# 2018年山东省枣庄市高考二模数学文

一、选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合U=R，A={x|$x^2$-x-2≥0}，则$C_U$A=(　)
A.[-1，2]
B.(-1，2)
C.(-2，1)
D.[-2，1)
解析：求出A中不等式的解集确定出A，根据全集U=R，求出A的补集即可.
由A中不等式变形得：(x-2)(x+1)≥0，
解得：x≤-1或x≥2，即A=(-∞，-1]∪[2，+∞)，
∵U=R，
∴$C_U$A=(-1，2).
答案：B

2.已知复数$z=\frac{i}{1+i}$，其中i为虚数单位，则|z|=(　)
A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2}$
D.2
解析：直接由复数代数形式的乘除运算化简复数z，再利用复数求模公式计算得答案.
$z=\frac{i}{1+i}=\frac{i\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，
则$\left|z\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
答案：B

3.已知a=$3^{-\frac{1}{2}}$，b=$\log_3\frac{1}{2}$，c=$\log_2 3$，则a，b，c的大小关系是(　)
A.a＞c＞b
B.c＞a＞b
C.a＞b＞c
D.c＞b＞a

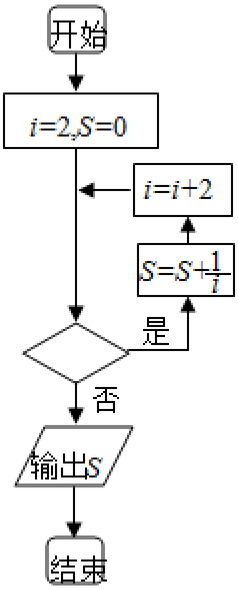
解析：直接利用指数函数、对数函数的单调性求解即可.

∵$0<a=3^{-\frac{1}{2}}<3^0=1$，$b=\log_3\frac{1}{2}<\log_3 1=0$，$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，

∴$c>a>b$.

答案：B

4.如图给出的是计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2018}$的值的程序框图，其中判断框内应填入的是(　)




A.i≤2015?

B.i≤2017?

C.i≤2018?

D.i≤2016?

解析：∵程序的功能是求$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2018}$的值，

且在循环体中，$S=S+\frac{1}{i}$表示，每次累加的是$\frac{1}{i}$的值，

故当i≤2018应满足条件进入循环，

i>2018时就不满足条件，

分析四个答案可得条件为：i≤2018?

答案：C

5.已知$f(x)=ax-\log_2(4^x+1)$是偶函数，则a=(　)

A.1

B.-1

C.2

D.-2

解析：根据题意，求出f(-x)的表达式，由偶函数的性质可得

$ax-\log_2(4^x+1)=a(-x)-\log_2(4^{-x}+1)$，变形可得 $2ax=\log_2(4^x+1)-\log_2(4^{-x}+1)=2x$，分析可得答案.
根据题意，$f(x)=ax-\log_2(4^x+1)$，则 $f(-x)=a(-x)-\log_2(4^{-x}+1)$，
若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，
即 $ax-\log_2(4^x+1)=a(-x)-\log_2(4^{-x}+1)$，
即 $2ax=\log_2(4^x+1)-\log_2(4^{-x}+1)=2x$，
则 $a=1$.
答案：A

6.已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则 $A=(\quad)$

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{6}$

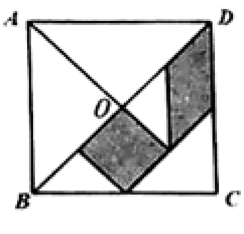
D. $\frac{2\pi}{3}$

解析：已知等式利用正弦定理化简，整理得到关系式，再利用余弦定理表示出 cosA，把得出关系式代入求出 cosA 的值，即可确定出角 A 的大小.
∵$(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，
∴利用正弦定理化简得：$(a+b)(a-b)=c(c-b)$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，

∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$.
答案：B

7.七巧板是我们祖先的一项创造，被誉为“东方魔板”，它是由五块等腰直角三角形(两块全等的小三角形、一块中三角形和两块全等的大三角形)、一块正方形和一块平行四边形组成的.如图是一个用七巧板拼成的正方形，在此正方形中任取一点，则此点取自阴影部分的概率是(　)




A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{8}$

解析：求出阴影部分的面积，根据几何概型的定义求出满足条件的概率即可.

设正方形的面积是 1，

结合图象，阴影部分是和大三角形的面积相等，

从而阴影部分占正方形的$\frac{1}{4}$，

故满足条件的概率 $p=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$.

答案：C

8. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 sin2α =(　)

A. $-\frac{7}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

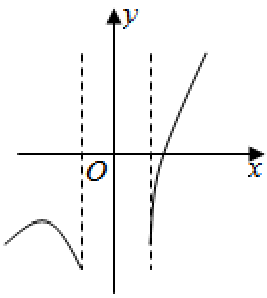
C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

D. $\pm\frac{4\sqrt{2}}{9}$

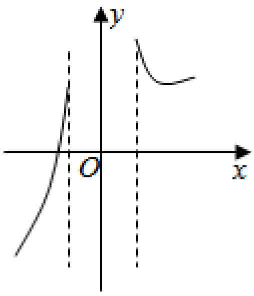
解析：根据二倍角公式可知：$\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=1-2\sin^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{7}{9}$.

