

## 2015 年山西省中考真题数学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

1. 计算  $-3 + (-1)$  的结果是（ ）

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

解析： $-3 + (-1) = -(3+1) = -4$ ，

答案：D.

2. 下列运算错误的是（ ）

A.  $(\frac{1}{2})^0 = 1$

B.  $x^2 + x^2 = 2x^4$

C.  $|a| = -a$

D.  $(\frac{b}{a^2})^3 = \frac{b^3}{a^6}$

解析：A、原式=1，正确；

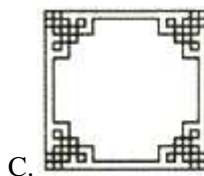
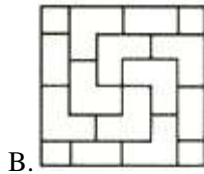
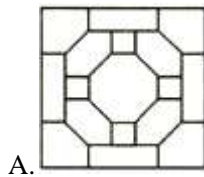
B、原式=2x<sup>2</sup>，错误；

C、 $|a| = -a$ ，正确；

D、原式=  $\frac{b^3}{a^6}$ ，正确，

答案：B

3. 晋商大院的许多窗格图案蕴含着对称之美，现从中选取以下四种窗格图案，其中是中心对称图形但不是轴对称图形的是（ ）





D.

解析：A、是轴对称图形，也是中心对称图形.故错误；

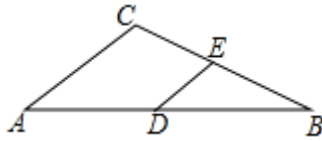
B、不是轴对称图形，是中心对称图形.故正确；

C、是轴对称图形，也是中心对称图形.故错误；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形.故错误.

答案：B.

4.如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D、E分别是边AB，BC的中点.若 $\triangle DBE$ 的周长是6，则 $\triangle ABC$ 的周长是（ ）



A.8

B.10

C.12

D.14

解析： $\because$ 点D、E分别是边AB，BC的中点，

$\therefore DE$ 是三角形BC的中位线， $AB=2BD$ ， $BC=2BE$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}AC$ ，

又 $\because AB=2BD$ ， $BC=2BE$ ，

$\therefore AB+BC+AC=2(BD+BE+DE)$ ，

即 $\triangle ABC$ 的周长是 $\triangle DBE$ 的周长的2倍，

$\because \triangle DBE$ 的周长是6，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长是：

$6 \times 2 = 12$ .

答案：C.

5.我们解一元二次方程 $3x^2 - 6x = 0$ 时，可以运用因式分解法，将此方程化为 $3x(x - 2) = 0$ ，从而得到两个一元一次方程： $3x = 0$ 或 $x - 2 = 0$ ，进而得到原方程的解为 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ .这种解法体现的数学思想是（ ）

A.转化思想

B.函数思想

C.数形结合思想

D.公理化思想

解析：我们解一元二次方程 $3x^2 - 6x = 0$ 时，可以运用因式分解法，将此方程化为 $3x(x - 2) = 0$ ，

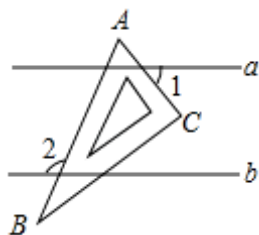
从而得到两个一元一次方程： $3x = 0$ 或 $x - 2 = 0$ ，

进而得到原方程的解为 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ .

这种解法体现的数学思想是转化思想，

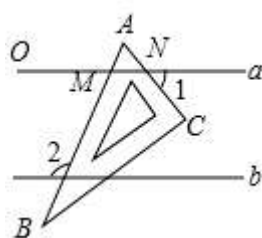
答案：A.

6.如图,直线  $a \parallel b$ , 一块含  $60^\circ$  角的直角三角板  $ABC$  ( $\angle A=60^\circ$ ) 按如图所示放置.若  $\angle 1=55^\circ$ , 则  $\angle 2$  的度数为 ( )



- A.  $105^\circ$
- B.  $110^\circ$
- C.  $115^\circ$
- D.  $120^\circ$

解析: 如图,  $\because$  直线  $a \parallel b$ ,



$\therefore \angle AMO = \angle 2$ ;  
 $\because \angle ANM = \angle 1$ , 而  $\angle 1 = 55^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ANM = 55^\circ$ ,  
 $\therefore \angle AMO = \angle A + \angle ANM = 60^\circ + 55^\circ = 115^\circ$ ,

答案: C.

7.化简  $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a-b}$  的结果是 ( )

- A.  $\frac{a}{a-b}$
- B.  $\frac{b}{a-b}$
- C.  $\frac{a}{a+b}$
- D.  $\frac{b}{a+b}$

解析: 原式 =  $\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} - \frac{b}{a-b}$

$$= \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{a-b}$$

$$= \frac{a+b-b}{a-b}$$

$$= \frac{a}{a-b}$$

答案：A.

