2007年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学（理工科）

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）“$x>1$”是“$x^2>x$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

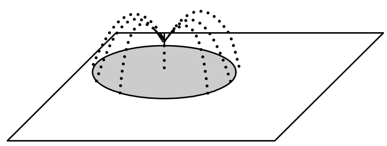
（2）若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi), x\in R$，（其中 $\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则

（A）$\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　（B）$\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{3}$　（C）$\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　（D）$\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

（3）直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是

（A）$x+2y-1=0$　（B）$2x+y-1=0$　（C）$2x+y-3=0$　（D）$x+2y-3=0$

（4）要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头，使整个草坪都能喷洒到水。假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面，则需安装这种喷水龙头的个数最少是



（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

（5）已知随机变量服从正态分布 $N(2,\sigma^2), P(\xi\le 4)=0.84$，则 $P(\xi\le 0)=$

（A）0.16　（B）0.32　（C）0.68　（D）0.84

（6）若 P 是两条异面直线 l,m 外的任意一点，则

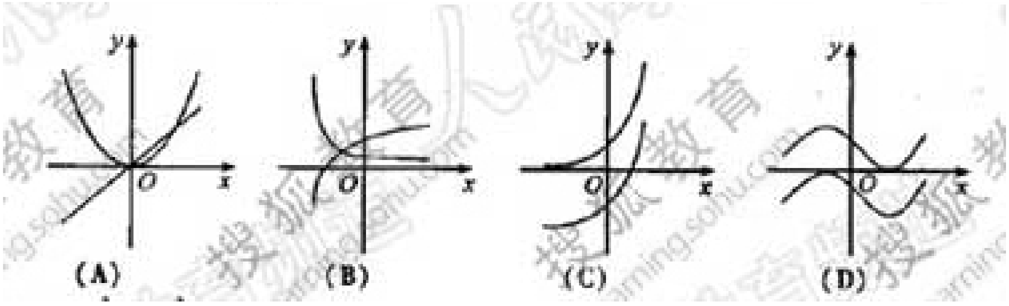
（A）过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都平行　（B）过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都垂直

（C）过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都相交　（D）过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都异面

（7）若非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则

（A）$|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　（B）$|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　（C）$|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$　（D）$|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$

（8）设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中，不可能正确的是



（9）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，P 是准线上一点，且$PF_1\perp PF_2,|PF_1|\cdot|PF_2|=4ab$，则双曲线的离心率是

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）3

（10）设$f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\geq 1\\ x,|x|<1\end{cases}$，$g(x)$是二次函数，若$f(g(x))$的值域是$[0,+\infty)$，则$g(x)$的值域是

（A）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　　（C）$[0,+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

二．填空题：本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分。

（11）已知复数$z_1=1-i$，$z_1\cdot z_2=1+i$，则复数$z_2=$____________。

（12）已知$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，且$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$，则$\cos 2\theta$的值是____________。

（13）不等式$|2x-1|-x<1$的解集是____________。

（14）某书店有 11 种杂志，2 元 1 本的 8 种，1 元 1 本的 3 种，小张有 10 元钱买杂志（每种至多买一本，10 元钱刚好用完），则不同买法的种数是____________（用数字作答）

(15) 随机变量ξ的分布列如下：

ξ	-1	0	1
P	a	b	c

其中a,b,c成等差数列。若$E\xi=\frac{1}{3}$，则$D\xi$的值是____________。

（16）已知点O在二面角$\alpha-AB-\beta$的棱上，点P在α内，且$\angle POB=45°$。若对于β内异于O的任意一点Q，都有$\angle POQ\geq 45°$，则二面角$\alpha-AB-\beta$的大小是____________。

（17）设 m 为实数，若 $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-2y+5\geq 0\\ 3-x\geq 0\\ mx+y\geq 0\end{cases}\right.\right\}\subseteq\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 25\}$，则 m 的取值范围是_____________。

二．解答题：本大题共 5 小题，共 72 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（18）（本题 14 分）已知 ΔABC 的周长为 $\sqrt{2}+1$，且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$

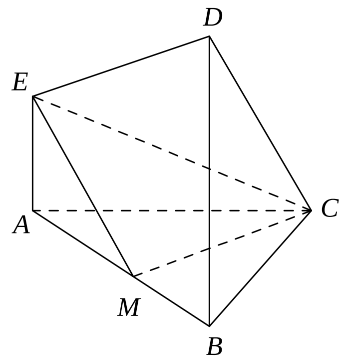
（Ⅰ）求边 AB 的长；

（Ⅱ）若 ΔABC 的面积为 $\dfrac{1}{6}\sin C$，求角 C 的度数。

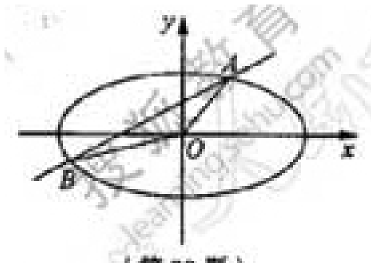
（19）(本题 14 分)在如图所示的几何体中，$EA\perp$ 平面 ABC，$DB\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=BD=2AE$，M 是 AB 的中点。