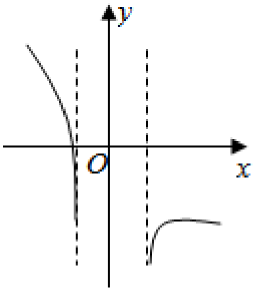
答案：B

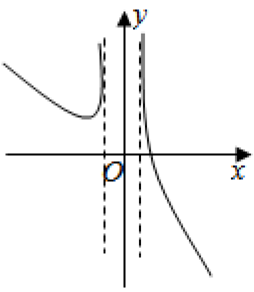
9. 函数 f(x)=ln(|x|-1)+x 的大致图象是(　)




A.

B. 

C. 

D. 

解析：化简 f(x)，利用导数判断 f(x)的单调性即可得出正确答案.

f(x)的定义域为{x|x<-1 或 x>1}.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+x, & x>1\\ \ln\left(-x-1\right)+x, & x<-1\end{cases},$$

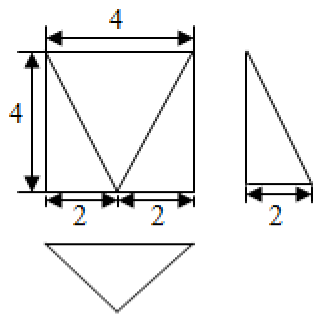
$$\therefore f'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}+1, & x>1\\ \dfrac{1}{x+1}+1, & x<-1\end{cases},$$

∴当 x>1 时，f′(x)>0，当 x<-2 时，f′(x)>0，当-2<x<-1 时，f′(x)<0，

∴f(x)在(-∞，-2)上单调递增，在(-2，-1)上单调递减，在(1，+∞)上单调递增.

答案：A

10.某几何体的三视图如图所示，其中俯视图是等腰三角形，则该几何体的体积为(　)




A. 32

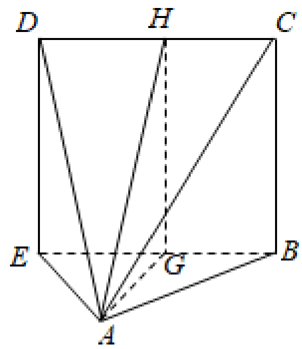
B. $\dfrac{64}{3}$

C. $\dfrac{16}{3}$

D. $\dfrac{32}{3}$

解析：由三视图还原原几何体，可知原几何体是四棱锥 A-BCDE，其中底面 BCDE 为边长是 4 的正方形，侧面 ABE 为等腰三角形，且平面 ABE⊥平面 BCDE，四棱锥的高 AG=2，代入棱锥体积公式求解.

由三视图还原原几何体如图，




该几何体是四棱锥 A-BCDE，

其中底面 BCDE 为边长是 4 的正方形，侧面 ABE 为等腰三角形，且平面 ABE⊥平面 BCDE，

由三视图可知，四棱锥的高 AG=2，

$\therefore V_{A-BCDE}=\dfrac{1}{3}\times4\times4\times2=\dfrac{32}{3}$.

答案：D

11. 设 $F_1$、$F_2$ 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的两个焦点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle F_1MF_2=120°$，则 m 的取值范围是(  )

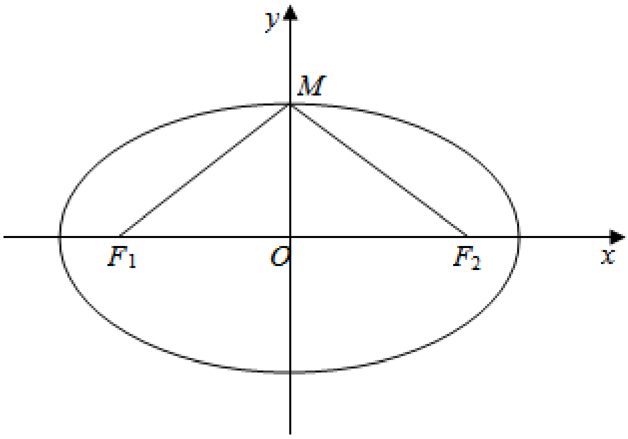
A. $(0,\ \dfrac{1}{2}]\cup[8,\ +\infty)$

B. $(0,\ 1]\cup[8,\ +\infty)$

C. $(0,\ \dfrac{1}{2}]\cup[4,\ +\infty)$

D.(0，1]∪[4，+∞)

解析：假设椭圆C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$的焦点在x轴上，则2＜m，

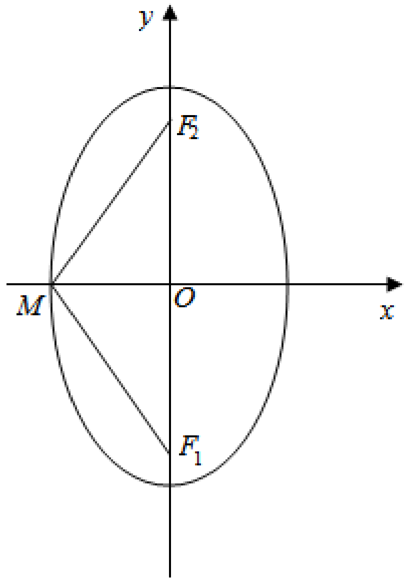



假设M位于短轴的端点时，$\angle F_1MF_2$取最大值，要使椭圆C上存在点M满足$\angle F_1MF_2=120°$，

$\angle F_1MF_2\geqslant 120°$，$\angle F_1MO\geqslant 60°$，$\tan\angle F_1MO=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{m-2}}{\sqrt{2}}\geq\tan 60°=\sqrt{3}$，

解得：m≥8，

当椭圆的焦点在y轴上时，0＜m＜3，




假设M位于短轴的端点时，$\angle F_1MF_2$取最大值，要使椭圆C上存在点M满足$\angle F_1MF_2=120°$，

$\angle F_1MF_2\geqslant 120°$，$\angle F_1MO\geqslant 60°$，$\tan\angle F_1MO=\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{m}}\geq\tan 60°=\sqrt{3}$，解得：0＜m≤$\frac{1}{2}$，

∴m的取值范围是(0，$\frac{1}{2}$]∪[8，+∞).