8.我国古代秦汉时期有一部数学著作，堪称是世界数学经典名著.它的出现，标志着我国古代数学体系的正式确立.它采用按类分章的问题集的形式进行编排.其中方程的解法和正负数加减运算法则在世界上遥遥领先，这部著作的名称是（ ）



- A.《九章算术》
- B.《海岛算经》
- C.《孙子算经》
- D.《五经算术》

解析：此著作是《九章算术》，

答案：A.

9.某校举行春季运动会，需要在初一年级选取一名志愿者.初一（1）班、初一（2）班、初一（3）班各有2名同学报名参加.现从这6名同学中随机选取一名志愿者，则被选中的这名同学恰好是初一（3）班同学的概率是（ ）

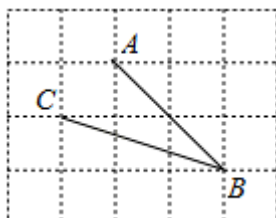
- A.  $\frac{1}{6}$
- B.  $\frac{1}{3}$
- C.  $\frac{1}{2}$
- D.  $\frac{2}{3}$

解析：∵共有6名同学，初一3班有2人，

$$\therefore P(\text{初一3班}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

答案：B.

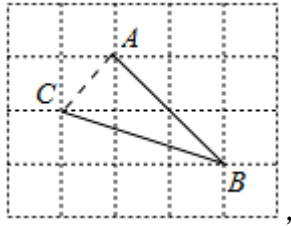
10.如图，在网格中，小正方形的边长均为1，点A，B，C都在格点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是（ ）



- A.2
- B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D.  $\frac{1}{2}$



解析：如图：

由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{2}, AB=2\sqrt{2}, BC=\sqrt{10},$$

$\therefore \triangle ABC$  为直角三角形，

$$\therefore \tan \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

答案：D.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 不等式组  $\begin{cases} 2x-1 > 7 \\ 3x > 6 \end{cases}$  的解集是\_\_\_\_\_.

解析：  $\begin{cases} 2x-1 > 7 \text{ ①} \\ 3x > 6 \text{ ②} \end{cases}$ ,

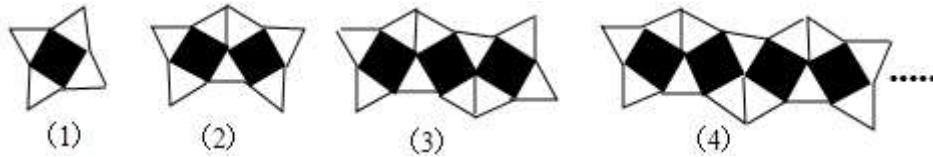
由①得：  $x > 4$ ,

由②得：  $x > 2$ ,

不等式组的解集为：  $x > 4$ .

答案：  $x > 4$ .

12. 如图是一组有规律的图案，它们是由边长相同的正方形和正三角形镶嵌而成，第（1）个图案有 4 个三角形，第（2）个图案有 7 个三角形，第（3）个图案有 10 个三角形，...依此规律，第  $n$  个图案有\_\_\_\_\_个三角形（用含  $n$  的代数式表示）



解析：  $\because$  第（1）个图案有  $3+1=4$  个三角形，

第（2）个图案有  $3 \times 2+1=7$  个三角形，

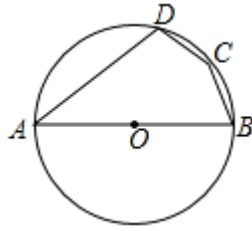
第（3）个图案有  $3 \times 3+1=10$  个三角形，

...

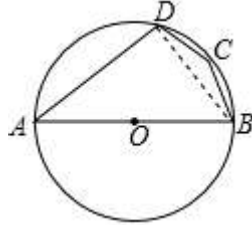
$\therefore$  第  $n$  个图案有  $3n+1$  个三角形.

答案：  $3n+1$ .

13. 如图，四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ， $AB$  为  $\odot O$  的直径，点  $C$  为  $\widehat{BD}$  的中点. 若  $\angle A=40^\circ$ ，则  $\angle B=$ \_\_\_\_\_度.



解析：连接 BD，

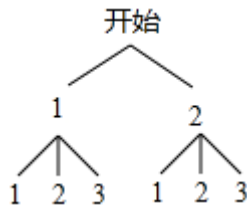


$\because AB$  为  $\odot O$  的直径，  
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，  
 $\because \angle A = 40^\circ$ ，  
 $\therefore \angle ABD = 90^\circ - \angle A = 50^\circ$ ，  $\angle C = 180^\circ - \angle A = 140^\circ$ ，  
 $\because$  点  $C$  为  $\widehat{BD}$  的中点，  
 $\therefore CD = CB$ ，  
 $\therefore \angle CBD = \angle CDB = 20^\circ$ ，  
 $\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 70^\circ$ 。

