2012年普通高等学校招生全国统一考试
数学（文）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一 、选择题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in R\,|\,3x+2>0\}$，$B=\{x\in R\,|\,(x+1)(x-3)>0\}$，则 $A\bigcap B=$

（A）$(-\infty,-1)$ （B）$(-1,-\frac{2}{3})$ （C）$(-\frac{2}{3},3)$ （D）$(3,+\infty)$

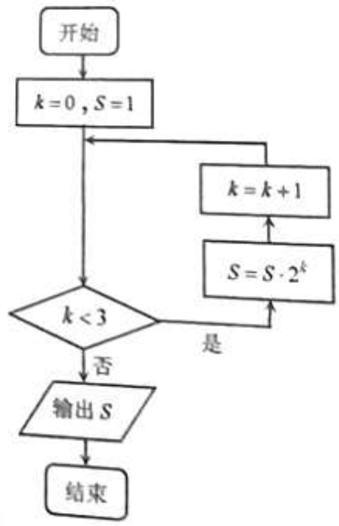
（2）在复平面内，复数 $\frac{10i}{3+i}$ 对应的点的坐标为

（A）$(1,3)$ （B）$(3,1)$ （C）$(-1,3)$ （D）$(3,-1)$

（3）设不等式组 $\begin{cases}0\le x\le 2,\\ 0\le y\le 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 D，在区域 D 内随机取一个点，则此点到坐标原点的距离大于2的概率是

（A）$\frac{\pi}{4}$ （B）$\frac{\pi-2}{2}$

（C）$\frac{\pi}{6}$ （D）$\frac{4-\pi}{4}$



（4）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

（A）2

（B）4

（C）8

（D）16

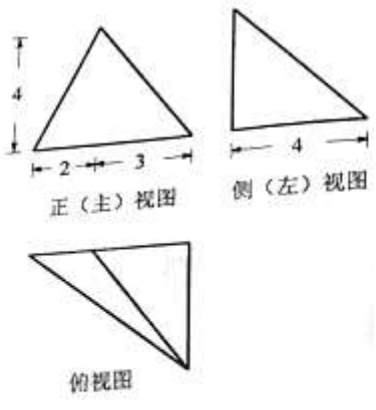
（5）函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-(\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

（6）已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，下面结论中正确的是

（A）$a_1+a_3\ge 2a_2$ （B）$a_1^2+a_3^2\ge 2a_2^2$

（C）若 $a_1=a_3$，则 $a_1=a_2$ （D）若 $a_3>a_1$，则 $a_4>a_2$

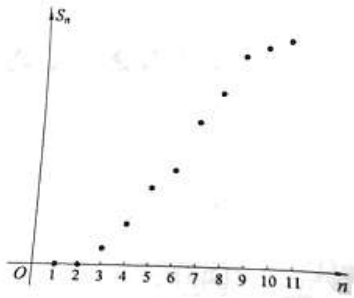


（7）某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的表面积是

（A）$28+6\sqrt{5}$ （B）$30+6\sqrt{5}$

（C）$56+12\sqrt{5}$ （D）$60+12\sqrt{5}$

（8）某棵果树前 n 年的总产量 S_n 与 n 之间的关系如图所示，从目前记录的结果看，前 m 年的年平均产量最高，m 的值为



（A）5
（B）7
（C）9
（D）11

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）直线 $y=x$ 被圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 截得的弦长为__________。

（10）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_2=a_3$，则 $a_2=$____________，$S_n=$________________。

（11）在 ΔABC 中，若 $a=3$，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle C$ 的大小为_________。

（12）已知函数 $f(x)=\lg x$，若 $f(ab)=1$，则 $f(a^2)+f(b^2)=$_____________。

（13）已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为_______；$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为_______。

（14）已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=2^x-2$。若 $\forall x\in R$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$，则 m 的取值范围是_________。

三、解答题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递减区间。

（16）（本小题共 14 分）

如图 1，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，D,E 分别为 AC,AB 的中点，点 F 为线段 CD 上的一点，将 ΔADE 沿 DE 折起到 ΔA_1DE 的位置，使 $A_1F\perp CD$，如图 2。

