2018年北京市石景山区高考一模试卷数学文

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.设集合A={x|(x+1)(x-2)<0}，集合B={x|1<x<3}，则A∩B=(　　)
A.{x|-1<x<3}
B.{x|-1<x<1}
C.{x|1<x<2}
D.{x|2<x<3}
解析：A={x|-1<x<2}，∴A∩B={x|1<x<2}.
答案：C

2.下列函数中既是奇函数，又在区间(0，+∞)上是单调递减的函数为(　　)

A. $y=\sqrt{x}$

B. $y=-x^3$

C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

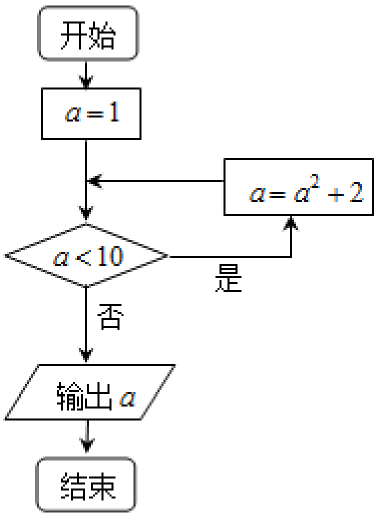
D. $y=x+\frac{1}{x}$

解析：对于A，$y=\sqrt{x}$ (x≥0)是非奇非偶的函数，不满足条件；

对于B，$y=-x^3$，是定义域R上的奇函数，且在区间(0，+∞)上是单调减函数，满足条件；
对于C，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，定义域是(0，+∞)，是非奇非偶的函数，不满足条件；

对于D，$y=x+\frac{1}{x}$，是定义域(-∞，0)∪(0，+∞)上的奇函数，但在区间(0，+∞)上不是单调减函数，也不满足题意.
答案：B

3.执行如图所示的程序框图，输出的结果是(　　)



A. 3

B. 11

C. 38

D. 123

解析：模拟程序的运行，可得 a=1，

满足条件 a＜10，执行循环体，a=3，

满足条件 a＜10，执行循环体，a=11，

不满足条件 a＜10，退出循环，输出 a 的值为 11.

答案：B

4. 设 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x+y\le 2, \\ 2x-3y\le 9, \\ x\ge 0, \end{cases}$则下列不等式恒成立的是(　　)

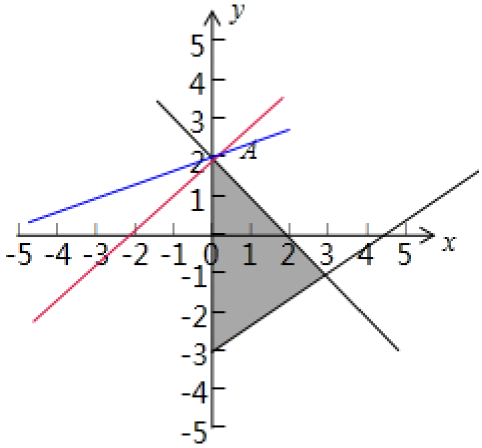
A. x⩾1

B. y⩽1

C. x-y+2⩾0

D. x-3y-6⩽0

解析：作出 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x+y\le 2, \\ 2x-3y\le 9, \\ x\ge 0, \end{cases}$对应的平面区域如图：



则 A(0，2)，

易知 x≥1，y≤1 不成立，

直线 z=x-y+2 经过 A 时取得最小值为 0，直线 z=x-3y-6 经过 A 时取得最小值为：-12，

由图象可知 x-3y-6≤0 不成立，恒成立的是 x-y+2≥0.

答案：C

5. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，若 $\left(\vec{a}+m\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则实数 m 的值为(　　)

A. 1

B. $\dfrac{3}{2}$

C. 2

D. 3

解析：$\because\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos120°=3\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3.$

$\because\left(\vec{a}+m\vec{b}\right)\perp\vec{a},\therefore\left(\vec{a}+m\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}^{2}+m\vec{a}\cdot\vec{b}=3^{2}-3m=0$，解得 m=3.