答案：  $70^\circ$ 。

14. 现有两个不透明的盒子，其中一个装有标号分别为 1, 2 的两张卡片，另一个装有标号分别为 1, 2, 3 的三张卡片，卡片除标号外其他均相同。若从两个盒子中各随机抽取一张卡片，则两张卡片标号恰好相同的概率是\_\_\_\_\_。

解析：画树状图得：

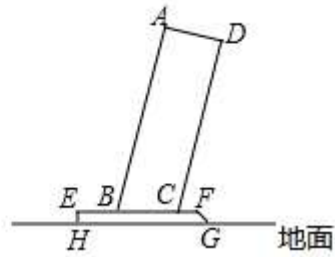


$\because$  共有 6 种等可能的结果，两张卡片标号恰好相同的有 2 种情况，

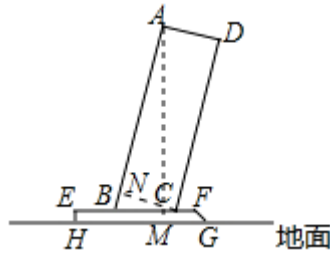
$\therefore$  两张卡片标号恰好相同的概率是： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

答案： $\frac{1}{3}$ 。

15. 太原市公共自行车的建设速度、单日租骑量等四项指标稳居全国首位。公共自行车车桩的截面示意图如图所示， $AB \perp AD$ ， $AD \perp DC$ ，点  $B, C$  在  $EF$  上， $EF \parallel HG$ ， $EH \perp HG$ ， $AB = 80\text{cm}$ ， $AD = 24\text{cm}$ ， $BC = 25\text{cm}$ ， $EH = 4\text{cm}$ ，则点  $A$  到地面的距离是\_\_\_\_\_  $\text{cm}$ 。



解析：过点 A 作  $AM \perp BF$  于点 M，过点 F 作  $FN \perp AB$  于点 N，



$\because AD=24\text{cm}$ ，则  $BF=24\text{cm}$ ，

$$\therefore BN = \sqrt{BF^2 + FN^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 \text{ (cm)},$$

$\because \angle AMB = \angle FNB = 90^\circ$ ， $\angle ABM = \angle FBN$ ，

$\therefore \triangle BNF \sim \triangle BMA$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{FN}{AM}$$

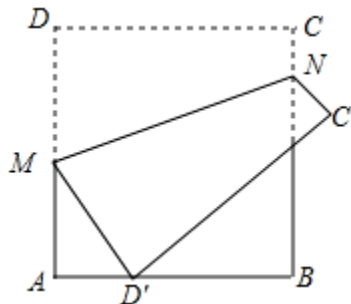
$$\therefore \frac{80}{25} = \frac{AM}{24}$$

则：
$$AM = \frac{16 \times 24}{5} = \frac{384}{5}$$

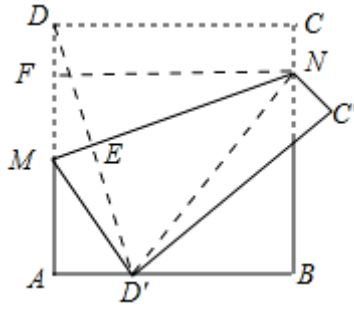
故点 A 到地面的距离是：
$$\frac{384}{5} + 4 = \frac{404}{5} \text{ (m)}.$$

答案：
$$\frac{404}{5}.$$

16.如图，将正方形纸片 ABCD 沿 MN 折叠，使点 D 落在边 AB 上，对应点为  $D'$ ，点 C 落在  $C'$  处.若  $AB=6$ ， $AD'=2$ ，则折痕 MN 的长为\_\_\_\_\_.



解析：作  $NF \perp AD$ ，垂足为 F，连接  $DD'$ ， $ND'$ ，



∵将正方形纸片 ABCD 折叠，使得点 D 落在边 AB 上的 D' 点，折痕为 MN，

∴ $DD' \perp MN$ ，

∴ $\angle A = \angle DEM = 90^\circ$ ， $\angle ADD' = \angle EDM$ ，

∴ $\triangle DAD' \sim \triangle DEM$ ，

∴ $\angle DD'A = \angle DME$ ，

在  $\triangle NFM$  和  $\triangle DAD'$  中

$$\begin{cases} \angle DD'A = \angle NMF \\ \angle A = \angle NFM \\ NF = DA \end{cases},$$

∴ $\triangle NFM \cong \triangle DAD'$  (AAS)，

∴ $FM = AD' = 2\text{cm}$ ，

又∵在  $\text{Rt}\triangle MNF$  中， $FN = 6\text{cm}$ ，

∴根据勾股定理得： $MN = \sqrt{FN^2 + FM^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$  .

答案： $2\sqrt{10}$  .

三、解答题（本大题共 8 个小题，共 72 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (1) 计算： $(-3-1) \times (-\frac{3}{2})^2 - 2^{-1} \div (-\frac{1}{2})^3$ .