答案：A

12.已知函数$f(x)=(1+2x)(x^2+ax+b)$(a，b∈R)的图象关于点(1，0)对称，则f(x)在[-1，1]

上的最大值为(  )

A. $\sqrt{3}$

B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析：根据函数的对称性得到关于 a，b 的方程组，求出 a，b，求出函数 f(x)的解析式，求出函数的导数，根据函数的单调性求出 f(x)的最大值即可.

由 f(x)的图象关于点(1，0)对称，

得 f(1)=3(a+b+1)=0，①

而 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=6\left(\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{2}a+b\right)=0$，②，

联立①②，解得：a=$-\dfrac{7}{2}$，b=$\dfrac{5}{2}$，

故 $f(x)=(1+2x)\left(x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{5}{2}\right)$，

$f'(x)=6x^2-12x+\dfrac{3}{2}$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$，或 $x>\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$(舍)，

令 $f'(x)<0$，解得：$x>\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$，

故 f(x)在$[-1,\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2})$递增，在$(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\ 1]$递减，

故 $f(x)max=f\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

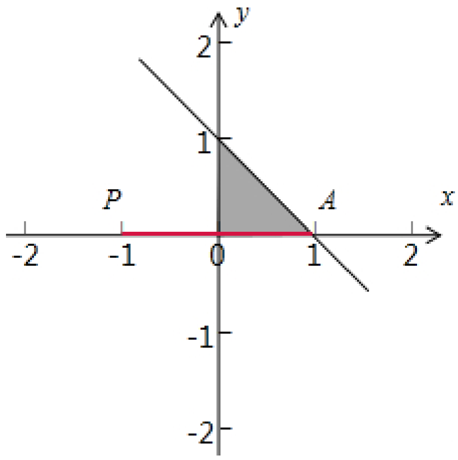
答案：D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知实数 x，y 满足$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y-1\le 0 \end{cases}$，则$\sqrt{(x+1)^2+y^2}$的最大值为_____.

解析：画出约束条件的可行域，利用目标函数的几何意义求解即可.

实数 x，y 满足$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y-1\le 0 \end{cases}$的可行域如图：




则$\sqrt{(x+1)^2+y^2}$的几何意义是可行域内的点

与 P(-1，0)的距离，
由可行域可知 A(1，0)到 P(-1，0)距离最大，
显然最大值为：2.
答案：2

14.在平行四边形 ABCD 中，AB=1，AD=2，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$_____.

解析：利用向量的和以及差表示数量积的两个向量，然后求解即可.

在平行四边形 ABCD 中，AB=1，AD=2，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2=2^2-1^2=3$.

答案：3

15.已知圆 M 与直线 x-y=0 及 x-y+4=0 都相切，圆心在直线 y=-x+2 上，则圆 M 的标准方程为_____.
解析：根据圆心在直线 y=-x+2 上，设出圆心坐标为(a，2-a)，利用圆 C 与直线 x-y=0 及 x-y+4=0 都相切，求得圆心坐标，再求圆的半径，可得圆的方程.
圆心在 y=-x+2 上，设圆心为(a，2-a)，
∵圆 C 与直线 x-y=0 及 x-y+4=0 都相切，
∴圆心到直线 x-y=0 的距离等于圆心到直线 x-y+4=0 的距离，

即：$\frac{|2a-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}$，解得 a=0，

∴圆心坐标为(0，2) $r=\frac{|2a-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=2$.

答案：$x^2+(y-2)^2=2$

16. 已知 f(x)=sinωx-cosωx(ω＞$\frac{2}{3}$)，若函数 f(x)图象的任何一条对称轴与 x 轴交点的横坐标都不属于区间(π，2π)，则ω的取值范围是_____.(结果用区间表示)

解析：f(x)=sinωx-cosωx=$\sqrt{2}$ sin(ωx-$\frac{\pi}{4}$)(ω＞$\frac{2}{3}$，x∈R)，

若 f(x)的任何一条对称轴与 x 轴交点的横坐标都不属于区间(π，2π)，

则 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}\geq 2\pi-\pi=\pi$，ω≤1，即$\frac{2}{3}$＜ω≤1，①

∵令 $\omega x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z，可得数 f(x)图象的对称轴为：$x=\frac{k\pi+\frac{3\pi}{4}}{\omega}$，k∈Z，

∴$\frac{k\pi+\frac{3\pi}{4}}{\omega}\leq\pi$，或$\frac{k\pi+\frac{3\pi}{4}}{\omega}\geq 2\pi$，k∈Z，

∴解得：ω≥k+$\frac{3}{4}$，k∈Z，②或$\omega\leq\frac{k}{2}+\frac{3}{8}$，k∈Z，③

∴当 k=0 时，ω≥$\frac{3}{4}$，或ω≤$\frac{3}{8}$，

当 k=1 时，ω≥$\frac{7}{4}$(舍去)，或ω≤$\frac{7}{8}$，

综上，可得ω的取值范围是：[$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$].

答案：[$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$]

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，第 17~21 题为必考题，每小题 12 分，第 22、23 题为选考题，有 10 分.

