

2015 年河南省中考真题数学

一、选择题(每小题 3 分, 满分 24 分)下列各小题均有四个答案, 其中只有一个是正确的

1. 下列各数中最大的数是()

A. 5

B. $\sqrt{3}$

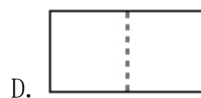
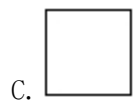
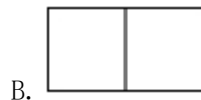
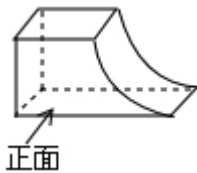
C. π

D. -8

解析: 根据实数比较大小的方法, 可得 $-8 < \sqrt{3} < \pi < 5$, 所以各数中最大的数是 5.

答案: A

2. 如图所示的几何体的俯视图是()



解析: 从上面看左边一个正方形, 右边一个正方形,

答案: B

3. 据统计 2014 年我国高新技术产品出口总额 40570 亿元, 将数据 40570 亿用科学记数法表示为()

A. 4.0570×10^9

B. 0.40570×10^{10}

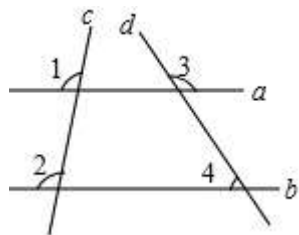
C. 40.570×10^{11}

D. 4.0570×10^{12}

解析: $40570 \text{ 亿} = 4057000000000 = 4.057 \times 10^{12}$.

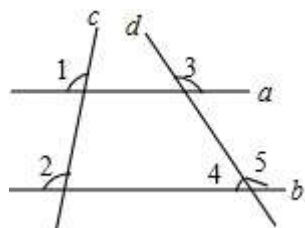
答案: D

4. 如图，直线 a 、 b 被直线 c 、 d 所截，若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = 125^\circ$ ，则 $\angle 4$ 的度数为()



- A. 55°
- B. 60°
- C. 70°
- D. 75°

解析：如图，



$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore a \parallel b, \therefore \angle 3 = \angle 5 = 125^\circ, \therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 5 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$

答案：A

5. 不等式组 $\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ 3-x > 1 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为()

- A.
- B.
- C.
- D.

解析： $\begin{cases} x+5 \geq 0 \text{ ①}, \\ 3-x > 1 \text{ ②}, \end{cases}$

解不等式①得： $x \geq -5$,

解不等式②得： $x < 2$,

由大于向右画，小于向左画，有等号画实点，无等号画空心.

答案：C.

6. 小王参加某企业招聘测试，他的笔试、面试、技能操作得分分别为 85 分、80 分、90 分，若依次按照 2: 3: 5 的比例确定成绩，则小王的成绩是()

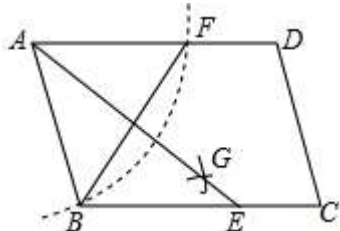
- A. 255 分

- B. 84 分
C. 84.5 分
D. 86 分

解析：根据题意得： $85 \times \frac{2}{2+3+5} + 80 \times \frac{3}{2+3+5} + 90 \times \frac{5}{2+3+5} = 17+24+45=86$ (分).

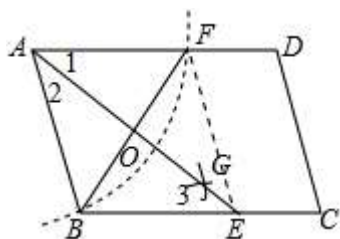
答案：D

7. 如图，在 $\square ABCD$ 中，用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线 AG 交 BC 于点 E . 若 $BF=6$, $AB=5$, 则 AE 的长为()



- A. 4
B. 6
C. 8
D. 10

解析：连结 EF , AE 与 BF 交于点 O , 如图,



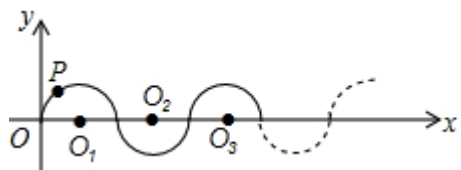
$\because AB=AF$, AO 平分 $\angle BAD$, $\therefore AO \perp BF$, $BO=FO=\frac{1}{2}BF=3$,

\because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AF \parallel BE$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$, $\therefore \angle 2 = \angle 3$, $\therefore AB=EB$,

而 $BO \perp AE$, $\therefore AO=OE$, 在 $Rt\triangle AOB$ 中, $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $\therefore AE=2AO=8$.