(2) 解方程： $\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4x-2}$ .

解析：(1) 原式先计算乘方运算，再计算乘除运算，最后算加减运算即可得到结果；

(2) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

答案：(1) 原式 =  $-4 \times \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \div (-\frac{1}{8}) = -9 + 4 = -5$ ;

(2) 去分母得： $2 = 2x - 1 - 3$ ，

解得： $x = 3$ ，

经检验  $x = 3$  是分式方程的解.

18. 阅读与计算：请阅读以下材料，并完成相应的任务.

斐波那契（约 1170 - 1250）是意大利数学家，他研究了一列数，这列数非常奇妙，被称为斐波那契数列（按照一定顺序排列着的一列数称为数列）.后来人们在研究它的过程中，发现了许多意想不到的结果，在实际生活中，很多花朵（如梅花、飞燕草、万寿菊等）的瓣数恰是斐波那契数列中的数.斐波那契数列还有很多有趣的性质，在实际生活中也有广泛的应用.



斐波那契数列中的第  $n$  个数可以用  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$  表示 (其中,  $n \geq 1$ ) .

这是用无理数表示有理数的一个范例.

任务: 请根据以上材料, 通过计算求出斐波那契数列中的第 1 个数和第 2 个数.



解析: 分别把 1、2 代入式子化简求得答案即可.

答案: 第 1 个数, 当  $n=1$  时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

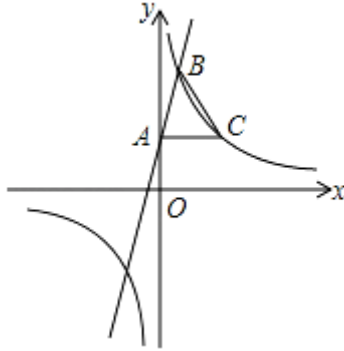
第 2 个数, 当  $n=2$  时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 \times \sqrt{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

19. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 一次函数  $y=3x+2$  的图象与  $y$  轴交于点  $A$ , 与反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 在第一象限内的图象交于点  $B$ , 且点  $B$  的横坐标为 1. 过点  $A$  作  $AC \perp y$  轴

交反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象于点  $C$ , 连接  $BC$ .

- (1) 求反比例函数的表达式.
- (2) 求  $\triangle ABC$  的面积.



解析：（1）先由一次函数  $y=3x+2$  的图象过点 B，且点 B 的横坐标为 1，将  $x=1$  代入  $y=3x+2$ ，求出  $y$  的值，得到点 B 的坐标，再将 B 点坐标代入  $y=\frac{k}{x}$ ，利用待定系数法即可求出反比例函数的表达式；

（2）先由一次函数  $y=3x+2$  的图象与  $y$  轴交于点 A，求出点 A 的坐标为  $(0, 2)$ ，再将  $y=2$  代入  $y=\frac{5}{x}$ ，求出  $x$  的值，那么  $AC=\frac{5}{2}$ 。过 B 作  $BD\perp AC$  于 D，则  $BD=y_B - y_C=5 - 2=3$ ，然后

根据  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ ，将数值代入计算即可求解。

答案：（1） $\because$  一次函数  $y=3x+2$  的图象过点 B，且点 B 的横坐标为 1，

$$\therefore y=3\times 1+2=5,$$

$\therefore$  点 B 的坐标为  $(1, 5)$ 。

$\because$  点 B 在反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  的图象上，

$$\therefore k=1\times 5=5,$$

$\therefore$  反比例函数的表达式为  $y=\frac{5}{x}$ ；

（2） $\because$  一次函数  $y=3x+2$  的图象与  $y$  轴交于点 A，

$\therefore$  当  $x=0$  时， $y=2$ ，

$\therefore$  点 A 的坐标为  $(0, 2)$ ，

$\because AC\perp y$  轴，

$\therefore$  点 C 的纵坐标与点 A 的纵坐标相同，是 2，

$\because$  点 C 在反比例函数  $y=\frac{5}{x}$  的图象上，

$\therefore$  当  $y=2$  时， $2=\frac{5}{x}$ ，解得  $x=\frac{5}{2}$ ，

$$\therefore AC=\frac{5}{2}.$$

过 B 作  $BD\perp AC$  于 D，则  $BD=y_B - y_C=5 - 2=3$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times \frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{4}.$$

20.随着互联网、移动终端的迅速发展，数字化阅读越来越普及，公交、地铁上的“低头族”越来越多。某研究机构针对“您如何看待数字化阅读”问题进行了随机问卷调查（问卷调查表如图 1 所示）并将调查结果绘制成图 2 和图 3 所示的统计图（均不完整）。请根据统计图中提供的信息，解答下列问题：

您如何看待数字化阅读问卷调查表	
您好！这是一份关于您如何看待数字化阅读问卷调查表，请在表格中选择一项您最认同的观点，在其后空格内打“√”，非常感谢您的合作。	
代码	观点
A	获取信息方便，可以随时随地观看
B	价格便宜易得
C	使得人们成为“低头族”，不利于人际交往
D	内容丰富，比纸质书涉猎更广
E	其他