（Ⅰ）求证：DE // 平面 A_1CB；

（Ⅱ）求证：$A_1F\perp BE$；

（Ⅲ）线段 A_1B 上是否存在点 Q，使 $A_1C\perp$ 平面 DEQ？说明理由。

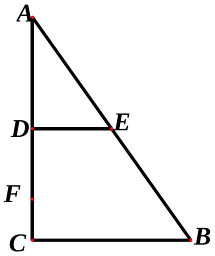


图1

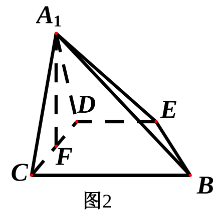


图2

（17）（本小题共 13 分）

近年来，某市为了促进生活垃圾的分类处理，将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类，并分别设置了相应的垃圾箱，为调查居民生活垃圾分类投放情况，现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾，数据统计如下（单位：吨）：

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

（Ⅰ）试估计厨余垃圾投放正确的概率；

（Ⅱ）试估计生活垃圾投放错误的概率；

（Ⅲ）假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a,b,c，其中 $a>0$，$a+b+c=600$。当数据 a,b,c 的方差 s^2 最大时，写出 a,b,c 的值（结论不要求证明），并求此时 s^2 的值。

（注：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

（18）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+1(a>0)$，$g(x)=x^3+bx$。

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求 a,b 的值；

（Ⅱ）当 $a=3,b=-9$ 时，若函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 $[k,2]$ 上的最大值为 28，求 k 的取值范围。

（19）(本小题共 14 分)

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(2,0)$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 直线$y=k(x-1)$与椭圆$C$交于不同的两点$M,N$。

（Ⅰ）求椭圆C的方程

（Ⅱ）当ΔAMN的面积为$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$时，求k的值。

（20）（本小题共 13 分）

设A是如下形式的 2 行 3 列的数表，

a	b	c
d	e	f

满足性质$P:a,b,c,d,e,f\in[-1,1]$，且$a+b+c+d+e+f=0$。

记$r_i(A)$为A的第i行各数之和$(i=1,2)$，$c_j(A)$为第j列各数之和$(j=1,2,3)$；记$k(A)$为$|r_1(A)|$，$|r_2(A)|$，$|c_1(A)|$，$|c_2(A)|$，$|c_3(A)|$中的最小值。

（Ⅰ）对如下数表A，求$k(A)$的值

1	1	–0.8
0.1	–0.3	–1

（Ⅱ）设数表A形如

1	1	$-1-2d$
d	d	-1

其中$-1\le d\le 0$。求$k(A)$的最大值；

（Ⅲ）对所有满足性质P的 2 行 3 列的数表A，求$k(A)$的最大值

绝密★考试结束前

2012年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D　（2）A　（3）D　（4）C

（5）B　（6）B　（7）B　（8）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$2\sqrt{2}$　（10）1　$\frac{1}{4}n(n+1)$

（11）$\frac{\pi}{2}$　（12）2

（13）1　1　（14）$(-4,0)$

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由 $\sin x \neq 0$ 得 $x \neq k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$，

故 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$．

因为 $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$

$=2\cos x(\sin x-\cos x)$

$=\sin 2x-\cos 2x-1$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-1$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．

（Ⅱ）函数 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]\ (k \in \mathbf{Z})$．

由　$2k\pi+\frac{\pi}{2} \leqslant 2x-\frac{\pi}{4} \leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$x \neq k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$，

得　$k\pi+\frac{3\pi}{8} \leqslant x \leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8}\ (k \in \mathbf{Z})$．

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{3\pi}{8},\ k\pi+\frac{7\pi}{8}]\ (k \in \mathbf{Z})$．