答案：C.

8. 如图所示，在平面直角坐标系中，半径均为 1 个单位长度的半圆 O_1 、 O_2 、 O_3 、 \dots 组成一条平滑的曲线，点 P 从原点 O 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，则第 2015 秒时，点 P 的坐标是()



- A. (2014, 0)
B. (2015, -1)
C. (2015, 1)

D. (2016, 0)

解析：半径为 1 个单位长度的半圆的周长为： $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 = \pi$ ，

\therefore 点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度， \therefore 点 P 1 秒走 $\frac{1}{2}$ 个半圆，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 1 秒时，点 P 的坐标为 (1, 1)，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 2 秒时，点 P 的坐标为 (2, 0)，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 3 秒时，点 P 的坐标为 (3, -1)，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 4 秒时，点 P 的坐标为 (4, 0)，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 5 秒时，点 P 的坐标为 (5, 1)，

当点 P 从原点 0 出发，沿这条曲线向右运动，运动时间为 6 秒时，点 P 的坐标为 (6, 0)，

...

$\therefore 2015 \div 4 = 503 \cdots 3$ ， $\therefore A_{2015}$ 的坐标是 (2015, -1)。

答案：B.

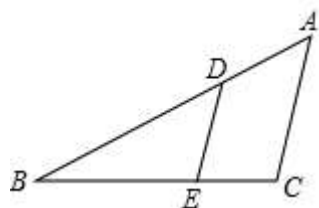
二、填空题(共 7 小题，每小题 3 分，满分 21 分)

9. 计算： $(-3)^0 + 3^{-1} =$ _____.

解析： $(-3)^0 + 3^{-1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

答案： $\frac{4}{3}$

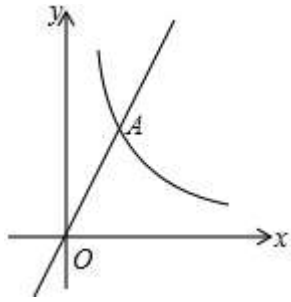
10. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、BC 上， $DE \parallel AC$ 。若 $BD=4$ ， $DA=2$ ， $BE=3$ ，则 $EC=$ _____.



解析： $\because DE \parallel AC$ ， $\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ ，即 $\frac{4}{2} = \frac{3}{EC}$ ，解得： $EC = \frac{3}{2}$ 。

答案： $\frac{3}{2}$

11. 如图，直线 $y=kx$ 与双曲线 $y=\frac{2}{x}$ ($x>0$) 交于点 A(1, a)，则 $k=$ _____.



解析：∵直线 $y=kx$ 与双曲线 $y=\frac{2}{x}$ ($x>0$) 交于点 $A(1, a)$ ，∴ $a=2$ ， $k=2$.

答案：2

12. 已知点 $A(4, y_1)$ ， $B(\sqrt{2}, y_2)$ ， $C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象上，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是_____.

解析：把 $A(4, y_1)$ ， $B(\sqrt{2}, y_2)$ ， $C(-2, y_3)$ 分别代入 $y=(x-2)^2-1$ 得：

$$y_1=(x-2)^2-1=3, \quad y_2=(x-2)^2-1=5-4\sqrt{2}, \quad y_3=(x-2)^2-1=15,$$

$$\because 5-4\sqrt{2} < 3 < 15, \quad \therefore y_3 > y_1 > y_2.$$

答案： $y_3 > y_1 > y_2$.

13. 现有四张分别标有 1, 2, 2, 3 的卡片，它们除数字外完全相同，把卡片背面向上洗匀，从中随机抽取一张后放回，再背面向上洗匀，从中随机抽出一张，则两次抽出的卡片所标数字不同的概率是_____.

解析：列表得：

	1	2	2	3
1	11	12	12	13
2	21	22	22	23
2	21	22	22	23
3	31	32	32	33

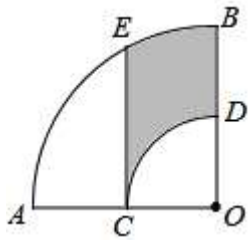
∵共有 16 种等可能的结果，两次抽出的卡片所标数字不同的有 10 种，

∴两次抽出的卡片所标数字不同的概率是 $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

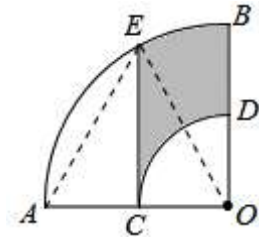
答案： $\frac{5}{8}$.