图1

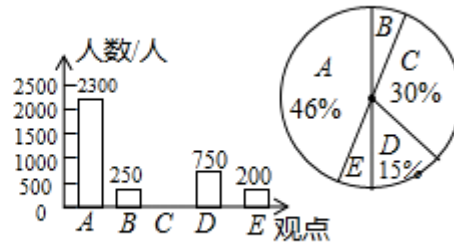


图2

图3

- (1) 本次接受调查的总人数是\_\_\_\_\_人.
- (2) 请将条形统计图补充完整.
- (3) 在扇形统计图中，观点 E 的百分比是\_\_\_\_\_，表示观点 B 的扇形的圆心角度数为\_\_\_\_\_度.
- (4) 假如你是该研究机构的一名成员，请根据以上调查结果，就人们如何对待数字化阅读提出你的建议.

解析：(1) 根据 D 类观点除以 D 类所占的百分比，可得调查的人数；

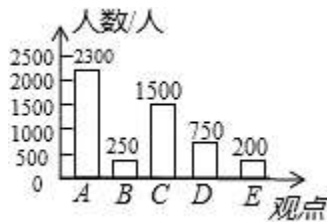
(2) 根据各类调查的人数，可得条形统计图；

(3) 根据 E 类人数除以调查的人数，可得答案，根据 B 类人数除以调查人数，再乘以  $360^\circ$ ，可得答案；

(4) 根据对调查数据的收集、整理，可得答案.

答案：(1) 本次接受调查的总人数是 5000 人

(2) C 类的人数为  $5000 - 2300 - 250 - 750 - 200 = 1500$  (人)，  
请将条形统计图补充完整



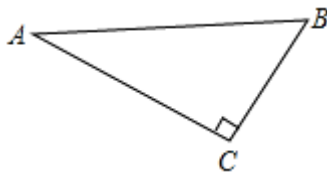
(3) 在扇形统计图中，观点 E 的百分比是 4%，表示观点 B 的扇形的圆心角度数为 18 度，  
故答案为：5000，4%，18.

(4) 应充分利用数字化阅读获取信息方便等优势，但不要成为“低头族”而影响人际交往.

21. 如图， $\triangle ABC$  是直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ .

(1) 尺规作图：作  $\odot C$ ，使它与  $AB$  相切于点  $D$ ，与  $AC$  相交于点  $E$ ，保留作图痕迹，不写作法，请标明字母.

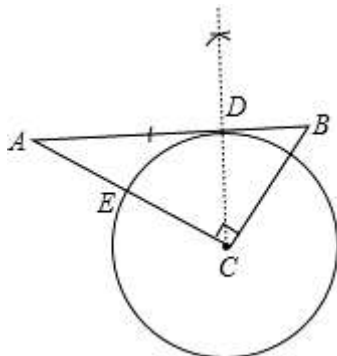
(2) 在你按 (1) 中要求所作的图中，若  $BC = 3$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，求  $\widehat{DE}$  的长.



解析：(1) 过点 C 作  $AB$  的垂线，垂足为点 D，然后以 C 点为圆心，CD 为半径作圆即可；

(2) 先根据切线的性质得  $\angle ADC=90^\circ$ ，则利用互余可计算出  $\angle DCE=90^\circ - \angle A=60^\circ$ ， $\angle BCD=90^\circ - \angle ACD=30^\circ$ ，再在  $Rt\triangle BCD$  中利用  $\angle BCD$  的余弦可计算出  $CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，然后根据弧长公式求解。

答案：(1) 如图，



⊙C 为所求；

(2)  $\because \odot C$  切  $AB$  于  $D$ ,

$\therefore CD \perp AB$ ,

$\therefore \angle ADC=90^\circ$ ,

$\therefore \angle DCE=90^\circ - \angle A=90^\circ - 30^\circ=60^\circ$ ,

$\therefore \angle BCD=90^\circ - \angle ACD=30^\circ$ ,

在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\because \cos \angle BCD = \frac{CD}{BC}$ ,

$$\therefore CD = 3 \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \widehat{DE} \text{ 的长} = \frac{60 \cdot \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi.$$

