2018年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅲ卷)数学理

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|x-1\geqslant 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A.$\{0\}$

B.$\{1\}$

C.$\{1,2\}$

D.$\{0,1,2\}$

解析：∵$A=\{x|x-1\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 1\}$，$B=\{0,1,2\}$，

∴$A\cap B=\{x|x\geqslant 1\}\cap\{0,1,2\}=\{1,2\}$.

答案：C

2.$(1+i)(2-i)=$(　　)

A.$-3-i$

B.$-3+i$

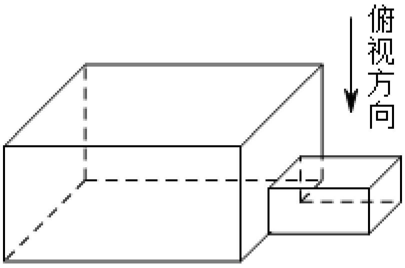
C.$3-i$

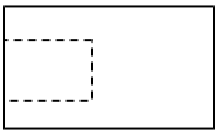
D.$3+i$

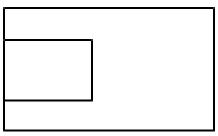
解析：$(1+i)(2-i)=3+i$.

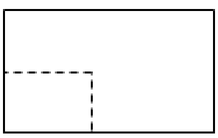
答案：D

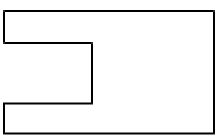
3.中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来.构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头.若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是(　　)



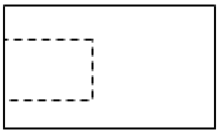
A.


B.


C.


D.


解析：由题意可知，如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，小的长方体，是榫头，从图形看出，轮廓是长方形，内含一个长方形，并且一条边重合，另外3边是虚线，所以木构件的俯视图是A.



答案：A

4.若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos2\alpha=$(　　)

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

解析：∵$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

∴$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$.

答案：B

5.$(x^2+\frac{2}{x})^5$的展开式中 x^4 的系数为(　　)

A.10
B.20
C.40
D.80

解析：由二项式定理得$(x^2+\frac{2}{x})^5$的展开式的通项为：

$T_{r+1}=C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=2^rC_5^rx^{10-3r}$，

由 $10-3r=4$，解得 $r=2$，

∴$(x^2+\frac{2}{x})^5$的展开式中 x^4 的系数为 $2^2C_5^2=40$.

答案：C

6.直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则△ABP 面积的取值范围是(　　)

A.[2，6]
B.[4，8]
C.$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$
D.$[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

解析：∵直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，

∴令 $x=0$，得 $y=-2$，令 $y=0$，得 $x=-2$，

∴$A(-2,0)$，$B(0,-2)$，$|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

∵点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，∴设 $P\left(2+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，

∴点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离：

$$d=\frac{\left|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{2}},$$

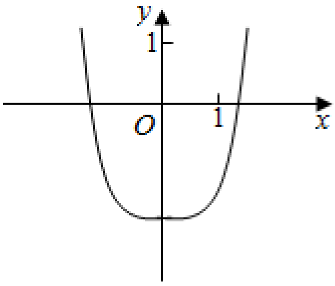
∵ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$，∴$d=\frac{\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$，

∴△ABP 面积的取值范围是：

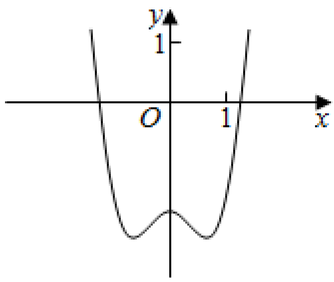
$[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2},\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}]=[2,6]$.