14. 如图，在扇形 AOB 中， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 C 为 OA 的中点， $CE \perp OA$ 交弧 AB 于点 E ，以点 O

为圆心，OC 的长为半径作弧 CD 交 OB 于点 D. 若 OA=2，则阴影部分的面积为_____.



解析：连接 OE、AE，



∵点 C 为 OA 的中点，∴ $\angle CEO=30^\circ$ ， $\angle EOC=60^\circ$ ，∴ $\triangle AEO$ 为等边三角形，

$$\therefore S_{\text{扇形}AOE} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}ABO} - S_{\text{扇形}CDO} - (S_{\text{扇形}AOE} - S_{\triangle COE})$$

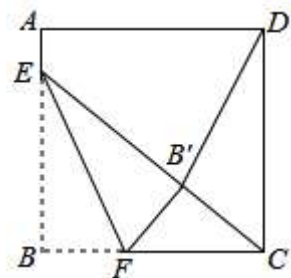
$$= \frac{90\pi \times 2^2}{360} - \frac{90\pi \times 1^2}{360} - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

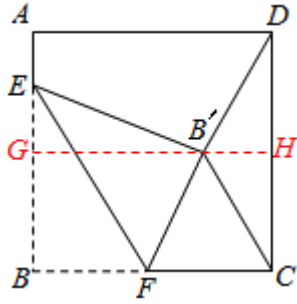
答案： $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. 如图，正方形 ABCD 的边长是 16，点 E 在边 AB 上，AE=3，点 F 是边 BC 上不与点 B，C 重合的一个动点，把 $\triangle EBF$ 沿 EF 折叠，点 B 落在 B' 处. 若 $\triangle CDB'$ 恰为等腰三角形，则 DB' 的长为_____.



解析：(i) 当 $B'D=B'C$ 时，

过 B' 点作 $GH \parallel AD$ ，则 $\angle B'GE=90^\circ$ ，



当 $B'C = B'D$ 时, $AG = DH = \frac{1}{2}DC = 8$,

由 $AE = 3$, $AB = 16$, 得 $BE = 13$.

由翻折的性质, 得 $B'E = BE = 13$. $\therefore EG = AG - AE = 8 - 3 = 5$,

$$\therefore B'G = \sqrt{B'E^2 - EG^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\therefore B'H = GH - B'G = 16 - 12 = 4, \therefore DB' = \sqrt{B'H^2 + DH^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

(ii) 当 $DB' = CD$ 时, 则 $DB' = 16$ (易知点 F 在 BC 上且不与点 C 、 B 重合).

(iii) 当 $CB' = CD$ 时,

$\because EB = EB'$, $CB = CB'$, \therefore 点 E 、 C 在 BB' 的垂直平分线上, $\therefore EC$ 垂直平分 BB' , 由折叠可知点 F 与点 C 重合, 不符合题意, 舍去.

综上所述, DB' 的长为 16 或 $4\sqrt{5}$.

答案: 16 或 $4\sqrt{5}$.

三、解答题(共 8 小题, 满分 75 分)

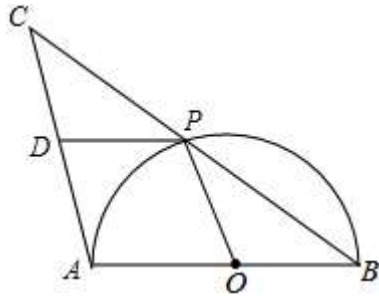
16. 先化简, 再求值: $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2a - 2b} \div (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$, 其中 $a = \sqrt{5} + 1$, $b = \sqrt{5} - 1$.

解析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 把 a 与 b 的值代入计算即可求出值.

$$\text{答案: 原式} = \frac{(a-b)^2}{2(a-b)} \cdot \frac{ab}{a-b} = \frac{ab}{2},$$

当 $a = \sqrt{5} + 1$, $b = \sqrt{5} - 1$ 时, 原式 = 2.

17. 如图, AB 是半圆 O 的直径, 点 P 是半圆上不与点 A 、 B 重合的一个动点, 延长 BP 到点 C , 使 $PC = PB$, D 是 AC 的中点, 连接 PD 、 PO .



(1) 求证: $\triangle CDP \cong \triangle POB$;

(2) 填空:

①若 $AB=4$, 则四边形 AOPD 的最大面积为_____;

②连接 OD, 当 $\angle PBA$ 的度数为_____时, 四边形 BPDO 是菱形.

