需要,市政府准备采购若干套健身器材免费提供给社区,经考察,劲松公司有 A, B 两种型号的健身器材可供选择.

(1) 劲松公司 2015 年每套 A 型健身器材的售价为 2.5 万元,经过连续两年降价,2017 年每套售价为 1.6 万元,求每套 A 型健身器材年平均下降率 n ;

(2) 2017 年市政府经过招标,决定年内采购并安装劲松公司 A, B 两种型号的健身器材共 80 套,采购专项经费总计不超过 112 万元,采购合同规定:每套 A 型健身器材售价为 1.6 万元,每套 B 型健身器材售价为 $1.5(1-n)$ 万元.

① A 型健身器材最多可购买多少套?

② 安装完成后,若每套 A 型和 B 型健身器材一年的养护费分别是购买价的 5% 和 15%, 市政府计划支出 10 万元进行养护,问该计划支出能否满足一年的养护需要?

解析: (1) 该每套 A 型健身器材年平均下降率 n , 则第一次降价后的单价是原价的 $(1-x)$, 第二次降价后的单价是原价的 $(1-x)^2$, 根据题意列方程解答即可.

(2) ① 设 A 型健身器材可购买 m 套, 则 B 型健身器材可购买 $(80-m)$ 套, 根据采购专项经费总计不超过 112 万元列出不等式并解答;

② 设总的养护费用是 y 元, 则根据题意列出函数 $y=1.6 \times 5\%m+1.5 \times (1-20\%) \times 15\% \times (80-m) = -0.1m+14.4$. 结合函数图象的性质进行解答即可.

答案: (1) 依题意得: $2.5(1-n)^2=1.6$,

则 $(1-n)^2=0.64$,

所以 $1-n=\pm 0.8$,

所以 $n_1=0.2=20\%$, $n_2=1.8$ (不合题意, 舍去).

答: 每套 A 型健身器材年平均下降率 n 为 20%;

(2) ① 设 A 型健身器材可购买 m 套, 则 B 型健身器材可购买 $(80-m)$ 套,

依题意得: $1.6m+1.5 \times (1-20\%) \times (80-m) \leq 112$,

整理, 得

$1.6m+96-1.2m \leq 112$,

解得 $m \leq 40$,

即 A 型健身器材最多可购买 40 套;

② 设总的养护费用是 y 元, 则

$y=1.6 \times 5\%m+1.5 \times (1-20\%) \times 15\% \times (80-m)$,

$\therefore y = -0.1m+14.4$.

$\because -0.1 < 0$,

$\therefore y$ 随 m 的增大而减小,

$\therefore m=40$ 时, y 最小.

$\therefore m=40$ 时, $y_{\text{最小值}} = -0.1 \times 40 + 14.4 = 10.4$ (万元).

又 $\because 10 \text{ 万元} < 10.4 \text{ 万元}$,

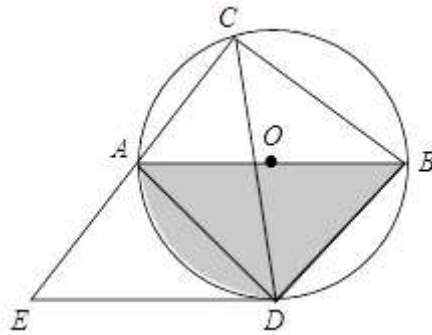
\therefore 该计划支出不能满足养护的需要.

23. 如图, $\odot O$ 的直径 $AB=10$, 弦 $AC=6$, $\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D , 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 CA 的延长线于点 E , 连接 AD , BD .

(1) 由 AB , BD , AD 围成的曲边三角形的面积是_____;

(2) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(3) 求线段 DE 的长.