答案：A

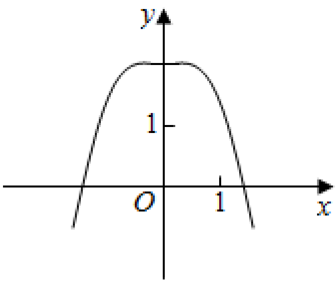
7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为(　　)



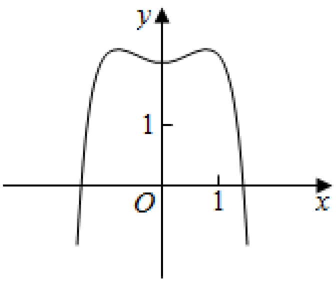
A.



B.



C.



D.

解析：函数过定点(0，2)，排除 A，B.

函数的导数 $f'(x)=-4x^3+2x=-2x(2x^2-1)$，

由 $f'(x)>0$ 得 $2x(2x^2-1)<0$，

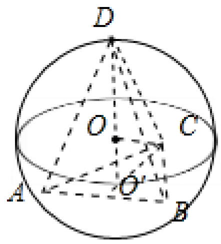
得 $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时函数单调递增，排除 C.

答案：D

8.某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p，各成员的支付方式相互独立.设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数，DX=2.4，P(x=4)＜P(X=6)，则 p=(　)
A.0.7
B.0.6
C.0.4
D.0.3
解析:某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p,看做是独立重复事件,满足 X～B(10,p),
P(x=4)＜P(X=6)，可得 $C_{10}^{4}p^{4}(1-p)^{6}<C_{10}^{6}p^{6}(1-p)^{4}$，可得 1﹣2p＜0.即 $p>\frac{1}{2}$.
因为 DX=2.4，可得 10p(1﹣p)=2.4，解得 p=0.6 或 p=0.4(舍去).
答案：B

9.△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.若△ABC 的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则 C=(　)
A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$
D. $\frac{\pi}{6}$
解析：∵△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.
△ABC 的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，
∴sinC=$\frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$=cosC,
∵0＜C＜π，∴C=$\frac{\pi}{4}$.
答案：C

10.设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，△ABC 为等边三角形且面积为$9\sqrt{3}$，则三棱锥 D﹣ABC 体积的最大值为(　)
A. $12\sqrt{3}$
B. $18\sqrt{3}$
C. $24\sqrt{3}$
D. $54\sqrt{3}$
解析：△ABC 为等边三角形且面积为$9\sqrt{3}$，可得$\frac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=9\sqrt{3}$，解得 AB=6，
球心为 O，三角形 ABC 的外心为 O′，显然 D 在 O′O 的延长线与球的交点如图：



$O'C=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}$，$OO'=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2$，

则三棱锥 D－ABC 高的最大值为：6，

则三棱锥 D－ABC 体积的最大值为：$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^3=18\sqrt{3}$.

答案：B

11.设 F_1，F_2 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0. b＞0)的左，右焦点，O 是坐标原点.过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，若 $|PF_1|=\sqrt{6}\,|OP|$，则 C 的离心率为(　　)

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

解析：双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0. b＞0)的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，

∴点 F_2 到渐近线的距离 $d=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，即 $|PF_2|=b$，

$\therefore\left|OP\right|=\sqrt{\left|OF_2\right|^2-\left|PF_2\right|^2}=\sqrt{c^2-b^2}=a,\cos\angle PF_2O=\frac{b}{c}$，

∵$|PF_1|=\sqrt{6}\,|OP|$，

∴$|PF_1|=\sqrt{6}\,a$，

在三角形 F_1PF_2 中，由余弦定理可得 $|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_2|\cdot|F_1F_2|\text{COS}\angle PF_2O$，

∴$6a^2=b^2+4c^2-2\times b\times 2c\times\frac{b}{c}=4c^2-3b^2=4c^2-3(c^2-a^2)$，

即 $3a^2=c^2$，

即 $\sqrt{3}\,a=c$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

答案：C

12.设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则(　　)

A. a+b＜ab＜0

B. ab＜a+b＜0

C. a+b＜0＜ab

D. ab＜0＜a+b

解析：∵$a=\log_{0.2}0.3=\frac{\lg 0.3}{-\lg 5}$，$b=\log_2 0.3=\frac{\lg 0.3}{\lg 2}$，