17. 已知数列{$a_n$}的前 n 项和 $S_n=\frac{3n^2+5n}{2}$.

(Ⅰ)求{$a_n$}的通项公式.

解析：(Ⅰ)求出 $a_1=S_1=4$.通过当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，转化求解数列的通项公式即可.

答案：(Ⅰ)$a_1=S_1=4$.

当 n≥2 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n^2+5n}{2} - \frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2} = 3n+1$.

又 $a_1=4$ 符合 n≥2 时 $a_n$ 的形式，所以{an}的通项公式为 $a_n=3n+1$.

(Ⅱ)设 $b_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

解析：(Ⅱ)化简数列的通项公式，利用裂项相消法求解数列的和即可.

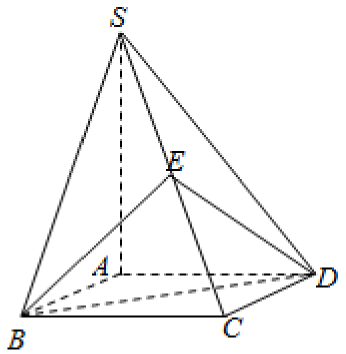
答案：(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $b_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}$.

数列$\{b_n\}$的前 n 项和为

$b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}.$$

18.在四棱锥 S-ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，平面 SAB⊥平面 ABCD，平面 SAD⊥平面 ABCD，且 SA=2AD=3AB.




(Ⅰ)证明：SA⊥平面 ABCD.
解析：(Ⅰ)证明 BC⊥AB，BC⊥SA，CD⊥SA，即可证明 SA⊥平面 ABCD.
答案：(Ⅰ)证明：由底面 ABCD 为矩形，得 BC⊥AB.
又平面 SAB⊥平面 ABCD，平面 SAB∩平面 ABCD=AB，BC⊂平面 ABCD，
所以 BC⊥平面 SAB.所以 BC⊥SA.
同理可得 CD⊥SA.
又 BC∩CD=C，BC⊂平面 ABCD，CD⊂平面 ABCD，
所以 SA⊥平面 ABCD.

(Ⅱ)若 E 为 SC 的中点，三棱锥 E-BCD 的体积为 $\frac{8}{9}$，求四棱锥 S-ABCD 外接球的表面积.
解析：(Ⅱ)设 SA=6a，则 AB=2a，AD=3a.通过几何体的体积求解 a，设半径为 R.然后求解 R，然后求解球的表面积.
答案：(Ⅱ)设 SA=6a，则 AB=2a，AD=3a.

$$V_{E-BCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times BC\times CD\right)\times\left(\frac{1}{2}SA\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2a\times 3a\right)\times(3a)=3a^{3}.$$

又 $V_{E-BCD}=\frac{8}{9}$，所以 $3a^3=\frac{8}{9}$. 解得 $a=\frac{2}{3}$.

四棱锥 S-ABCD 的外接球是以 AB、AD、AS 为棱的长方体的外接球，设半径为 R.

则 $2R=\sqrt{AB^2+AD^2+AS^2}=7a=\frac{14}{3}$，即 $R=\frac{7}{3}$.

所以，四棱锥 S-ABCD 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{196\pi}{9}$.

19. 随着高校自主招生活动的持续开展，我市高中生掀起了参与数学兴趣小组的热潮. 为调查我市高中生对数学学习的喜好程度，从甲、乙两所高中各随机抽取了 40 名学生，记录他们在一周内平均每天学习数学的时间，并将其分成了 6 个区间：(0，10]、(10，20]、(20，30]、(30，40]、(40，50]、(50，60]，整理得到如下频率分布直方图：

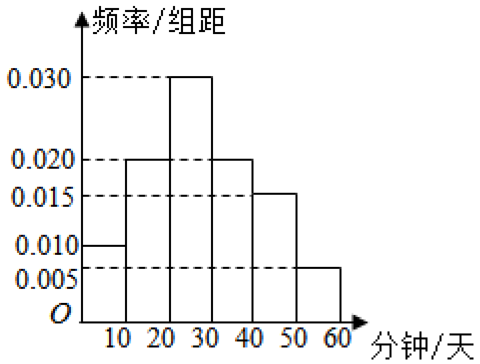



图1：甲高中

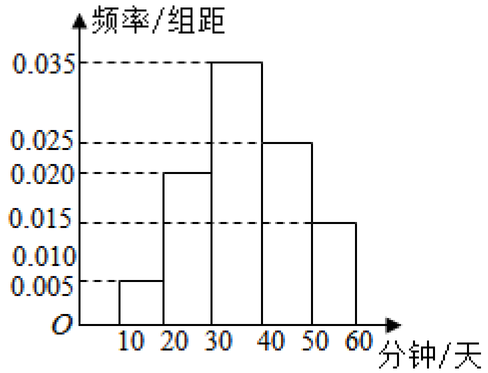



图2：乙高中

根据一周内平均每天学习数学的时间 t，将学生对于数学的喜好程度分为三个等级：

| 学习时间（分钟/天） | $t\le 20$ | $20<t\le 50$ | $t>50$ |
|---|---|---|---|
| 喜好等级 | 一般 | 爱好 | 痴迷 |

(Ⅰ)试估计甲高中学生一周内平均每天学习数学的时间的中位数 $m_{甲}$(精确到 0.01).

解析：(Ⅰ)由样本估计总体的思想，能求出甲高中学生一周内平均每天学习数学的时间的中位数.