22. 某蔬菜经营户从蔬菜批发市场批发蔬菜进行零售，部分蔬菜批发价格与零售价格如表：

蔬菜品种	西红柿	青椒	西兰花	豆角
批发价 (元/kg)	3.6	5.4	8	4.8
零售价 (元/kg)	5.4	8.4	14	7.6

请解答下列问题：

(1) 第一天，该经营户批发西红柿和西兰花两种蔬菜共 300kg，用去了 1520 元钱，这两种蔬菜当天全部售完一共能赚多少元钱？

(2) 第二天，该经营户用 1520 元钱仍然批发西红柿和西兰花，要想当天全部售完后所赚钱数不少于 1050 元，则该经营户最多能批发西红柿多少 kg？

解析：(1) 设批发西红柿  $x$ kg，西兰花  $y$ kg，根据批发西红柿和西兰花两种蔬菜共 300kg，用去了 1520 元钱，列方程组求解；

(2) 设批发西红柿  $a$ kg，根据当天全部售完后所赚钱数不少于 1050 元，列不等式求解。

答案：(1) 设批发西红柿  $x$ kg，西兰花  $y$ kg，

$$\text{由题意得 } \begin{cases} x+y=300 \\ 3.6x+8y=1520 \end{cases},$$

解得： 
$$\begin{cases} x=200 \\ y=100 \end{cases}$$

故批发西红柿 200kg，西兰花 100kg，  
 则这两种蔬菜当天全部售完一共能赚：  $200 \times 1.8 + 100 \times 6 = 960$ （元），  
 答：这两种蔬菜当天全部售完一共能赚 960 元；

(2) 设批发西红柿  $a$ kg，

由题意得，  $(5.4 - 3.6)a + (14 - 8) \times \frac{1520 - 3.6a}{8} \geq 1050$ ,

解得：  $a \leq 100$ .

答：该经营户最多能批发西红柿 100kg.

### 23.综合与实践：制作无盖盒子

任务一：如图 1，有一块矩形纸板，长是宽的 2 倍，要将其四角各剪去一个正方形，折成高为 4cm，容积为  $616\text{cm}^3$  的无盖长方体盒子（纸板厚度忽略不计）.

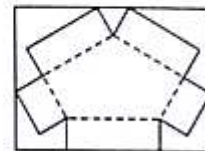
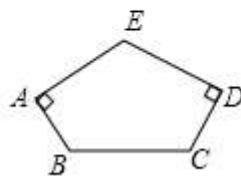
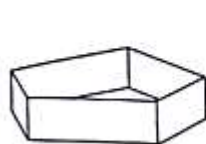
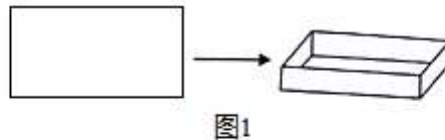
(1) 请在图 1 的矩形纸板中画出示意图，用实线表示剪切线，虚线表示折痕.

(2) 请求出这块矩形纸板的长和宽.

任务二：图 2 是一个高为 4cm 的无盖的五棱柱盒子（直棱柱），图 3 是其底面，在五边形 ABCDE 中，  $BC=12\text{cm}$ ，  $AB=DC=6\text{cm}$ ，  $\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$ ，  $\angle EAB=\angle EDC=90^\circ$ .

(1) 试判断图 3 中 AE 与 DE 的数量关系，并加以证明.

(2) 图 2 中的五棱柱盒子可按图 4 所示的示意图，将矩形纸板剪切折合而成，那么这个矩形纸板的长和宽至少各为多少 cm？请直接写出结果（图中实线表示剪切线，虚线表示折痕. 纸板厚度及剪切接缝处损耗忽略不计）.



解析： 任务一：(1) 按要求画出示意图即可；

(2) 设矩形纸板的宽为  $x\text{cm}$ ，则长为  $2x\text{cm}$ ，根据题意列出方程，解之即可.

任务二：(1)  $AD=DE$ ，延长 EA、ED 分别交直线 BC 于点 M、N，先证明  $EM=EN$ ，再证明  $\triangle MAB \cong \triangle NDC$ ，得到  $AM=DN$  即可；

(2) 如图 4，由 (1) 得：  $AE=DE$ ，  $\angle EAD=\angle EDA=30^\circ$ ，

由已知得，  $AG=DF=4$ ，连接 AD，GF，

过 B，C 分别作  $BM \perp AD$  于 M，  $CN \perp AD$  于 N，过 E 作  $EP \perp AD$  于 P，

则 GF 即为矩形纸板的长，  $MN=BC=12$ ，  $AP=DP$

得到  $\angle BAM=\angle CDN=60^\circ$ ，

求出  $AM=DN=3$ ，  $BM=CN=3\sqrt{3}$ ，

然后通过三角形相似即可得到结果.