解析: (1) 根据中位线的性质得到 $DP \parallel AB$, $DP = \frac{1}{2} AB$, 由 SAS 可证 $\triangle CDP \cong \triangle POB$;

(2) ①当四边形 AOPD 的 AO 边上的高等于半径时有最大面积, 依此即可求解;

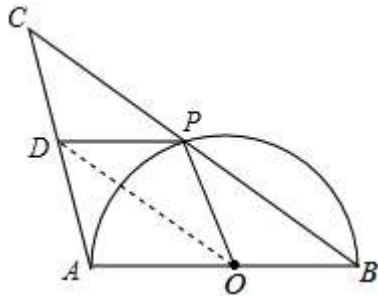
②根据有一组对应边平行且相等的四边形是平行四边形, 可得四边形 BPDO 是平行四边形, 再根据邻边相等的平行四边形是菱形, 以及等边三角形的判定和性质即可求解.

答案: (1) $\because PC=PB$, D 是 AC 的中点, $\therefore DP \parallel AB$, $\therefore DP = \frac{1}{2} AB$, $\angle CPD = \angle PBO$,

$\because BO = \frac{1}{2} AB$, $\therefore DP=BO$, 在 $\triangle CDP$ 与 $\triangle POB$ 中, $\begin{cases} DP = BO, \\ \angle CPD = \angle PBO, \\ PC = PB, \end{cases} \therefore \triangle CDP \cong \triangle POB (SAS).$

(2) ①当四边形 AOPD 的 AO 边上的高等于半径时有最大面积, $(4 \div 2) \times (4 \div 2) = 2 \times 2 = 4$.

②如图:



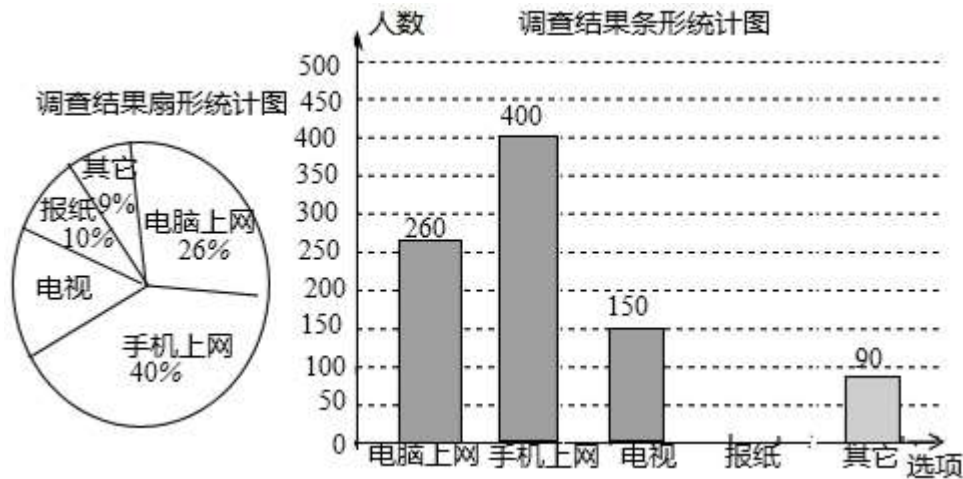
$\because DP \parallel AB$, $DP=BO$, \therefore 四边形 BPDO 是平行四边形,

\because 四边形 BPDO 是菱形, $\therefore PB=BO$,

$\because PO=BO$, $\therefore PB=BO=PO$, $\therefore \triangle PBO$ 是等边三角形, $\therefore \angle PBA$ 的度数为 60° .

故答案为: 4; 60° .

18. 为了了解市民“获取新闻的最主要途径”某市记者开展了一次抽样调查, 根据调查结果绘制了如下尚不完整的统计图.