答案：D

6. “a>b>1”是“$\log_a3<\log_b3$”的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

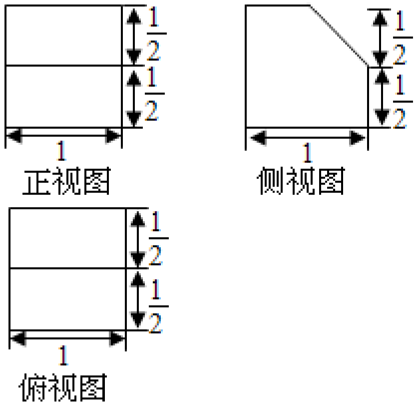
D. 既不充分也不必要条件

解析：由 $\log_a3<\log_b3$ 得 $\dfrac{1}{\log_3a}<\dfrac{1}{\log_3b}$，

若 a＞b＞1，则 $\log_3 a$＞$\log_3 b$＞0，则 $\frac{1}{\log_3 a}<\frac{1}{\log_3 b}$ 成立，即充分性成立，

若 $\log_3 a$＜0，$\log_3 b$＞0 时，满足条件，但此时 0＜a＜1，b＞1，则 a＞b＞1 不成立，
即“a＞b＞1”是“$\log_a 3$＜$\log_b 3$”的充分不必要条件.
答案：A

7.若某多面体的三视图(单位：cm)如图所示，则此多面体的体积是(　　)



A. $\frac{7}{8}$ cm^3

B. $\frac{2}{3}$ cm^3

C. $\frac{5}{6}$ cm^3

D. $\frac{1}{2}$ cm^3

解析：由三视图知几何体是一个正方体减去一个三棱柱，
正方体的棱长是 1，∴正方体的体积是 1×1×1=1，

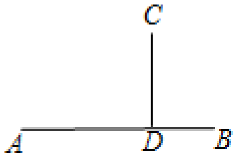
三棱柱的底面是腰长是 $\frac{1}{2}$ 的直角三角形，高是 1，

∴三棱柱的体积是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{8}$，

∴几何体的体积是 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

答案：A

8.如图，已知线段 AB 上有一动点 D(D 异于 A、B)，线段 CD⊥AB，且满足 $CD^2=\lambda$ AD·BD(λ 是大于 0 且不等于 1 的常数)，则点 C 的运动轨迹为(　　)



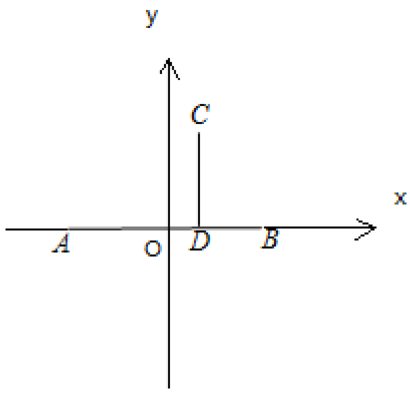
A.圆的一部分

B.椭圆的一部分

C.双曲线的一部分

D.抛物线的一部分

解析：以AB所在直线为x轴，以AB的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系，



设AB中点为O，设C(x，y)，AB=2a，则D(x，0)，A(-a，0)，B(a，0)，

∵线段CD⊥AB，且满足CD^2=λ AD·BD(λ 是大于0且不等于1的常数)，

∴y^2=λ (x+a)(x-a)=λ x^2-λ a^2，∴λ x^2+y^2=λ a^2.∴点C的运动轨迹为椭圆的一部分.

答案：B

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分.

9.复数$\frac{i^3}{1+i}=$________.

解析：$\frac{i^3}{1+i}=\frac{-i}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

答案：$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

10.双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$的焦距是__________，渐近线方程是__________.

解析：双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$中，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$,∴焦距是$2c=2\sqrt{3}$，渐近线方程是

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

答案：$2\sqrt{3}$；$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

11.若圆 C 的半径为 1，其圆心与点(1，0)关于直线 y=x 对称，则圆 C 的标准方程为_______.