答案：(Ⅰ)由样本估计总体的思想，

甲高中学生一周内平均每天学习数学的时间的中位数：

$$m_{甲}=20+\frac{0.5-(0.1+0.2)}{0.3}\times 10\approx 26.67.$$

(Ⅱ)判断从甲、乙两所高中各自随机抽取的 40 名学生一周内平均每天学习数学的时间的平均值 $\overline{X_{甲}}$ 与 $\overline{X_{乙}}$ 及方差 $S_{甲}^2$ 与 $S_{乙}^2$ 的大小关系(只需写出结论)，并计算其中的 $\overline{X_{甲}}$、$S_{甲}^2$(同

一组中的数据用该组区间的中点值作代表).
解析：(Ⅱ)利用频率分布直方图能判断从甲、乙两所高中各自随机抽取的40名学生一周内平均每天学习数学的时间的平均值$\overline{X_{甲}}$与$\overline{X_{乙}}$及方差$S_{甲}^2$与$S_{乙}^2$的大小关系，并能计算其中的$\overline{X_{甲}}$、$S_{甲}^2$.

答案：(Ⅱ)$\overline{X_{甲}}<\overline{X_{乙}}$，$S_{甲}^2>S_{乙}^2$，

$\overline{X_{甲}}=5\times0.1+15\times0.2+25\times0.3+35\times0.2+45\times0.15+55\times0.05=27.5$，

$S_{甲}^2=\frac{1}{40}\times[(5-27.5)^2\times(40\times0.1)+(15-27.5)^2\times(40\times0.2)+(25-27.5)^2\times(40\times0.3)+(35-27.5)^2\times(40\times0.2)+(45-27.5)^2\times(40\times0.15)+(55-27.5)^2\times(40\times0.05)]=178.75$.

(Ⅲ)从甲高中与乙高中随机抽取的80名同学中数学喜好程度为“痴迷”的学生中随机抽取2人，求选出的2人中甲高中与乙高中各有1人的概率.
解析：(Ⅲ)甲高中随机选取的40名学生中“痴迷”的学生有$40\times(0.005\times10)=2$人，记为$A_1$，$A_2$，乙高中随机选取的40名学生中“痴迷”的学生有$40\times(0.015\times10)=6$人，记为$B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$，$B_5$，$B_6$.利用列举法能求出从甲、乙两所高中数学喜好程度为“痴迷”的同学中随机选出2人，选出的2人中甲、乙两所高中各有1人的概率.
答案：(Ⅲ)甲高中随机选取的40名学生中“痴迷”的学生有$40\times(0.005\times10)=2$人，记为$A_1$，$A_2$，
乙高中随机选取的40名学生中“痴迷”的学生有$40\times(0.015\times10)=6$人，记为$B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$，$B_5$，$B_6$.
随机选出2人有以下28种可能：
$(A_1,A_2)$，$(A_1,B_1)$，$(A_1,B_2)$，$(A_1,B_3)$，$(A_1,B_4)$，$(A_1,B_5)$，$(A_1,B_6)$，
$(A_2,B_1)$，$(A_2,B_2)$，$(A_2,B_3)$，$(A_2,B_4)$，$(A_2,B_5)$，$(A_2,B_6)$，$(B_1,B_2)$，
$(B_1,B_3)$，$(B_1,B_4)$，$(B_1,B_5)$，$(B_1,B_6)$，$(B_2,B_3)$，$(B_2,B_4)$，$(B_2,B_5)$，
$(B_2,B_6)$，$(B_3,B_4)$，$(B_3,B_5)$，$(B_3,B_6)$，$(B_4,B_5)$，$(B_4,B_6)$，$(B_5,B_6)$，
甲、乙两所高中各有1人，有以下12种可能：
$(A_1,B_1)$，$(A_1,B_2)$，$(A_1,B_3)$，$(A_1,B_4)$，$(A_1,B_5)$，$(A_1,B_6)$，
$(A_2,B_1)$，$(A_2,B_2)$，$(A_2,B_3)$，$(A_2,B_4)$，$(A_2,B_5)$，$(A_2,B_6)$.
所以，从甲、乙两所高中数学喜好程度为“痴迷”的同学中随机选出2人，
选出的2人中甲、乙两所高中各有1人的概率为$p=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

20.已知抛物线C：$y^2=2px(0<p<1)$上的点$P(m,1)$到其焦点F的距离为$\frac{5}{4}$.

(Ⅰ)求C的方程.
解析：(Ⅰ)通过点在抛物线上，以及抛物线的定义，列出方程求解可得C的方程.

答案：(Ⅰ)由题意，得$2pm=1$，即$m=\frac{1}{2p}$.

由抛物线的定义，得$\left|PF\right|=m-\left(-\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}$.

由题意，$\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，解得 p=$\frac{1}{2}$，或 p=2(舍去).

所以 C 的方程为 $y^2$=x.

(Ⅱ)已知直线 l 不过点 P 且与 C 相交于 A，B 两点，且直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 1，证明：l 过定点.

解析：(Ⅱ)证法一：设直线 PA 的斜率为 k(显然 k≠0)，则直线 PA 的方程为 y-1=k(x-1)，联立直线与抛物线方程，设 A($x_1$，$y_1$)，由韦达定理，求出 A 的坐标，直线 PB 的斜率为$\frac{1}{k}$.得到 B 的坐标，通过直线的向量是否垂直，求出直线 l 的方程，然后求解定点坐标.