根据以上信息解答下列问题：

- (1) 这次接受调查的市民总人数是_____；
- (2) 扇形统计图中，“电视”所对应的圆心角的度数是_____；
- (3) 请补全条形统计图；
- (4) 若该市约有 80 万人，请你估计其中将“电脑和手机上网”作为“获取新闻的最主要途径”的总人数。

解析：(1) 根据“电脑上网”的人数和所占的百分比求出总人数；

(2) 用“电视”所占的百分比乘以 360° ，即可得出答案；

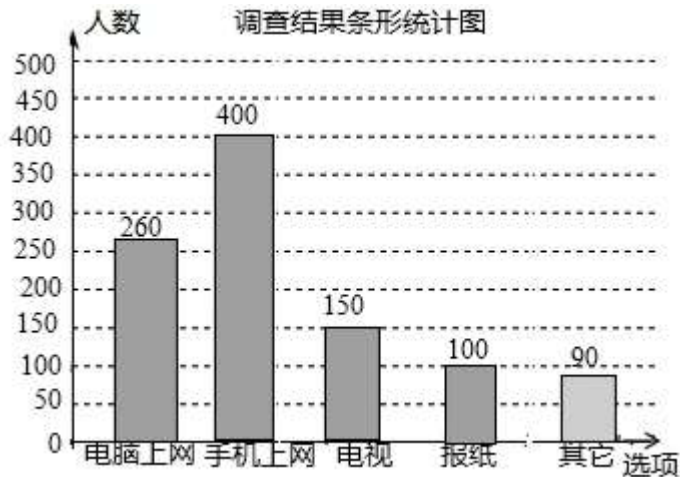
(3) 用总人数乘以“报纸”所占百分比，求出“报纸”的人数，从而补全统计图；

(4) 用全市的总人数乘以“电脑和手机上网”所占的百分比，即可得出答案。

答案：(1) 这次接受调查的市民总人数是： $260 \div 26\% = 1000$ ；

(2) 扇形统计图中，“电视”所对应的圆心角的度数为： $(1 - 40\% - 26\% - 9\% - 10\%) \times 360^\circ = 54^\circ$ ；

(3) “报纸”的人数为： $1000 \times 10\% = 100$ 。补全图形如图所示：



(4) 估计将“电脑和手机上网”作为“获取新闻的最主要途径”的总人数为： $80 \times (26\% + 40\%) = 80 \times 66\% = 52.8$ (万人)。

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2) = |m|$ 。

(1) 求证：对于任意实数 m ，方程总有两个不相等的实数根；

(2) 若方程的一个根是 1，求 m 的值及方程的另一个根。

解析：(1) 要证明方程有两个不相等的实数根，即证明 $\Delta > 0$ 即可；

(2) 将 $x=1$ 代入方程 $(x-3)(x-2)=|m|$, 求出 m 的值, 进而得出方程的解.

答案: (1) $\because (x-3)(x-2)=|m|, \therefore x^2-5x+6-|m|=0,$

$\therefore \Delta=(-5)^2-4(6-|m|)=1+4|m|,$

而 $|m| \geq 0, \therefore \Delta > 0, \therefore$ 方程总有两个不相等的实数根;

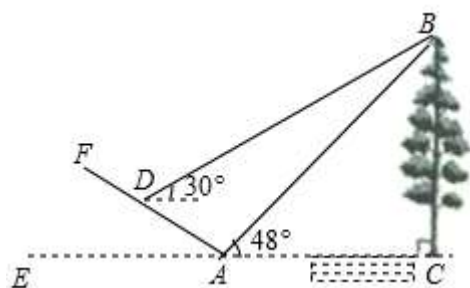
(2) \because 方程的一个根是 1, $\therefore |m|=2,$ 解得: $m=\pm 2,$

\therefore 原方程为: $x^2-5x+4=0,$ 解得: $x_1=1, x_2=4.$

即 m 的值为 $\pm 2,$ 方程的另一个根是 4.

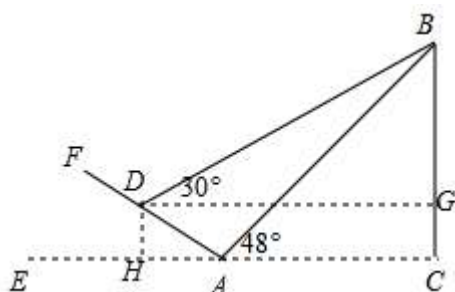
20. 如图所示, 某数学活动小组选定测量小河对岸大树 BC 的高度, 他们在斜坡上 D 处测得大树顶端 B 的仰角是 30° , 朝大树方向下坡走 6 米到达坡底 A 处, 在 A 处测得大树顶端 B 的仰角是 48° , 若坡角 $\angle FAE=30^\circ$, 求大树的高度 (结果保留整数, 参考数据: $\sin 48^\circ \approx 0.74,$

$\cos 48^\circ \approx 0.67, \tan 48^\circ \approx 1.11, \sqrt{3} \approx 1.73$)



解析: 根据矩形性质得出 $DG=CH, CG=DH,$ 再利用锐角三角函数的性质求出问题即可.