解析：圆心与点(1，0)关于直线 y=x 对称，可得圆心为(0，1)，再根据半径等于 1，

可得所求的圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，

答案：$x^2+(y-1)^2=1$.

12.在△ABC 中，A=60°，AC=4，BC=$2\sqrt{3}$，则△ABC 的面积等于_______.

解析：∵△ABC 中，A=60°，AC=4，BC=$2\sqrt{3}$，

由正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，∴ $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=\dfrac{4}{\sin B}$，解得 sinB=1，∴B=90°，C=30°，

∴△ABC 的面积=$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 4\times \sin 30°=2\sqrt{3}$.

答案：$2\sqrt{3}$.

13.在等差数列$\{a_n\}$中 $a_3=0$，如果 a_k 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项，那么______.

解析：在等差数列$\{a_n\}$中，由 $a_3=0$，

得 $a_k=a_3+(k-3)d=(k-3)d$，$a_6=a_3+3d=3d$，$a_{k+6}=a_3+(k+3)d=(k+3)d$，

∵a_k 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项，

∴$a_k^2=a_6\cdot a_{k+6}$，即 $(k-3)^2d^2=3d\cdot(k+3)d$，

∵$d\neq 0$，∴$k^2=9k$，得 k=9.

答案：9

14.已知函数 f(x)= $\begin{cases}-x^2-2x, & x\le m,\\ x-4, & x>m.\end{cases}$

①当 m=0 时，函数 f(x)的零点个数为____________；

②如果函数 f(x)恰有两个零点，那么实数 m 的取值范围为____________.

解析：①令 $-x^2-2x=0$ 可得 x=-2 或 x=0，

令 x-4=0 得 x=4. ∴当 m=0 时，f(x)有 3 个零点.

②若 m<-2，则 f(x)在(-∞，m]上无零点，在(m，+∞)上有 1 个零点 x=4，不符合题意；

若-2≤m<0，则 f(x)在(-∞，m]上有 1 个零点 x=-2，在(m，+∞)上有 1 个零点 x=4，符合题意；

若 0≤m<4，则 f(x)在(-∞，m]上有 2 个零点 x=-2，x=0，在(m，+∞)上有 1 个零点 x=4，不符合题意；

若 m≥4，则 f(x)在(-∞，m]上有 2 个零点 x=-2，x=0，在(m，+∞)上无零点，符合题意；

∴-2≤m<0 或 m≥4.

答案：①3，②[-2，0)∪[4，+∞).

三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$.

(Ⅰ)求函数 f(x)的最小正周期;

(Ⅱ)求函数 f(x)在区间[$\frac{\pi}{2}$，π]上的最小值和最大值.

解析:(Ⅰ)利用二倍角公式以及两角和与差的三角函数化简函数的解析式，然后求函数 f(x)的最小正周期;

(Ⅱ)通过角的范围求解相位的范围，利用正弦函数的单调性求解函数的最值即可.

答案:(Ⅰ) $f\left(x\right)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$

$$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),$$

所以周期为 T=$\frac{2\pi}{2}$=π .

(Ⅱ)因为$\frac{\pi}{2}$≤x≤π ，所以$\frac{7\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{13\pi}{6}$.

所以当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$时，即 x=π 时，$f(x)_{max}=1$.

当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$时，即 x=$\frac{2}{3}$π 时，$f(x)_{min}=-2$.

16.等差数列{a_n}中，$a_2=4$，其前 n 项和 S_n满足 $S_n=n^2+\lambda n$($\lambda\in R$).

(Ⅰ)求实数λ 的值，并求数列{a_n}的通项公式;

(Ⅱ)若数列{$\frac{1}{S_n}$+b_n}是首项为λ 、公比为 2λ 的等比数列，求数列{b_n}的前 n 项的和 T_n.