证法二：由(1)，得 P(1，1).若 l 的斜率不存在，则 l 与 x 轴垂直.设 A($x_1$，$y_1$)，则 B($x_1$，$-y_1$)，$y_1^2=x_1$.推出 l 的斜率必存在.设 l 的斜率为 k，显然 k≠0，设 l：y=kx+t，利用直线方程与抛物线方程联立，设 A($x_1$，$y_1$)，B($x_2$，$y_2$)，利用韦达定理，转化求解直线 l：y=kx-1.即可说明 l 过定点(0，-1).

证法三：由(1)，得 P(1，1).设 l：x=ny+t，由直线 l 不过点 P(1，1)，所以 n+t≠1.由$\begin{cases}y^2=x\\x=ny+t\end{cases}$消去 x 并整理得 $y^2$-ny-t=0.判别式△=$n^2$+4t＞0.设 A($x_1$，$y_1$)，B($x_2$，$y_2$)，则 $y_1+y_2$=n①，$y_1y_2$=-t②，转化求解 l：x=n(y+1).说明 l 过定点(0，-1).

答案：(Ⅱ)证法一：设直线 PA 的斜率为 k(显然 k≠0)，则直线 PA 的方程为 y-1=k(x-1)，则 y=kx+1-k.

由$\begin{cases}y=kx+1-k\\y^2=x\end{cases}$消去 y 并整理得 $k^2x^2+[2k(1-k)-1]x+(1-k)^2=0$.

设 A($x_1$，$y_1$)，由韦达定理，得 $1\times x_1=\frac{(1-k)^2}{k^2}$，即

$x_1=\frac{(1-k)^2}{k^2}$g$y_1=kx_1+1-k=k$g$\frac{(1-k)^2}{k^2}+1-k=-1+\frac{1}{k}$，所以 A($\frac{(1-k)^2}{k^2}$，$-1+\frac{1}{k}$).

由题意，直线 PB 的斜率为$\frac{1}{k}$.

同理可得 B($\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}$，$-1+\frac{1}{\frac{1}{k}}$)，即 B(($k^2$-1)$^2$，k-1).

若直线 l 的斜率不存在，则$\frac{(1-k)^2}{k^2}=(k-1)^2$.解得 k=1，或 k=-1.

当 k=1 时，直线 PA 与直线 PB 的斜率均为 1，A，B 两点重合，与题意不符；
当 k=-1 时，直线 PA 与直线 PB 的斜率均为-1，A，B 两点重合，与题意不符.
所以，直线 l 的斜率必存在.

直线 l 的方程为 $y-(k-1)=\frac{k}{(k-1)^{2}}\left[x-(k-1)^{2}\right]$，即 $y=\frac{k}{(k-1)^{2}}x-1$.

所以直线 l 过定点(0，-1).
证法二：由(1)，得 P(1，1).
若 l 的斜率不存在，则 l 与 x 轴垂直.
设 A($x_1$，$y_1$)，则 B($x_1$，$-y_1$)，$y_1^2=x_1$.

则 $k_{PA}k_{PB}=\frac{y_1-1}{x_1-1}g\frac{-y_1-1}{x_1-1}=\frac{1-y_1^{2}}{(x_1-1)^{2}}=\frac{1-x_1}{(x_1-1)^{2}}=\frac{1}{1-x_1}$.

($x_1-1\neq0$，否则，$x_1=1$，则 A(1，1)，或 B(1，1)，直线 l 过点 P，与题设条件矛盾)

由题意，$\frac{1}{1-x_1}=1$，所以 x1=0. 这时 A，B 两点重合，与题意不符.

所以 l 的斜率必存在.
设 l 的斜率为 k，显然 k≠0，设 l：y=kx+t，
由直线 l 不过点 P(1，1)，所以 k+t≠1.

由 $\begin{cases} y^{2}=x \\ y=kx+t \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $k^2x^2+(2kt-1)x+t^2=0$.

由判别式△=1-4kt＞0，得 kt＜$\frac{1}{4}$.

设 A($x_1$，$y_1$)，B($x_2$，$y_2$)，则 $x_1+x_2=\frac{1-2kt}{k^{2}}$①，$x_1x_2=\frac{t^{2}}{k^{2}}$②，

则 $k_{PA}k_{PB}=\frac{y_1-1}{x_1-1}g\frac{y_2-1}{x_2-1}=\frac{kx_1+t-1}{x_1-1}g\frac{kx_2+t-1}{x_2-1}=\frac{k^{2}x_1x_2+k(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^{2}}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$.

由题意，$\frac{k^{2}x_1x_2+k(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^{2}}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=1$.

故$(k^2-1)x_1x_2+(kt-k+1)(x_1+x_2)+t^2-2t=0$③，

将①②代入③式并化简整理得 $\frac{1-t^{2}-kt-k}{k^{2}}=0$，即 $1-t^2-kt-k=0$.

即(1+t)(1-t)-k(t+1)=0，即(1+t)(1-t-k)=0.
又 k+t≠1，即 1-t-k≠0，所以 1+t=0，即 t=-1.
所以 l：y=kx-1. 显然 l 过定点(0，-1).
证法三：由(1)，得 P(1，1).
设 l：x=ny+t，由直线 l 不过点 P(1，1)，所以 n+t≠1.

由$\begin{cases} y^2 = x \\ x = ny + t \end{cases}$消去 x 并整理得 $y^2-ny-t=0$.

由题意，判别式$\triangle=n^2+4t>0$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $y_1+y_2=n$①，$y_1y_2=-t$②

则$k_{PA}k_{PB} = \frac{y_1-1}{x_1-1}g\frac{y_2-1}{x_2-1} = \frac{y_1-1}{y_1^2-1}g\frac{y_2-1}{y_2^2-1} = \frac{1}{y_1y_2+(y_1+y_2)+1}$.