答案: 如图, 过点 D 作 $DG \perp BC$ 于 $G, DH \perp CE$ 于 $H,$



则四边形 $DHCG$ 为矩形. 故 $DG=CH, CG=DH,$

在直角三角形 AHD 中,

$\because \angle DAH=30^\circ, AD=6, \therefore DH=3, AH=3\sqrt{3}, \therefore CG=3,$

设 BC 为 $x,$ 在直角三角形 ABC 中, $AC = \frac{BC}{\tan \angle BAC} = \frac{x}{1.11}, \therefore DG = 3\sqrt{3} + \frac{x}{1.11}, BG = x - 3,$

在直角三角形 BDG 中, $\because BG = DG \cdot \tan 30^\circ,$

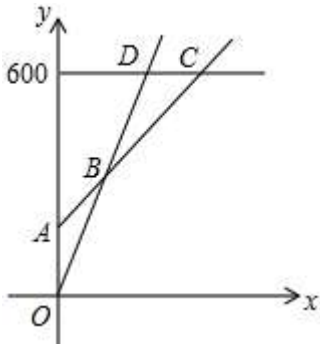
$\therefore x - 3 = (3\sqrt{3} + \frac{x}{1.11}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ 解得: $x \approx 13, \therefore$ 大树的高度为: 13 米.

21. 某游泳馆普通票价 20 元/张, 暑假为了促销, 新推出两种优惠卡:

①金卡售价 600 元/张, 每次凭卡不再收费.

②银卡售价 150 元/张，每次凭卡另收 10 元.

暑假普通票正常出售，两种优惠卡仅限暑假使用，不限次数. 设游泳 x 次时，所需总费用为 y 元.



- (1) 分别写出选择银卡、普通票消费时， y 与 x 之间的函数关系式；
- (2) 在同一坐标系中，若三种消费方式对应的函数图象如图所示，请求出点 A、B、C 的坐标；
- (3) 请根据函数图象，直接写出选择哪种消费方式更合算.

解析：(1) 根据银卡售价 150 元/张，每次凭卡另收 10 元，以及旅游馆普通票价 20 元/张，设游泳 x 次时，分别得出所需总费用为 y 元与 x 的关系式即可；

(2) 利用函数交点坐标求法分别得出即可；

(3) 利用 (2) 的点的坐标以及结合得出函数图象得出答案.

答案：(1) 由题意可得：银卡消费： $y=10x+150$ ，普通消费： $y=20x$ ；

(2) 由题意可得：当 $10x+150=20x$ ，解得： $x=15$ ，则 $y=300$ ，故 B(15, 300)，

当 $y=10x+150$ ， $x=0$ 时， $y=150$ ，故 A(0, 150)，

当 $y=10x+150=600$ ，解得： $x=45$ ，则 $y=600$ ，故 C(45, 600)；

(3) 如图所示：由 A，B，C 的坐标可得：

当 $0 < x < 15$ 时，普通消费更划算；

当 $x=15$ 时，银卡、普通票的总费用相同，均比金卡合算；

当 $15 < x < 45$ 时，银卡消费更划算；

当 $x=45$ 时，金卡、银卡的总费用相同，均比普通片合算；

当 $x > 45$ 时，金卡消费更划算.

22. 如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $BC=2AB=8$ ，点 D、E 分别是边 BC、AC 的中点，连接 DE，将 $\triangle EDC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，记旋转角为 α .

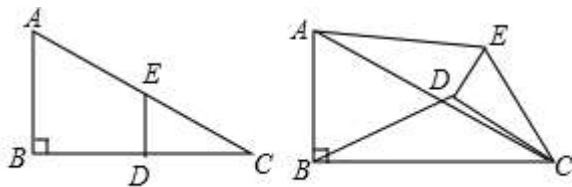


图1

图2

(1) 问题发现

①当 $\alpha=0^\circ$ 时， $\frac{AE}{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；②当 $\alpha=180^\circ$ 时， $\frac{AE}{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 拓展探究

试判断：当 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 时， $\frac{AE}{BD}$ 的大小有无变化？请仅就图 2 的情形给出证明.

(3) 问题解决

当 $\triangle EDC$ 旋转至 A, D, E 三点共线时，直接写出线段 BD 的长.

解析：(1) ①当 $\alpha = 0^\circ$ 时，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，求出 AC 的值是多少；然后根据点 D、E 分别是边 BC、AC 的中点，分别求出 AE、BD 的大小，即可求出 $\frac{AE}{BD}$ 的值是多少.