解析:(I)利用 $a_2=S_2-S_1=4+2\lambda-1-\lambda=4$，求出λ =1，再利用数列中 a_n与 S_n关系 $a_n=S_n$，n=1，S_n-S_{n-1}，n≥2，求通项公式.

(II)求出数列{$1S_n+b_n$}的通项公式，再得出数列{b_n}的通项公式，最后根据通项公式形式选择相应方法求和.

答案:(I)因为 $a_2=S_2-S_1=4+2\lambda-1-\lambda=4$，解得λ =1，∴$S_n=n^2+n$，

当 n≥2 时，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$，

当 n=1 时，也满足，所以 $a_n=2n$.

(II)由已知数列{$\frac{1}{S_n}$+b_n}是首项为 1、公比为 2 的等比数列，

其通项公式为$\frac{1}{S_n}+b_n=\left(\frac{1}{S_1}+b_1\right)2^{n-1}$，且首项$\frac{1}{S_1}+b_1=1$，

$$故b_1=\frac{1}{2},\frac{1}{S_n}+b_n=\left(\frac{1}{S_1}+b_1\right)2^{n-1}=2^{n-1},\quad b_n=2^{n-1}-\frac{1}{n\left(n+1\right)}=2^{n-1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$T_n=(1+2^1+\ldots+2^{n-1})\ldots-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2^n-1-\frac{n}{n+1}.$$

17.抢“微信红包”已经成为中国百姓欢度春节时非常喜爱的一项活动.小明收集班内 20 名同学今年春节期间抢到红包金额 x(元)如下(四舍五入取整数)：

102	52	41	121	72
162	50	22	158	46
43	136	95	192	59
99	22	68	98	79

对这 20 个数据进行分组，各组的频数如下：

组别	红包金额分组	频数
A	$0\le x<40$	2
B	$40\le x<80$	9
C	$80\le x<120$	m
D	$120\le x<160$	3
E	$160\le x<200$	n

(Ⅰ)写出 m，n 的值，并回答这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在哪个组别;

(Ⅱ)记 C 组红包金额的平均数与方差分别为 v_1、s_1^2,E 组红包金额的平均数与方差分别为 v_2、s_2^2，试分别比较 v_1 与 v_2、s_1^2 与 s_2^2 的大小;(只需写出结论)

(Ⅲ)从 A，E 两组所有数据中任取 2 个，求这 2 个数据差的绝对值大于 100 的概率.

解析：(Ⅰ)由题意求出 m=4，n=2，从而能求出这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在 B 组.

(Ⅱ)记 C 组红包金额的平均数与方差分别为 v_1、s_1^2,E 组红包金额的平均数与方差分别为 v_2、s_2^2，由此能比较 v_1 与 v_2、s_1^2 与 s_2^2 的大小.

(Ⅲ)A 组两个数据为 22，22，E 组两个数据为 162，192，任取两个数据，利用列举法能求出这 2 个数据差的绝对值大于 100 的概率.

答案：(Ⅰ)由题意求出 m=4，n=2，这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在 B 组.

(Ⅱ)记 C 组红包金额的平均数与方差分别为 v_1、s_1^2,E 组红包金额的平均数与方差分别为 v_2、s_2^2，则 $v_1<v_2$，$s_1^2<s_2^2$.

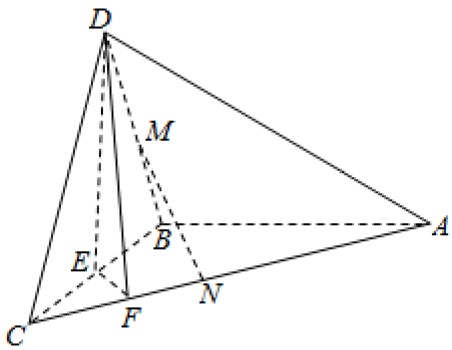
(Ⅲ)A 组两个数据为 22，22，E 组两个数据为 162，192

任取两个数据，可能的组合有 6 种结果，分别为：(22，22)，(22，162)，(22，192)，(22，162)，(22，192)，(162，192)，

记数据差的绝对值大于 100 为事件 A，事件 A 包括 4 种结果，

∴这 2 个数据差的绝对值大于 100 的概率 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

18.如图，在三棱锥 D-ABC 中，已知△BCD 是正三角形，AB⊥平面 BCD，AB=BC=a，E 为 BC 点，F 棱 AC 上，且 AF=3FC.