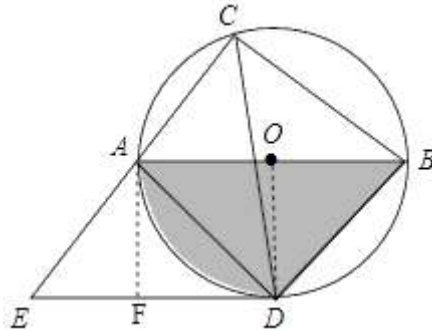
解析：(1)连接 OD，由 AB 是直径知 $\angle ACB=90^\circ$ ，结合 CD 平分 $\angle ACB$ 知 $\angle ABD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle$

$\angle ACB=45^\circ$ ，从而知 $\angle AOD=90^\circ$ ，根据曲边三角形的面积= $S_{\text{扇形}AOD}+S_{\triangle BOD}$ 可得答案；

(2)由 $\angle AOD=90^\circ$ ，即 $OD\perp AB$ ，根据 $DE\parallel AB$ 可得 $OD\perp DE$ ，即可得证；

(3)勾股定理求得 $BC=8$ ，作 $AF\perp DE$ 知四边形 AODF 是正方形，即可得 $DF=5$ ，由 $\angle EAF=90^\circ - \angle CAB=\angle ABC$ 知 $\tan\angle EAF=\tan\angle CBA$ ，即 $\frac{EF}{AF}=\frac{AC}{BC}$ ，求得 EF 的长即可得。

答案：(1)如图，连接 OD，



$\because AB$ 是直径，且 $AB=10$ ，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$ ， $AO=BO=DO=5$ ，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle ABD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD=90^\circ$ ，

则曲边三角形的面积是 $S_{\text{扇形}AOD}+S_{\triangle BOD}=\frac{90\cdot\pi\cdot 5^2}{360}+\frac{1}{2}\times 5\times 5=\frac{25}{2}+\frac{25\pi}{4}$ 。

故答案为： $\frac{25}{2}+\frac{25\pi}{4}$ ；

(2)由(1)知 $\angle AOD=90^\circ$ ，即 $OD\perp AB$ ，

$\because DE\parallel AB$ ，

$\therefore OD\perp DE$ ，

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线；

(3) $\because AB=10$ 、 $AC=6$ ，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$ ，

过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F，则四边形 AODF 是正方形，

$\therefore AF=OD=FD=5$ ，

$\therefore \angle EAF=90^\circ - \angle CAB=\angle ABC$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \tan \angle EAF &= \tan \angle CBA, \\ \therefore \frac{EF}{AF} &= \frac{AC}{BC}, \text{ 即 } \frac{EF}{5} = \frac{6}{8}, \\ \therefore EF &= \frac{15}{4}, \\ \therefore DE &= DF + EF = \frac{15}{4} + 5 = \frac{35}{4}. \end{aligned}$$

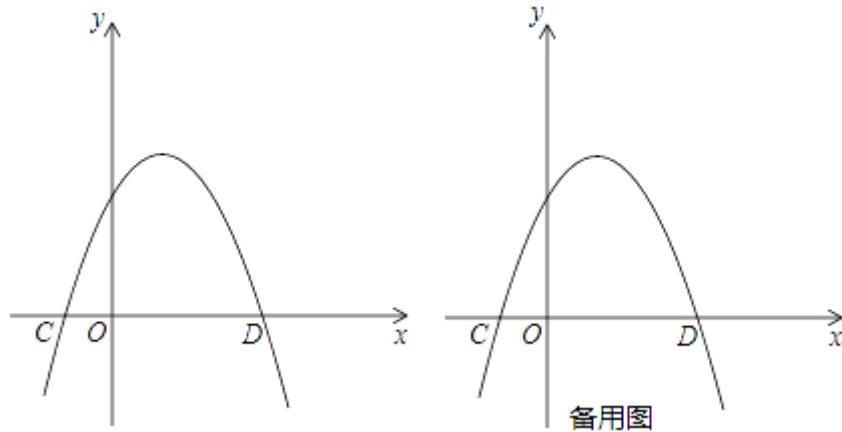
24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 规定: 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的伴随直线为 $y=a(x-h)+k$. 例如: 抛物线 $y=2(x+1)^2-3$ 的伴随直线为 $y=2(x+1)-3$, 即 $y=2x-1$.

(1) 在上面规定下, 抛物线 $y=(x+1)^2-4$ 的顶点坐标为____, 伴随直线为____, 抛物线 $y=(x+1)^2-4$ 与其伴随直线的交点坐标为____和____;

(2) 如图, 顶点在第一象限的抛物线 $y=m(x-1)^2-4m$ 与其伴随直线相交于点 A, B (点 A 在点 B 的右侧), 与 x 轴交于点 C, D.