解析：任务一：（1）如图 1 所示：

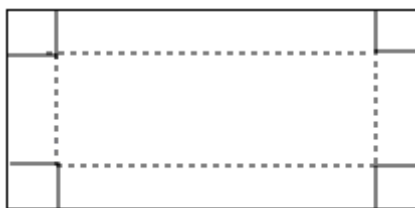


图1

（2）设矩形纸板的宽为  $x\text{cm}$ ，则长为  $2x\text{cm}$ ，

由题意得： $4(x - 2 \times 4)(2x - 2 \times 4) = 616$ ，解得： $x_1 = 15$ ， $x_2 = -3$ （舍去），

$\therefore 2x = 2 \times 15 = 30$ ，

答：矩形纸板的长为  $30\text{cm}$ ，宽为  $15\text{cm}$ ；

任务二：解：（1） $AE = DE$ ，证明如下：

延长  $EA$ ， $ED$  分别交直线  $BC$  于  $M$ ， $N$ ，

$\because \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ABM = \angle DCN = 60^\circ$ ，

$\because \angle EAB = \angle EDC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle M = \angle N = 30^\circ$ ，

$\therefore EM = EN$ ，

在  $\triangle MAB$  与  $\triangle NDC$  中，

$$\begin{cases} \angle M = \angle N \\ \angle ABM = \angle DCN, \\ AB = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAB \cong \triangle NDC$ ，

$\therefore AM = DN$ ，

$\therefore EM - AM = EN - DN$ ，

$\therefore AE = DE$ ；

（2）如图 4，由（1）得： $AE = DE$ ， $\angle EAD = \angle EDA = 30^\circ$ ，

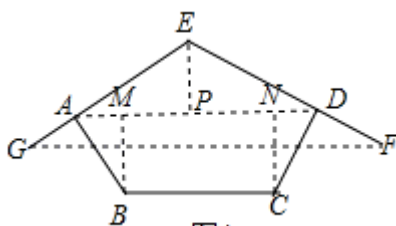


图4

由已知得， $AG = DF = 4$ ，连接  $AD$ ， $GF$ ，

过  $B$ ， $C$  分别作  $BM \perp AD$  于  $M$ ， $CN \perp AD$  于  $N$ ，过  $E$  作  $EP \perp AD$  于  $P$ ，

则  $GF$  即为矩形纸板的长， $MN = BC = 12$ ， $AP = DP$

$\therefore \angle BAM = \angle CDN = 60^\circ$ ，

$\because AB = CD = 6$ ，

$\therefore AM = DN = 3$ ， $BM = CN = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore AP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(3 + 3 + 12) = 9$ ，

$\therefore AE = 6\sqrt{3}$ ， $PE = 3\sqrt{3}$ ，

∵ AD // GF,

∴  $\triangle EAD \sim \triangle EGF$ ,

$$\therefore \frac{AE}{GE} = \frac{AD}{GF}$$

$$\therefore GF = 18 + 4\sqrt{3},$$

∴ 矩形纸板的长至少为  $18 + 4\sqrt{3}$ , 矩形纸板的宽至少为  $PE + BM + 2\sqrt{3} + 4 = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 = 4 + 8\sqrt{3}$ .

#### 24. 综合与探究

如图 1, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $W$  的函数表达式为  $y = -\frac{4}{21}x^2 + \frac{16}{21}x + 4$ . 抛物线  $W$

与  $x$  轴交于  $A, B$  两点 (点  $B$  在点  $A$  的右侧, 与  $y$  轴交于点  $C$ , 它的对称轴与  $x$  轴交于点  $D$ , 直线  $l$  经过  $C, D$  两点.

(1) 求  $A, B$  两点的坐标及直线  $l$  的函数表达式.

(2) 将抛物线  $W$  沿  $x$  轴向右平移得到抛物线  $W'$ , 设抛物线  $W'$  的对称轴与直线  $l$  交于点  $F$ , 当  $\triangle ACF$  为直角三角形时, 求点  $F$  的坐标, 并直接写出此时抛物线  $W'$  的函数表达式.

(3) 如图 2, 连接  $AC, CB$ , 将  $\triangle ACD$  沿  $x$  轴向右平移  $m$  个单位 ( $0 < m \leq 5$ ), 得到  $\triangle A' C' D'$ . 设  $A' C'$  交直线  $l$  于点  $M$ ,  $C' D'$  交  $CB$  于点  $N$ , 连接  $CC'$ ,  $MN$ . 求四边形  $CMNC'$  的面积 (用含  $m$  的代数式表示).

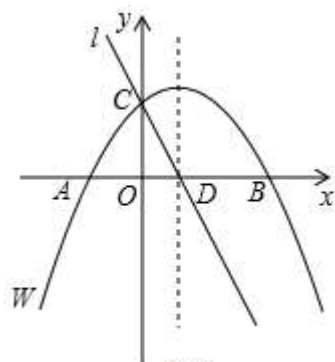


图1

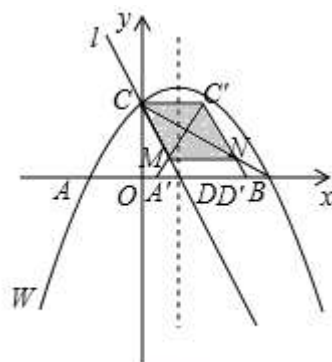


图2

解析: (1) 根据自变量与函数值对应关系, 当函数值为零时, 可得  $A, B$  点坐标, 当自变量为零时, 可得  $C$  点坐标, 根据对称轴公式, 可得  $D$  点坐标, 根据待定系数法, 可得  $l$  的解析式;

(2) 根据余角性质, 可得  $\angle 1$  与  $\angle 3$  的关系, 根据正切的定义, 可得关于  $F$  点的横坐标的方程, 根据解方程, 可得  $F$  点坐标, 平移后的对称轴, 根据平移后的对称轴, 可得平移后的函数解析式;

(3) 根据图象平移的规律, 可得  $A', C', D'$  点的坐标, 根据待定系数法, 可得  $A' C', BC, C' D'$  的解析式, 根据解方程组, 可得  $M, N$  的坐标, 根据平行四边形的判定, 可得四边形  $CMNC'$  的形状, 根据平行四边形的面积公式, 可得答案.