(1)求三棱锥 D-ABC 的体积;

(2)求证:AC⊥平面 DEF;

(3)若 M 为 DB 中点,N 在棱 AC 上,且 CN=$\frac{3}{8}$CA,求证:MN∥平面 DEF.

解析:(1)直接利用体积公式,求三棱锥 D-ABC 的体积;

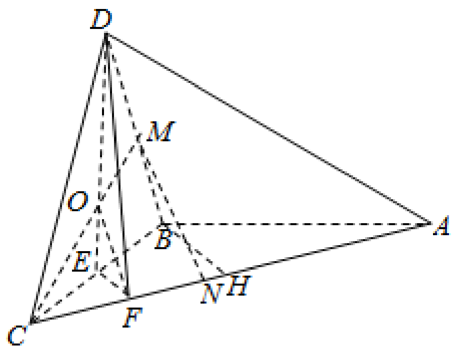
(2)要证 AC⊥平面 DEF,先证 AC⊥DE,再证 AC⊥EF,即可.

(3)M 为 BD 的中点,连 CM,设 CM∩DE=O,连 OF,只要 MN∥OF 即可.

答案:(1)∵△BCD 是正三角形,AB⊥平面 BCD,AB=BC=a,

∴三棱锥 D-ABC 的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

(2)取 AC 的中点 H,∵AB=BC,∴BH⊥AC.



∵AF=3FC,∴F 为 CH 的中点.

∵E 为 BC 的中点,∴EF∥BH.则 EF⊥AC.

∵△BCD 是正三角形,∴DE⊥BC.

∵AB⊥平面 BCD,∴AB⊥DE.

∵AB∩BC=B,∴DE⊥平面 ABC.∴DE⊥AC.

∵DE∩EF=E,∴AC⊥平面 DEF.

(3)连 CM,设 CM∩DE=O,连 OF.

由条件知,O 为△BCD 的重心,CO=$\frac{2}{3}$CM.

当 CN=$\frac{3}{8}$CA 时,CF=$\frac{2}{3}$CN,∴MN∥OF.

∵MN⊄平面 DEF,OF⊂平面 DEF,∴MN∥平面 DEF.

19. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0) 的离心率 e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为$2\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ)若 C，D 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 M 满足 MD⊥CD，连接 CM，交椭圆 E 于点 P.

证明：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值(O 为坐标原点).

解析：(Ⅰ)根据题意，分析可得椭圆中 c 的值，结合椭圆的离心率公式可得 a 的值，计算可得 b 的值，将 a、b 的值代入椭圆的方程，即可得答案；

(Ⅱ)根据题意，设 l_{CM}：x=my-2，联立直线与椭圆的方程，用根与系数的关系分析，用 m 表示 P 的坐标结合直线的方程分析可得 M 的坐标，进而可以用 m 表示$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$，分析可得答案.

答案：(Ⅰ)根据题意，椭圆 E 的焦距为$2\sqrt{2}$，则 2c=$2\sqrt{2}$，所以 c=$\sqrt{2}$，

因为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 a=$\sqrt{2}$ c=2，

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b^2=2$，所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ)因为直线 CM 不在 x 轴上，故可设 l_{CM}：x=my-2.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ x=my-2,\end{cases}$得 $(m^2+2)y^2-4my=0$，

∴ $y_P=\frac{2m^2-4}{m^2+2}$，$x_P=\frac{4m}{m^2+2}$，即 P$(\frac{2m^2-4}{m^2+2},\frac{4m}{m^2+2})$.