② $\alpha = 180^\circ$ 时，可得 $AB \parallel DE$ ，然后根据 $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BD}$ ，求出 $\frac{AE}{BD}$ 的值是多少即可.

(2) 首先判断出 $\angle ECA = \angle DCB$ ，再根据 $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，判断出 $\triangle ECA \sim \triangle DCB$ ，即可求出 $\frac{AE}{BD}$

的值是多少，进而判断出 $\frac{AE}{BD}$ 的大小没有变化即可.

(3) 根据题意，分两种情况：①点 A, D, E 所在的直线和 BC 平行时；②点 A, D, E 所在的直线和 BC 相交时；然后分类讨论，求出线段 BD 的长各是多少即可.

答案：(1) ①当 $\alpha = 0^\circ$ 时，

$$\because \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle B = 90^\circ, \therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(8 \div 2)^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\because \text{点 D、E 分别是边 BC、AC 的中点, } \therefore AE = 4\sqrt{5} \div 2 = 2\sqrt{5}, BD = 8 \div 2 = 4,$$

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

②如图 1，

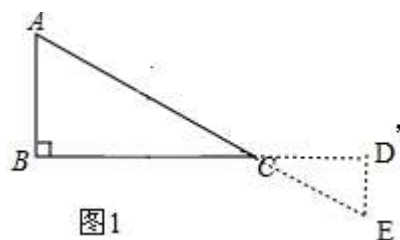


图1

$$\text{当 } \alpha = 180^\circ \text{ 时, 可得 } AB \parallel DE, \therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BD}, \therefore \frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(2) 如图 2，

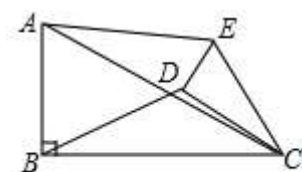


图2

当 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 时, $\frac{AE}{BD}$ 的大小没有变化,

$\because \angle ECD = \angle ACB, \therefore \angle ECA = \angle DCB,$

又 $\because \frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \therefore \triangle ECA \sim \triangle DCB, \therefore \frac{AE}{BD} = \frac{EC}{DC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

(3) ①如图 3,

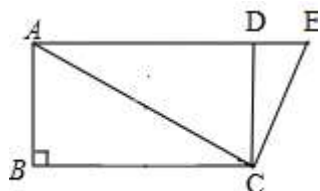


图3

$\because AC = 4\sqrt{5}, CD = 4, CD \perp AD,$

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{80 - 16} = 8,$

$\because AD = BC, AB = DC, \angle B = 90^\circ, \therefore$ 四边形 ABCD 是矩形, $\therefore BD = AC = 4\sqrt{5}.$

②如图 4, 连接 BD, 过点 D 作 AC 的垂线交 AC 于点 Q, 过点 B 作 AC 的垂线交 AC 于点 P,

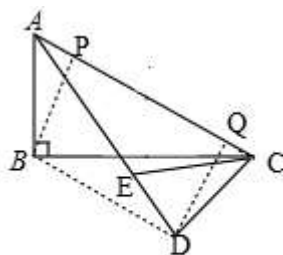


图4

$\because AC = 4\sqrt{5}, CD = 4, CD \perp AD, \therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{80 - 16} = 8,$

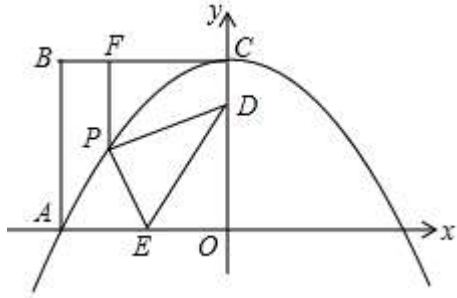
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中, $\begin{cases} AB = CD, \\ BC = DA, \therefore BP = DQ, BP \parallel DQ, PQ \perp DQ, \\ AC = CA, \end{cases}$

\therefore 四边形 BDQP 为矩形,

$\therefore BD = PQ = AC - AP - CQ = 4\sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$

综上所述, BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}.$

23. 如图, 边长为 8 的正方形 OABC 的两边在坐标轴上, 以点 C 为顶点的抛物线经过点 A, 点 P 是抛物线上点 A, C 间的一个动点 (含端点), 过点 P 作 $PF \perp BC$ 于点 F, 点 D、E 的坐标分别为 (0, 6), (-4, 0), 连接 PD、PE、DE.