$\therefore a+b=\frac{\lg 0.3}{\lg 2}-\frac{\lg 0.3}{\lg 5}=\frac{\lg 0.3\left(\lg 5-\lg 2\right)}{\lg 2\lg 5}=\frac{\lg 0.3\lg\frac{5}{2}}{\lg 2\lg 5}$，

$ab=-\frac{\lg 0.3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 0.3}{\lg 5}=\frac{\lg 0.3\cdot\lg\frac{10}{3}}{\lg 2\lg 5}$，

$\because \lg\frac{10}{3}>\lg\frac{5}{2}$，$\frac{\lg 0.3}{\lg 2\lg 5}<0$，

∴ab＜a+b＜0.

答案：B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知向量$\vec{a}$=(1，2)，$\vec{b}$=(2，－2)，$\vec{c}$=(1，λ).若$\vec{c}$∥($2\vec{a}+\vec{b}$)，则λ=____.

解析：∵向量$\vec{a}$=(1，2)，$\vec{b}$=(2，－2)，

∴$2\vec{a}+\vec{b}$=(4，2)，

∵$\vec{c}$=(1，λ)，$\vec{c}$∥($2\vec{a}+\vec{b}$)，

$\therefore\frac{1}{4}=\frac{\lambda}{2}$，

解得λ=$\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

14.曲线 y=(ax+1)e^x在点(0，1)处的切线的斜率为－2，则 a=____.

解析：曲线 y=(ax+1)e^x，可得 y′=ae^x+(ax+1)e^x，

曲线 y=(ax+1)e^x在点(0，1)处的切线的斜率为－2，

可得：a+1=－2，解得 a=－3.

答案：－3

15.函数 f(x)=cos(3x+$\frac{\pi}{6}$)在[0，π]的零点个数为____.

解析：∵f(x)=cos(3x+$\frac{\pi}{6}$)=0，

$\therefore 3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，k∈Z，

∴x=$\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}k\pi$，k∈Z，

当 k=0 时，x=$\frac{\pi}{9}$，

当 k=1 时，x=$\frac{4}{9}\pi$，

当 k=2 时，x=$\frac{7}{9}\pi$，

当 k=3 时，x=$\frac{10}{9}\pi$，

∵x∈[0，π]，

∴x=$\frac{\pi}{9}$，或 x=$\frac{4}{9}\pi$，或 x=$\frac{7}{9}\pi$，

故零点的个数为3.
答案：3

16.已知点M(﹣1，1)和抛物线C：$y^2=4x$，过C的焦点且斜率为k的直线与C交于A，B两点.若∠AMB=90°，则k=____.
解析：∵抛物线C：$y^2=4x$的焦点F(1，0)，
∴过A，B两点的直线方程为y=k(x﹣1)，
联立$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x-1) \end{cases}$可得，$k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$，
设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，
则$x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$，
∴$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$，
∵M(﹣1，1)，
∴$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$，
∵∠AMB=90°=0，∴$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
∴$(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，
整理可得，$x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$，
∴$1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$，
即$k^2-4k+4=0$，
∴k=2.
答案：2

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。(一)必考题：共60分。
17.等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$.
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；
(2)记S_n为$\{a_n\}$的前n项和.若$S_m=63$，求m.
解析：(1)利用等比数列通项公式列出方程，求出公比q=±2，由此能求出$\{a_n\}$的通项公式.
(2)当$a_1=1$，q=﹣2时，$S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$，由$S_m=63$，得$S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$，m∈N，无解；当$a_1=1$，q=2时，$S_n=2^n-1$，由此能求出m.
答案：(1)∵等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$.
∴$1\times q^4=4\times(1\times q^2)$，
解得q=±2，
当q=2时，$a_n=2^{n-1}$，
当q=﹣2时，$a_n=(-2)^{n-1}$，
∴$\{a_n\}$的通项公式为，$a_n=2^{n-1}$，或$a_n=(-2)^{n-1}$.
(2)记S_n为$\{a_n\}$的前n项和.
当$a_1=1$，q=﹣2时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$，
由$S_m=63$，得$S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$，m∈N，无解；

当 $a_1=1$，$q=2$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

由 $S_m=63$，得 $S_m=2^m-1=63$，$m\in N$，

解得 m=6.