（Ⅰ）求证：$CM\perp EM$；

（Ⅱ）求 CM 与平面 CDE 所成的角。



(20)(本题 14 分)如图,直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A、B 两点，记 ΔABC 的面积为 S 。



〔第 20 题〕

（Ⅰ）求在 $k=0$ ，$0<b<1$ 的条件下，S 的最大值;

（Ⅱ）当 $|AB|=2, S=1$ 时，求直线 AB 的方程。

（21）（本题 15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 $a_{2k-1,}a_{2k}$ 是关于 x 的方程的两个根，且 $a_{2k-1}\le a_{2k}(k=1,2,3,\cdots)$

（Ⅰ）求 $a_{1,}a_3,a_5,a_7$;

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 S_{2n} ;

（Ⅲ）记 $f(n)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{|\sin n|}{\sin n}+3)$ ，$T_n=\dfrac{(-1)^{f(2)}}{a_1a_2}+\dfrac{(-1)^{f(3)}}{a_3a_4}+\dfrac{(-1)^{f(4)}}{a_5a_6}+\cdots+\dfrac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$

求证：$\dfrac{1}{6}\le T_n\le\dfrac{5}{24}(n\in N^*)$

（22）（本题 15 分）设 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ ，对任意实数 t ，记 $g_t(x)=t^{\frac{2}{3}}x-\dfrac{2}{3}t$

（Ⅰ）求函数 $y=f(x)-g_8(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：（ⅰ）当 $x>0$ 时，$f(x)\ge g_t(x)$ 对任意正实数 t 成立；

（ⅱ）有且仅有一个正实数 x_0，使得 $g_8(x_0)\ge g_t(x_0)$ 对于任意正实数 t 成立。

2007年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学（理工类）答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题**5**分，满分**50**分．

（1）A　（2）D　（3）D　（4）B　（5）A

（6）B　（7）C　（8）D　（9）B　（10）C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题**4**分，满分**28**分．

（11）1　（12）$-\dfrac{7}{25}$　（13）$\{x|0<x<2\}$　（14）266

（15）$\dfrac{5}{9}$　（16）90°　（17）$0\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3}$

三、解答题

（18）解：（I）由题意及正弦定理，得 $AB+BC+AC=\sqrt{2}+1$，

$BC+AC=\sqrt{2}AB$，

两式相减，得 $AB=1$．

（II）由$\triangle ABC$的面积$\dfrac{1}{2}BC\bullet AC\bullet\sin C=\dfrac{1}{6}\sin C$，得$BC\bullet AC=\dfrac{1}{3}$，

由余弦定理，得$\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\bullet BC}$

$$=\frac{(AC+BC)^2-2AC\bullet BC-AB^2}{2AC\bullet BC}=\frac{1}{2},$$

所以$C=60^\circ$．

（19）本题主要考查空间线面关系、空间向量的概念与运算等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力．满分**14**分．

方法一：

（I）证明：因为$AC=BC$，M是AB的中点，

所以$CM\perp AB$．

又$EA\perp$平面ABC，

所以$CM\perp EM$．

（II）解：过点M作$MH\perp$平面CDE，垂足是H，连结CH交延长交ED于点F，连结MF，MD．

$\angle FCM$是直线CM和平面CDE所成的角．

因为$MH\perp$平面CDE，

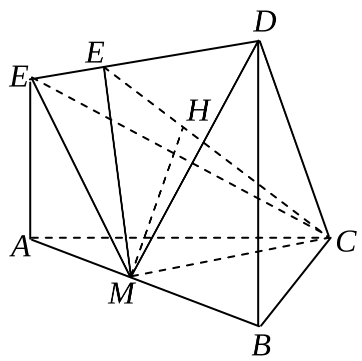
所以$MH\perp ED$，

又因为$CM\perp$平面EDM，

所以$CM\perp ED$，

则$ED\perp$平面CMF，因此$ED\perp MF$．

设$EA=a$，$BD=BC=AC=2a$，



在直角梯形 $ABDE$ 中，

$AB=2\sqrt{2}a$， M 是 AB 的中点，

所以 $DE=3a$， $EM=\sqrt{3}a$， $MD=\sqrt{6}a$，

得 $\triangle EMD$ 是直角三角形，其中 $\angle EMD=90^\circ$，

所以 $MF=\dfrac{EM\bullet MD}{DE}=\sqrt{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CMF$ 中， $\tan\angle FCM=\dfrac{MF}{MC}=1$，

所以 $\angle FCM=45^\circ$，

故 CM 与平面 CDE 所成的角是 45° .