(1) 请直接写出抛物线的解析式；

(2) 小明探究点 P 的位置发现：当 P 与点 A 或点 C 重合时，PD 与 PF 的差为定值，进而猜想：对于任意一点 P，PD 与 PF 的差为定值，请你判断该猜想是否正确，并说明理由；

(3) 小明进一步探究得出结论：若将“使 $\triangle PDE$ 的面积为整数”的点 P 记作“好点”，则存在多个“好点”，且使 $\triangle PDE$ 的周长最小的点 P 也是一个“好点”。请直接写出所有“好点”的个数，并求出 $\triangle PDE$ 周长最小时“好点”的坐标。

解析：(1) 利用待定系数法求出抛物线解析式即可；

(2) 首先表示出 P, F 点坐标，再利用两点之间距离公式得出 PD, PF 的长，进而求出即可；

(3) 根据题意当 P、E、F 三点共线时，PE+PF 最小，进而得出 P 点坐标以及利用 $\triangle PDE$ 的面积可以等于 4 到 13 所有整数，在面积为 12 时，a 的值有两个，进而得出答案。

答案：(1) \because 边长为 8 的正方形 OABC 的两边在坐标轴上，以点 C 为顶点的抛物线经过点 A， $\therefore C(0, 8), A(-8, 0)$,

$$\text{设抛物线解析式为：} y = ax^2 + c, \text{ 则 } \begin{cases} c = 8, \\ 64a + c = 0, \end{cases} \text{ 解得： } \begin{cases} a = -\frac{1}{8}, \\ c = 8, \end{cases}$$

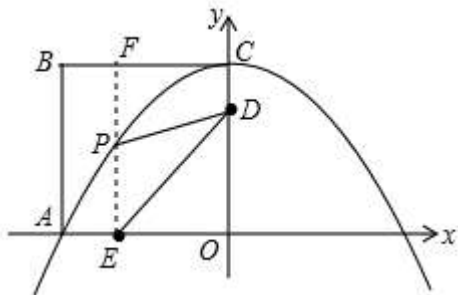
$$\text{故抛物线的解析式为：} y = -\frac{1}{8}x^2 + 8.$$

(2) 正确，理由：设 $P(a, -\frac{1}{8}a^2 + 8)$ ，则 $F(a, 8)$ ，

$$\because D(0, 6), \therefore PD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{8}a^2 - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}a^2 + 2\right)^2} = \frac{1}{8}a^2 + 2,$$

$$PF = 8 - \left(-\frac{1}{8}a^2 + 8\right) = \frac{1}{8}a^2, \therefore PD - PF = 2.$$

(3) 在点 P 运动时，DE 大小不变，则 PE 与 PD 的和最小时， $\triangle PDE$ 的周长最小，



$\because PD - PF = 2, \therefore PD = PF + 2, \therefore PE + PD = PE + PF + 2, \therefore$ 当 P、E、F 三点共线时，PE+PF 最小，此时点 P, E 的横坐标都为 -4，

将 $x=-4$ 代入 $y=-\frac{1}{8}x^2+8$, 得 $y=6$,

$\therefore P(-4, 6)$, 此时 $\triangle PDE$ 的周长最小, 且 $\triangle PDE$ 的面积为 12, 点 P 恰为“好点,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长最小时”好点“的坐标为: $(-4, 6)$,

由(2)得: $P(a, -\frac{1}{8}a^2+8)$,

\therefore 点 D、E 的坐标分别为 $(0, 6)$, $(-4, 0)$, \therefore 设直线 DE 的解析式为: $y=kx+b$,

$$\text{则} \begin{cases} b=6, \\ -4k+b=0, \end{cases} \text{解得:} \begin{cases} k=\frac{3}{2}, \\ b=6, \end{cases}$$

$\therefore l_{DE}: y=\frac{3}{2}x+6$, 则 $PE=-\frac{1}{8}a^2+8-\frac{3}{2}a-6$,

$\therefore S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2} \times 4 \times (-\frac{1}{8}a^2+8-\frac{3}{2}a-6)=-\frac{1}{4}a^2-3a+4=-\frac{1}{4}(a+6)^2+13$,

$\therefore -8 \leq a \leq 0$, $\therefore 4 \leq S_{\triangle PDE} \leq 13$,

$\therefore \triangle PDE$ 的面积可以等于 4 到 13 所有整数, 在面积为 12 时, a 的值有两个,

所以面积为整数时好点有 11 个, 经过验证周长最小的好点包含这 11 个之内, 所以好点共 11 个,

综上所述: 11 个好点, $P(-4, 6)$.