18.某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式.为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人.第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式.根据工人完成生产任务的工作时间(单位：min)绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

(1)根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高？并说明理由；

(2)求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3)根据(2)中的列联表，能否有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析：(1)根据茎叶图中的数据判断第二种生产方式的工作时间较少些，效率更高；

(2)根据茎叶图中的数据计算它们的中位数，再填写列联表；

(3)列联表中的数据计算观测值，对照临界值得出结论.

答案：(1)根据茎叶图中的数据知，

第一种生产方式的工作时间主要集中在 70～92 之间，

第二种生产方式的工作时间主要集中在 65～90 之间，

所以第二种生产方式的工作时间较少些，效率更高；

(2)这 40 名工人完成生产任务所需时间按从小到大的顺序排列后，

排在中间的两个数据是 79 和 81，计算它们的中位数为 $m=\frac{79+81}{2}=80$；

由此填写列联表如下；

	超过 m	不超过 m	总计
第一种生产方式	15	5	20
第二种生产方式	5	15	20
总计	20	20	40

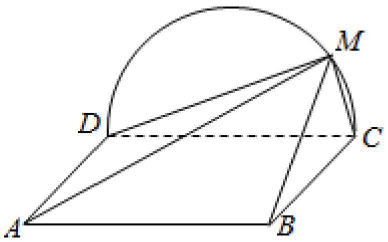
(3)根据(2)中的列联表，计算

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{40\times(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635，$$

∴能有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

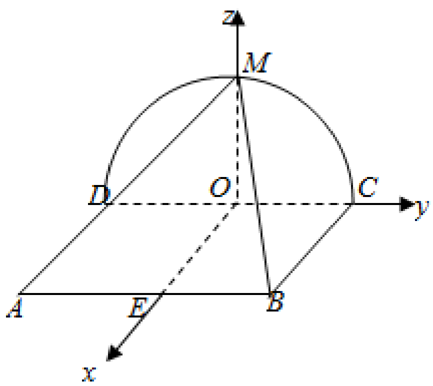
19.如图，边长为 2 的正方形 ABCD 所在的平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点.

(1)证明：平面 AMD⊥平面 BMC；
(2)当三棱锥 M－ABC 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



解析：(1)根据面面垂直的判定定理证明 MC⊥平面 ADM 即可.
(2)根据三棱锥的体积最大，确定 M 的位置，建立空间直角坐标系，求出点的坐标，利用向量法进行求解即可.
答案：(1)证明：在半圆中，DM⊥MC，

∵正方形 ABCD 所在的平面与半圆弧$\overset{\frown}{CD}$所在平面垂直，
∴AD⊥平面 BCM，则 AD⊥MC，
∵AD∩DM=D，
∴MC⊥平面 ADM，
∵MC⊂平面 MBC，
∴平面 AMD⊥平面 BMC.
(2)∵△ABC 的面积为定值，
∴要使三棱锥 M－ABC 体积最大，则三棱锥的高最大，
此时 M 为圆弧的中点，
建立以 O 为坐标原点，如图所示的空间直角坐标系如图



∵正方形 ABCD 的边长为 2，
∴A(2，－1，0)，B(2，1，0)，M(0，0，1)，
则平面 MCD 的法向量$\vec{m}$=(1，0，0)，
设平面 MAB 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)
则$\overrightarrow{AB}$=(0，2，0)，$\overrightarrow{AM}$=(－2，1，1)，
由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$=2y=0，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}$=－2x+y+z=0，
令 x=1，
则 y=0，z=2，即$\vec{n}$=(1，0，2)，
则$\cos<\vec{m},\vec{n}> = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \dfrac{1}{1\times\sqrt{1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

则面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M(1，m)(m＞0).