(16)（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 D，E 分别为 AC，AB 的中点，

所以 $DE // BC$．

又因为 $DE \not\subset$ 平面 A_1CB，

所以 $DE //$ 平面 A_1CB．

（Ⅱ）由已知得 $AC \perp BC$ 且 $DE // BC$，

所以 $DE \perp AC$．

所以 $DE \perp A_1D$，$DE \perp CD$．

所以 $DE \perp$ 平面 A_1DC．

而 $A_1F \subset$ 平面 A_1DC，

所以 $DE \perp A_1F$．

又因为 $A_1F \perp CD$，

所以 $A_1F \perp$ 平面 $BCDE$．

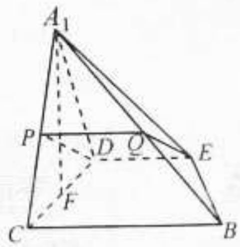
所以 $A_1F \perp BE$．

（Ⅲ）线段 A_1B 上存在点 Q，使 $A_1C \perp$ 平面 DEQ．理由如下：

如图，分别取 A_1C，A_1B 的中点 P，Q，则 $PQ // BC$．

又因为 $DE // BC$，

所以 $DE // PQ$．



所以平面 DEQ 即为平面 DEP．

由（Ⅱ）知，$DE \perp$ 平面 A_1DC，

所以 $DE \perp A_1C$．

又因为 P 是等腰三角形 DA_1C 底边 A_1C 的中点，

所以 $A_1C \perp DP$．

所以 $A_1C \perp$ 平面 DEP．

从而 $A_1C \perp$ 平面 DEQ．

故线段 A_1B 上存在点 Q，使得 $A_1C \perp$ 平面 DEQ．

(17)（共 13 分）

解：（Ⅰ）厨余垃圾投放正确的概率约为

$$\frac{\text{“厨余垃圾”箱里厨余垃圾量}}{\text{厨余垃圾总量}}=\frac{400}{400+100+100}=\frac{2}{3}.$$

（Ⅱ）设生活垃圾投放错误为事件 A，则事件 $\overline{A}$ 表示生活垃圾投放正确.

事件 $\overline{A}$ 的概率约为“厨余垃圾”箱里厨余垃圾量、“可回收物”箱里可回收物量与“其他垃圾”箱里其他垃圾量的总和除以生活垃圾总量，即 $P(\overline{A})$ 约为

$$\frac{400+240+60}{1000}=0.7，$$

所以 $P(A)$ 约为 $1-0.7=0.3$.

（Ⅲ）当 $a=600$，$b=c=0$ 时，s^2 取得最大值.

因为 $\overline{x}=\frac{1}{3}(a+b+c)=200$，

所以 $s^2=\frac{1}{3}[(600-200)^2+(0-200)^2+(0-200)^2]=80000$.

(18)（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=2ax$，$g'(x)=3x^2+b$.

因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线，所以

$f(1)=g(1)$，且 $f'(1)=g'(1)$.

即 $a+1=1+b$，且 $2a=3+b$.

解得 $a=3$，$b=3$.

（Ⅱ）记 $h(x)=f(x)+g(x)$．当 $a=3$，$b=-9$ 时，

$h(x)=x^3+3x^2-9x+1$，

$h'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $h'(x)=0$，得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

$h(x)$ 与 $h'(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上的情况如下：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	↗	28	↘	-4	↗	3

由此可知：

当 $k\leqslant -3$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 $h(-3)=28$；

当 $-3<k<2$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值小于 28.

因此，k 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

(19)（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$

解得 $b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$.

设点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则

$$y_1=k(x_1-1)，\ y_2=k(x_2-1)，\ x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}，\ x_1x_2=\frac{2k^2-4}{1+2k^2}.$$

所以 $|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{(1+k^2)(4+6k^2)}}{1+2k^2}.$$

又因为点 $A(2,0)$ 到直线 $y=k(x-1)$ 的距离 $d=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\triangle AMN$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2}.$$

由 $\dfrac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，解得 $k=\pm 1$.

(20)（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $r_1(A)=1.2$，$r_2(A)=-1.2$，$c_1(A)=1.1$，$c_2(A)=0.7$，$c_3(A)=-1.8$，

所以 $k(A)=0.7$.

（Ⅱ）$r_1(A)=1-2d$，$r_2(A)=-1+2d$，$c_1(A)=c_2(A)=1+d$，$c_3(A)=-2-2d$.

因为 $-1\leqslant d\leqslant 0$，

所以 $|r_1(A)|=|r_2(A)|\geqslant 1+d\geqslant 0$，$|c_3(A)|\geqslant 1+d\geqslant 0$.

所以 $k(A)=1+d\leqslant 1$.

当 $d=0$ 时，$k(A)$ 取得最大值1.

（III）任给满足性质 P 的数表 A（如下所示）.

a	b	c
d	e	f

任意改变 A 的行次序或列次序，或把 A 中的每个数换成它的相反数，所得数表 A^{*} 仍满足性质 P，并且 $k(A)=k(A^{*})$.

因此，不妨设 $r_1(A)\geqslant 0$，$c_1(A)\geqslant 0$，$c_2(A)\geqslant 0$.

由 $k(A)$ 的定义知，$k(A)\leqslant r_1(A)$，$k(A)\leqslant c_1(A)$，$k(A)\leqslant c_2(A)$. 从而

$$
\begin{aligned}
3k(A) &\leqslant r_1(A)+c_1(A)+c_2(A)=(a+b+c)+(a+d)+(b+e)\\
&=(a+b+c+d+e+f)+(a+b-f)\\
&=a+b-f\leqslant 3.
\end{aligned}
$$

所以 $k(A)\leqslant 1$.

由（II）知，存在满足性质 P 的数表 A 使 $k(A)=1$. 故 $k(A)$ 的最大值为1.