方法二：

如图，以点 C 为坐标原点，以 CA ， CB 分别为 x 轴和 y 轴，过点 C 作与平面 ABC 垂直的直线为 z 轴，建立直角坐标系 $C-xyz$ ，设 $EA=a$ ，则 $A(2a,0,0)$ ， $B(0,2a,0)$ ，$E(2a,0,a)$. $D(0,2a,2a)$， $M(a,a,0)$.

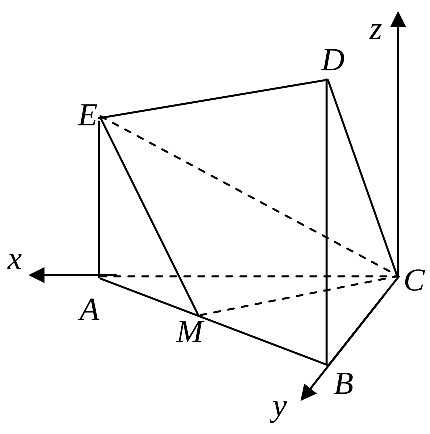
（I）证明：因为 $\overrightarrow{EM}=(-a,a,-a)$， $\overrightarrow{CM}=(a,a,0)$，

所以 $\overrightarrow{EM}\bullet\overrightarrow{CM}=0$，

故 $EM\perp CM$.

（II）解：设向量 $\boldsymbol{n}=(1,y_0,z_0)$ 与平面 CDE 垂直，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CE}$， $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD}$，

即 $\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{CE}=0$， $\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{CD}=0$.



因为 $\overrightarrow{CE}=(2a,0,a)$， $\overrightarrow{CD}=(0,2a,2a)$，

所以 $y_0=2$， $x_0=-2$，

即 $\boldsymbol{n}=(1,2,-2)$，

$$\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{CM}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CM}\bullet\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{CM}\right|\bullet|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

直线 CM 与平面 CDE 所成的角 θ 是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{CM}$ 夹角的余角，

所以 $\theta=45^\circ$，

因此直线CM与平面CDE所成的角是45°.

（20）本题主要考查椭圆的几何性质、椭圆与直线的位置关系等基础知识，考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：设点A的坐标为$(x_1,\ b)$，点B的坐标为$(x_2,\ b)$，

由$\dfrac{x^2}{4}+b^2=1$，解得$x_{1,2}=\pm 2\sqrt{1-b^2}$，

所以$S=\dfrac{1}{2}b\bullet|x_1-x_2|$

$=2b\bullet\sqrt{1-b^2}$

$\leqslant b^2+1-b^2=1$.

当且仅当$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，S取到最大值1.

（Ⅱ）解：由$\begin{cases} y=kx+b, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$

得$\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+2kbx+b^2-1=0$，

$\Delta=4k^2-b^2+1$，

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\bullet|x_1-x_1|=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{\sqrt{4k^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+k^2}=2. \qquad ②$$

设O到AB的距离为d，则

$d=\dfrac{2S}{|AB|}=1$，

又因为$d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$b^2=k^2+1$，代入②式并整理，得

$k^4-k^2+\dfrac{1}{4}=0$，

解得$k^2=\dfrac{1}{2}$，$b^2=\dfrac{3}{2}$，代入①式检验，$\Delta>0$，

故直线AB的方程是

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，或$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

21．本题主要考查等差、等比数列的基本知识，考查运算及推理能力．满分 15 分．

（I）解：方程$x^2-(3k+2^k)x+3k\bullet 2^k=0$的两个根为$x_1=3k$，$x_2=2^k$，

当$k=1$时，$x_1=3, x_2=2$，

所以$a_1=2$；

当$k=2$时，$x_1=6$，$x_2=4$，

所以$a_3=4$；

当$k=3$时，$x_1=9$，$x_2=8$，

所以$a_5=8$时；

当$k=4$时，$x_1=12$，$x_2=16$，

所以$a_7=12$.

（II）解：$S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$

$=(3+6+\cdots+3n)+(2+2^2+\cdots+2^n)$

$=\dfrac{3n^2+3n}{2}+2^{n+1}-2$.