答案: (1) 当  $y=0$  时,  $-\frac{4}{21}x^2 + \frac{16}{21}x + 4 = 0$ ,

解得  $x_1 = -3, x_2 = 7$ ,

∴ 点  $A$  坐标为  $(-3, 0)$ , 点  $B$  的坐标为  $(7, 0)$ .

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{16}{21}}{2 \times (-\frac{4}{21})}$$

∴ 抛物线  $w$  的对称轴为直线  $x=2$ ,

∴ 点  $D$  坐标为  $(2, 0)$ .

当  $x=0$  时,  $y=4$ ,

∴ 点  $C$  的坐标为  $(0, 4)$ .

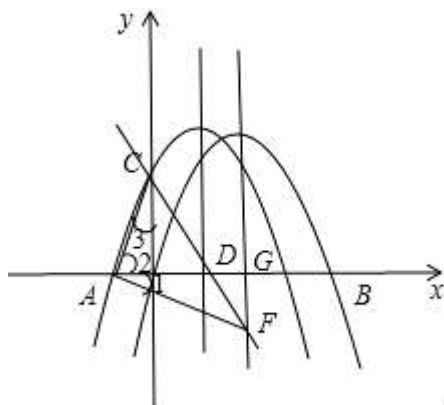
设直线  $l$  的表达式为  $y=kx+b$ ,

$$\begin{cases} b=4 \\ 2k+b=0 \end{cases},$$

解得  $\begin{cases} k=-2 \\ b=4 \end{cases}$ ,

∴ 直线  $l$  的解析式为  $y=-2x+4$ ;

(2) ∵ 抛物线  $w$  向右平移, 只有一种情况符合要求,  
即  $\angle FAC=90^\circ$ , 如图



此时抛物线  $w'$  的对称轴与  $x$  轴的交点为  $G$ ,

∵  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$   $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ,

∴  $\angle 1 = \angle 3$ ,

∴  $\tan \angle 1 = \tan \angle 3$ ,

$$\therefore \frac{FG}{AG} = \frac{AO}{CO}$$

设点  $F$  的坐标为  $(x_F, -2x_F+4)$ ,

$$\therefore \frac{-(2x_F+4)}{x_F - (-3)} = \frac{3}{4}$$

解得  $x_F=5$ ,  $-2x_F+4=-6$ ,

∴ 点  $F$  的坐标为  $(5, -6)$ ,

此时抛物线  $w'$  的函数表达式为  $y = -\frac{4}{21}x^2 + \frac{40}{21}x$ ;

(3) 由平移可得: 点  $C'$ , 点  $A'$ , 点  $D'$  的坐标分别为  $C'(m, 4)$ ,  $A'(-3+m, 0)$ ,  $D'(2+m, 0)$ ,  $CC' \parallel x$  轴,  $C'D' \parallel CD$ ,

可用待定系数法求得

直线  $A'C'$  的表达式为  $y = \frac{4}{3}x + 4 - \frac{4}{3}m$ ,

直线  $BC$  的表达式为  $y = -\frac{4}{7}x + 4$ ,

直线  $C'D'$  的表达式为  $y = -2x + 2m + 4$ ,



分别解方程组  $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 4 - \frac{4}{3}m \\ y = -2x + 4 \end{cases}$  和  $\begin{cases} y = -2x + 2m + 4 \\ y = -\frac{4}{7}x + 4 \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} x = \frac{2}{5}m \\ y = -\frac{4}{5}m + 4 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x = \frac{7}{5}m \\ y = -\frac{4}{5}m + 4 \end{cases}$ ,

$\therefore$  点 M 的坐标为  $(\frac{2}{5}m, -\frac{4}{5}m + 4)$ , 点 N 的坐标为  $(\frac{7}{5}m, -\frac{4}{5}m + 4)$ ,

$\therefore y_M = y_N \therefore MN \parallel x$  轴,

$\therefore CC' \parallel x$  轴,

$\therefore CC' \parallel MN$ .

$\therefore C'D' \parallel CD$ ,

$\therefore$  四边形  $CMNC'$  是平行四边形,

$\therefore S = m[4 - (-\frac{4}{5}m + 4)] = \frac{4}{5}m^2$