由题意，$y_1y_2+(y_1+y_2)+1=1$，即 $y_1y_2+(y_1+y_2)=0$③

将①②代入③式得$-t+n=0$，即 $t=n$.

所以 l：$x=n(y+1)$.显然 l 过定点$(0，-1)$.

21.已知曲线 $y=f(x)=x^2-1-a\ln x(a\in R)$与 x 轴有唯一公共点 A.

(Ⅰ)求实数 a 的取值范围.

解析：(Ⅰ)求出函数的导数，通过讨论 a 的范围，求出函数的单调区间，结合单调性求出 f(x)的最小值，从而确定 a 的范围.

答案：(Ⅰ)函数 f(x)的定义域为$(0，+\infty)$，$f(1)=0$，即 $A(1，0)$.

由题意，函数 f(x)有唯一零点 1.$f'(x)=2x-\frac{a}{x}$.

(1)若 $a\leqslant 0$，则$-a\geqslant 0$.

显然 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 f(x)在$(0，+\infty)$上是增函数.

又 $f(1)=0$，所以 $a\leqslant 0$ 符合题意.

(2)若 $a>0$，$f'(x)=\frac{2x^2-a}{x}$，

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{a}{2}}$；

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{\frac{a}{2}}$.

所以 f(x)在$(0，\sqrt{\frac{a}{2}})$上是减函数，在$(\sqrt{\frac{a}{2}}，+\infty)$上是增函数.

所以$f(x)_{\min} = f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2}-1-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$.

由题意，必有$f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\leqslant 0$(若$f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)>0$，则 $f(x)>0$ 恒成立，f(x)无零点，不符合题意)

①若$f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)<0$，则$\frac{a}{2}-1-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}<0$.

令 $g(a)=\frac{a}{2}-1-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$（$a>0$），则 $g'(a)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\times\frac{1}{\frac{a}{2}}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$.

$g'(a)>0\Leftrightarrow 0<a<2$；$g'(a)<0\Leftrightarrow a>2$.
所以函数 $g(a)$ 在 $(0, 2)$ 上是增函数，在 $(2, +\infty)$ 上是减函数.
所以 $g(a)_{max}=g(2)=0$. 所以 $g(a)\leqslant 0$，当且仅当 $a=2$ 时取等号.

所以，$f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)<0\Leftrightarrow a>0$，且 $a\neq 2$.

取正数 $b<\min\{\sqrt{\frac{a}{2}}, e^{-\frac{1}{a}}\}$，则 $f(b)=b^2-1-a\ln b>-1-a\ln b>-1-a\times(-\frac{1}{a})=0$；

取正数 $c>a+1$，显然 $c>2\sqrt{a}>\sqrt{\frac{a}{2}}$. 而 $f(c)=c^2-1-a\ln x$，

令 $h(x)=\ln x-x$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1$. 当 $x>1$ 时，显然 $h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$.
所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.
所以，当 $x>1$ 时，$h(x)=\ln x-x<h(1)=-1<0$，所以 $\ln x<x$.
因为 $c>1$，所以 $f(c)=c^2-1-a\ln c>c^2-1-ac=c(c-a)-1>c\times 1-1>0$.

又 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上是减函数，在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上是增函数，

则由零点存在性定理，$f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$、$(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上各有一个零点.

可见，$0<a<2$，或 $a>2$ 不符合题意.
注：$a>0$ 时，若利用

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，$f(\sqrt{\frac{a}{2}})<0$，

说明 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$、$(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上各有一个零点.

②若 $f(\sqrt{\frac{a}{2}})=0$，显然 $\sqrt{\frac{a}{2}}=1$，即 $a=2$. 符合题意.

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $\{a|a\leqslant 0$，或 $a=2\}$.

(Ⅱ)曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 $a^2-a-7$. 若两个不相等的正实数 $x_1$，$x_2$ 满足 $|f(x_1)|=|f(x_2)|$，求证：$x_1x_2<1$.
解析：(Ⅱ)求出 $a$ 的值，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$，得到 $-(x_1^2-1+3\ln x_1)=x_2^2-1+3\ln x_2$，令 $p(t)=2t+3\ln t-2$，根据函数的单调性证明即可.
答案：(Ⅱ)由题意，$f'(1)=2-a=a^2-a-7$. 所以 $a^2=9$，即 $a=\pm 3$.

由(Ⅰ)的结论，得 a=-3. $f(x)=x^2-1+3\ln x$，f(x)在(0，+∞)上是增函数.

$f(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$；$f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$.

由$|f(x_1)|=|f(x_2)|$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$.

从而有$-f(x_1)=f(x_2)$，即$-(x_1^2-1+3\ln x_1)=x_2^2-1+3\ln x_2$.

所以 $x_1^2+x_2^2+3\ln x_1x_2-2=0>2x_1x_2+3\ln x_1x_2-2$.

令 $p(t)=2t+3\ln t-2$，显然 p(t)在(0，+∞)上是增函数，且 p(1)=0.

所以 $p(t)<0 \Leftrightarrow 0<t<1$.

从而由 $2x_1x_2+3\ln x_1x_2-2<0$，得 $x_1x_2<1$.

请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.作答时请写清题号.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$(θ 为参数)，直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t-a-1 \end{cases}$(t 为参数).

(Ⅰ)若 a=1，求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度.

解析：(Ⅰ)曲线 C 的参数方程消去参数求出曲线 C 的普通方程，当 a=1 时，直线 l 的普通方程为 y=2x.由$\begin{cases} y=2x \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，能求出直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度.