①若 $\angle CAB=90^\circ$, 求 m 的值;

②如果点 $P(x, y)$ 是直线 BC 上方抛物线上的一个动点, $\triangle PBC$ 的面积记为 S , 当 S 取得最大值 $\frac{27}{4}$ 时, 求 m 的值.



解析: (1) 由抛物线的顶点式可求得其顶点坐标, 由伴随直线的定义可求得伴随直线的解析式, 联立伴随直线和抛物线解析式可求得其交点坐标;

(2) ①可先用 m 表示出 A、B、C、D 的坐标, 利用勾股定理可表示出 AC^2 、 AB^2 和 BC^2 , 在 $Rt\triangle ABC$ 中由勾股定理可得到关于 m 的方程, 可求得 m 的值; ②由 B、C 的坐标可求得直线 BC 的解析式, 过 P 作 x 轴的垂线交 BC 于点 Q, 则可用 x 表示出 PQ 的长, 进一步表示出 $\triangle PBC$ 的面积, 利用二次函数的性质可得到 m 的方程, 可求得 m 的值.

答案:

$$(1) \because y=(x+1)^2-4,$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } (-1, -4),$$

由伴随直线的定义可得其伴随直线为 $y=(x+1)-4$, 即 $y=x-3$,

$$\text{联立抛物线与伴随直线的解析式可得 } \begin{cases} y=(x+1)^2-4 \\ y=x-3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{其交点坐标为 } (0, -3) \text{ 和 } (-1, -4),$$

故答案为: $(-1, -4)$; $y=x-3$; $(0, -3)$; $(-1, -4)$;

$$(2) \text{①} \because \text{抛物线解析式为 } y=m(x-1)^2-4m,$$

$$\therefore \text{其伴随直线为 } y=m(x-1)-4m, \text{ 即 } y=mx-5m,$$

联立抛物线与伴随直线的解析式可得 $\begin{cases} y = m(x-1)^2 - 4m \\ y = mx - 5m \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4m \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3m \end{cases}$,

$\therefore A(1, -4m), B(2, -3m)$,

在 $y = m(x-1)^2 - 4m$ 中, 令 $y = 0$ 可解得 $x = -1$ 或 $x = 3$,

$\therefore C(-1, 0), D(3, 0)$,

$\therefore AC^2 = 4 + 16m^2, AB^2 = 1 + m^2, BC^2 = 9 + 9m^2$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ$,

$\therefore AC^2 + AB^2 = BC^2$, 即 $4 + 16m^2 + 1 + m^2 = 9 + 9m^2$, 解得 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (抛物线开口向下, 舍去) 或 $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

\therefore 当 $\angle CAB = 90^\circ$ 时, m 的值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

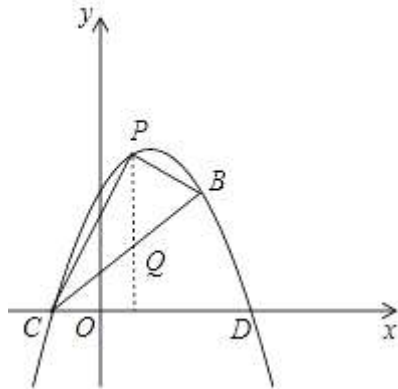
② 设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore B(2, -3m), C(-1, 0)$,

$\therefore \begin{cases} 2k + b = -3m \\ -k + b = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = -m \\ b = -m \end{cases}$,

\therefore 直线 BC 解析式为 $y = -mx - m$,

过 P 作 x 轴的垂线交 BC 于点 Q , 如图,



\therefore 点 P 的横坐标为 x ,

$\therefore P(x, m(x-1)^2 - 4m), Q(x, -mx - m)$,

$\therefore P$ 是直线 BC 上方抛物线上的一个动点,

$\therefore PQ = m(x-1)^2 - 4m + mx + m = m(x^2 - x - 2) = m \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right]$,

$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times [2 - (-1)] PQ = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{8} m$,

\therefore 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\triangle PBC$ 的面积有最大值 $-\frac{27}{8} m$,

$\therefore S$ 取得最大值 $\frac{27}{4}$ 时, 即 $-\frac{27}{8} m = \frac{27}{4}$, 解得 $m = -2$.