（III）证明：$T_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_3a_4}-\dfrac{1}{a_5a_6}+\cdots+\dfrac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$，

所以$T_1=\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{6}$，

$T_2=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{5}{24}$.

当$n\geqslant 3$时，

$$T_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}},$$

$$\geqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\left(\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{6\bullet2^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\bullet2^n}>\frac{1}{6},$$

同时，$T_n=\frac{5}{24}-\frac{1}{a_5a_6}-\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$

$$\leqslant\frac{5}{24}-\frac{1}{a_5a_6}+\left(\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$\leqslant\frac{5}{24}-\frac{1}{9\bullet2^3}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{9\bullet2^n}<\frac{5}{24}.$$

综上，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$\frac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\frac{5}{24}$.

22．本题主要考查函数的基本性质，导数的应用及不等式的证明等基础知识，以及综合运用所学知识分析和解决问题的能力．满分 15 分．

（I）解：$y=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{16}{3}$.

由$y'=x^2-4=0$，得

$x=\pm2$.

因为当$x\in(-\infty,-2)$时，$y'>0$，

当$x\in(-2,2)$时，$y'<0$，

当$x\in(2,+\infty)$时，$y'>0$，

故所求函数的单调递增区间是$(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$，

单调递减区间是$(-2,2)$.

（II）证明：（i）方法一：

令$h(x)=f(x)-g_t(x)=\dfrac{x^3}{3}-t^{\frac{2}{3}}x+\dfrac{2}{3}t(x>0)$，则

$h'(x)=x^2-t^{\frac{2}{3}}$，

当$t>0$时，由$h'(x)=0$，得$x=t^{\frac{1}{3}}$，

当$x\in(x^{\frac{1}{3}},+\infty)$时，$h'(x)>0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$内的最小值是$h(t^{\frac{1}{3}})=0$.

故当$x>0$时，$f(x)\geqslant g_t(x)$对任意正实数t成立.

方法二：

对任意固定的$x>0$，令$h(t)=g_t(x)=t^{\frac{2}{3}}x-\dfrac{2}{3}t(t>0)$，则

$h'(t)=\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(x-t^{\frac{1}{3}})$，

由$h'(t)=0$，得$t=x^3$.

当$0<t<x^3$时，$h'(t)>0$.

当$t>x^3$时，$h'(t)<0$，

所以当$t=x^3$时，$h(t)$取得最大值$h(x^3)=\dfrac{1}{3}x^3$.

因此当$x>0$时，$f(x)\geqslant g(x)$对任意正实数t成立.

（ii）方法一：

$f(2)=\dfrac{8}{3}=g_t(2)$.

由（i）得，$g_t(2)\geqslant g_t(2)$对任意正实数t成立.

即存在正实数$x_0=2$，使得$g_x(2)\geqslant g_t(2)$对任意正实数t成立.

下面证明x_0的唯一性：

当$x_0\neq2$，$x_0>0$，$t=8$时，

$f(x_0)=\dfrac{{x_0}^3}{3}$，$g_x(x_0)=4x_0-\dfrac{16}{3}$，

由（i）得，$\dfrac{x_0{}^3}{3} > 4x_0 - \dfrac{16}{3}$，

再取$t = x_0{}^3$，得 $g_{x_0{}^3}(x_0) = \dfrac{x_0{}^3}{3}$，

所以$g_x(x_0) = 4x_0 - \dfrac{16}{3} < \dfrac{x_0{}^3}{3} = g_{x_0{}^3}(x_0)$，

即$x_0 \neq 2$时，不满足$g_x(x_0) \geqslant g_t(x_0)$对任意$t > 0$都成立.

故有且仅有一个正实数$x_0 = 2$，

使得$g_x(x_0)0 \geqslant g_t(x_0)$对任意正实数$t$成立.

方法二：对任意$x_0 > 0$，$g_x(x_0) = 4x_0 - \dfrac{16}{3}$，

因为$g_t(x_0)$关于t的最大值是$\dfrac{1}{3}x_0{}^3$，所以要使$g_x(x_0) \geqslant g_t(x_0)$对任意正实数成立的充分必要条件是：

$4x_0 - \dfrac{16}{3} \geqslant \dfrac{1}{3}x_0{}^3$，

即$(x_0 - 2)^2(x_0 + 4) \leqslant 0$，　　　　　　　　　①

又因为$x_0 > 0$，不等式①成立的充分必要条件是$x_0 = 2$，

所以有且仅有一个正实数$x_0 = 2$，

使得$g_x(x_0) \geqslant g_t(x_0)$对任意正实数$t$成立.