答案：(Ⅰ)曲线 C 的普通方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

当 a=1 时，直线 l 的普通方程为 y=2x.

由$\begin{cases} y=2x \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y=\dfrac{6}{\sqrt{10}} \end{cases}$或$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y=-\dfrac{6}{\sqrt{10}} \end{cases}$，

直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度为$\sqrt{\left(2\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(2\times\dfrac{6}{\sqrt{10}}\right)^2}=3\sqrt{2}$.

(Ⅱ)若 a=11，在曲线 C 上求一点 M，使得点 M 到直线 l 的距离最小，并求出最小距离.

解析：(Ⅱ)法一：a=11 时，直线 l 的普通方程为 2x-y-10=0.由点到直线的距离公式，求出椭圆$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$上的点 M(3cosθ，2sinθ)到直线 l：2x-y-10=0 的距离为

$\frac{\left|2\sqrt{10}\cos(\theta+\theta 0)-10\right|}{\sqrt{5}}$，由此能求出点 M 到 l 的距离的最小值.

法二：当 a=11 时，直线 l 的普通方程为 2x-y-10=0. 设与 l 平行，且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直线 m 的方程为 2x-y+t=0. 由 $\begin{cases}2x-y+t=0\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $40x^2+36tx+9t^2-36=0$，要使两平行直线 l 与 m 间的距离最小，直线 m 的方程为 2x-y-2$\sqrt{10}$=0. l 与 m 间的距离 $d=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$.

点 M 的坐标为方程组 $\begin{cases}2x-y+t=0\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 的解 $\begin{cases}x=\frac{9\sqrt{10}}{10}\\ y=-\frac{\sqrt{10}}{5}\end{cases}$. 由此能求出点 M 到直线 l 的距离取最小值.

答案：(Ⅱ)解法一：a=11 时，直线 l 的普通方程为 2x-y-10=0.

由点到直线的距离公式，椭圆 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ 上的点 M(3cosθ，2sinθ)到直线 l：2x-y-10=0 的距离为：

$$d=\frac{\left|6\cos\theta-2\sin\theta-10\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\theta\right)-10\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2\sqrt{10}\cos(\theta+\theta_0)-10\right|}{\sqrt{5}}$$

，

其中 $\theta_0$ 满足 $\cos\theta_0=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

由三角函数性质知，当 $\theta+\theta_0=0$ 时，d 取最小值 $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$.

此时，$3\cos\theta=3\cos(-\theta_0)=\frac{9\sqrt{10}}{10}$，$2\sin\theta=2\sin(-\theta_0)=-\frac{\sqrt{10}}{5}$.

因此，当点 M 位于($\frac{9\sqrt{10}}{10}$，$-\frac{\sqrt{10}}{5}$)时，点 M 到 l 的距离取最小值 $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$.

解法二：当 a=11 时，直线 l 的普通方程为 2x-y-10=0.

设与 l 平行，且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直线 m 的方程为 2x-y+t=0.

由$\begin{cases}2x-y+t=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $40x^2+36tx+9t^2-36=0$.

由判别式$\triangle=(36t)^2-4\times40\times(9t^2-36)=0$，解得 $t=\pm2\sqrt{10}$ .

所以，直线 m 的方程为 $2x-y+2\sqrt{10}=0$，或 $2x-y-2\sqrt{10}=0$.

要使两平行直线 l 与 m 间的距离最小，则直线 m 的方程为 $2x-y-2\sqrt{10}=0$.

这时，l 与 m 间的距离 $d=\dfrac{10-2\sqrt{10}}{5}=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ .

此时点 M 的坐标为方程组$\begin{cases}2x-y-2\sqrt{10}=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$的解$\begin{cases}x=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}\\ y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\end{cases}$.

因此，当点 M 位于($\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$，$-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$)时，点 M 到直线 l 的距离取最小值$2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ .

[选修 4-5：不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=|3x-a|$.

(Ⅰ)当 a=4 时，求不等式 $f(x)<3$ 的解集.
解析：(Ⅰ)当 a=4 时，不等式化简为：$|3x-4|<3$，然后求解即可.
答案：(Ⅰ)当 a=4 时，$f(x)=|3x-4|$.
由$|3x-4|<3$，解得$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{7}{3}$.
所以，不等式 $f(x)<3$ 的解集为$\{x|\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{7}{3}\}$.

(Ⅱ)设函数 $g(x)=|x+1|$.当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)>1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.
解析：(Ⅱ)利用绝对值的几何意义求出 $f(x)+g(x)$有最小值$|\dfrac{a}{3}+1|$.然后化简求解即可.
答案：(Ⅱ)

$$f(x)+g(x)=|3x-a|+|x+1|=\left|3\left(x-\frac{a}{3}\right)\right|+|x+1|=2\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x-\frac{a}{3}\right|+|x+1|\ge\left|x-\frac{a}{3}\right|+|x+1|$$

(当且仅当 $x=\dfrac{a}{3}$ 时取等号)

$\geqslant|(x-\frac{a}{3})-(x+1)|$(当且仅当$(x-\frac{a}{3})(x+1)\leqslant 0$时取等号)$=|\frac{a}{3}+1|$.

综上，当$x=\frac{a}{3}$时，$f(x)+g(x)$有最小值$|\frac{a}{3}+1|$.

故由题意得$|\frac{a}{3}+1|>1$，解得$a<-6$，或$a>0$.

所以，实数a的取值范围为$(-\infty，-6)\cup(0，+\infty)$.