在直线 x=my-2 中令 x=2，则 $y_M=\frac{4}{m}$，即 M(2，$\frac{4}{m}$).

∴$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{4m^2-8}{m^2+2}+\frac{16}{m^2+2}=4$. ∴$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值 4.

20. 设函数 f(x)=lnx+$\frac{m}{x}$，m∈R.

(Ⅰ)当 m=e(e 为自然对数的底数)时，求 f(x)的极小值；

(Ⅱ)讨论函数 g(x)=f′(x)-$\frac{x}{3}$ 零点的个数；

(Ⅲ)若对任意 b＞a＞0，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$＜1 恒成立，求 m 的取值范围.

解析：(Ⅰ)m=e 时，$f(x)=\ln x+\frac{e}{x}$，利用 $f'(x)$判定 $f(x)$的增减性并求出 $f(x)$的极小值；

(Ⅱ)由函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}$，令 $g(x)=0$，求出 m；设φ(x)=m，求出φ(x)的值域，讨论 m 的取值，对应 g(x)的零点情况；

(Ⅲ)由 b>a>0，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立；

即 $h(x)=f(x)-x$ 在(0，+∞)上单调递减；$h'(x)\leqslant 0$，求出 m 的取值范围.

答案：(Ⅰ)当 m=e 时，$f(x)=\ln x+\frac{e}{x}$，∴$f'(x)=\frac{x-e}{x^2}$；

∴当 x∈(0，e)时，$f'(x)<0$，f(x)在(0，e)上是减函数；

当 x∈(e，+∞)时，$f'(x)>0$，f(x)在(e，+∞)上是增函数；

∴x=e 时，f(x)取得极小值为 $f(e)=\ln e+\frac{e}{e}=2$；

(Ⅱ)∵函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}$ (x>0)，

令 g(x)=0，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x$ (x>0)；

设 $\varphi(x)=-\frac{1}{3}x^3+x$ (x>0)，

∴$\varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$；

当 x∈(0，1)时，$\varphi'(x)>0$，φ(x)在(0，1)上是增函数，

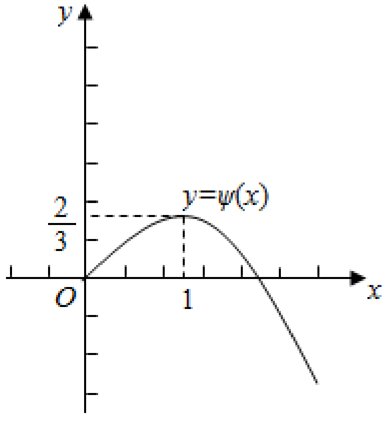
当 x∈(1，+∞)时，$\varphi'(x)<0$，φ(x)在(1，+∞)上是减函数；

∴x=1 是φ(x)的极值点，且是极大值点，

∴x=1 是φ(x)的最大值点，

∴φ(x)的最大值为 $\varphi(1)=\frac{2}{3}$；

又φ(0)=0，结合 y=φ(x)的图象，如图；



可知：①当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 g(x)无零点；

②当 $m=\frac{2}{3}$ 时，函数 g(x)有且只有一个零点；

③当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 g(x)有两个零点；

④当 $m\leqslant 0$ 时，函数 g(x)有且只有一个零点；

综上，当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 g(x)无零点；

当 $m=\frac{2}{3}$ 或 $m\leqslant 0$ 时，函数 g(x)有且只有一个零点；

当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 g(x)有两个零点；

(III)对任意 $b>a>0$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，

等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立；

设 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x(x>0)$，则 $h(b)<h(a)$.

∴h(x)在(0，+∞)上单调递减；

∵$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-1\leqslant 0$ 在(0，+∞)上恒成立，

∴$m\geqslant -x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ $(x>0)$，∴$m\geqslant\frac{1}{4}$；

对于 $m=\frac{1}{4}$，$h'(x)=0$ 仅在 $x=\frac{1}{2}$ 时成立；∴m 的取值范围是$[\frac{1}{4}，+\infty)$.