(1)证明：$k<-\frac{1}{2}$；

(2)设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$. 证明：$|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

解析：(1)设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，利用点差法得 $6(x_1-x_2)+8m(y_1-y_2)=0$，$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{6}{8m}=-\frac{3}{4m}$

又点 M(1，m)在椭圆内，即 $\frac{1}{4}+\frac{m^2}{3}<1$，(m＞0)，解得 m 的取值范围，即可得 $k<-\frac{1}{2}$，

(2)设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，P(x_3，y_3)，可得 $x_1+x_2=2$

由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，可得 $x_3-1=0$，由椭圆的焦半径公式得则 $|FA|=a-ex_1=2-\frac{1}{2}x_1$，$|FB|=2-\frac{1}{2}x_2$，$|FP|=2-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2}$. 即可证明 $|FA|+|FB|=2|FP|$，求得 A，B 坐标再求公差.

答案：(1)设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，

∵线段 AB 的中点为 M(1，m)，

∴$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2m$

将 A，B 代入椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 中，可得

$$\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\3x_2^2+4y_2^2=12\end{cases},$$

两式相减可得，$3(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

即 $6(x_1-x_2)+8m(y_1-y_2)=0$，

∴$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{6}{8m}=-\frac{3}{4m}$

点 M(1，m)在椭圆内，即 $\frac{1}{4}+\frac{m^2}{3}<1$，(m＞0)，

解得 $0<m<\frac{3}{2}$

∴$k=\frac{3}{4m}<-\frac{1}{2}$.

(2)证明：设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，P(x_3，y_3)，

可得 $x_1+x_2=2$，

∵$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，F(1，0)，∴$x_1-1+x_2-1+x_3-1=0$，$y_1+y_2+y_3=0$，

∴$x_3=1$，

∵m＞0，可得 P 在第一象限，故 $y_3=-\frac{3}{2}$，$m=\frac{3}{4}$，k=－1

由椭圆的焦半径公式得则 $|FA|=a-ex_1=2-\frac{1}{2}x_1$，$|FB|=2-\frac{1}{2}x_2$，$|FP|=2-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2}$.

则|FA|+|FB|=4 - $\frac{1}{2}$ (x_1+x_2)＝3，∴|FA|+|FB|=2|FP|，

联立$\begin{cases} y=-x+\frac{7}{4} \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，可得$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

所以该数列的公差 d 满足$2d=\pm\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\pm\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

∴该数列的公差为$\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

21.已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.
(1)若 a=0，证明：当 - 1＜x＜0 时，f(x)＜0；当 x＞0 时，f(x)＞0；
(2)若 x=0 是 f(x)的极大值点，求 a.
解析：(1)对函数 f(x)两次求导数，分别判断 f′(x)和 f(x)的单调性，结合 f(0)=0 即可得出结论；
(2)令 h(x)为 f′(x)的分子，令 h″(0)计算 a，讨论 a 的范围，得出 f(x)的单调性，从额得出 a 的值.
答案：(1)证明：当 a=0 时，f(x)=(2+x)ln(1+x) - 2x，(x＞ - 1).

$f'(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$，$f''(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$，

可得 x∈(- 1，0)时，f″(x)≤0，x∈(0，+∞)时，f″(x)≥0
∴f′(x)在(- 1，0)递减，在(0，+∞)递增，
∴f′(x)≥f′(0)=0，
∴f(x)=(2+x)ln(1+x) - 2x 在(- 1，+∞)上单调递增，又 f(0)=0.
∴当 - 1<x<0 时，f(x)＜0；当 x>0 时，f(x)＞0.
(2)解：由 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$，得

$f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2=\frac{ax^2-x+(1+2ax)(1+x)\ln(x+1)}{x+1}$，

令 $h(x)=ax^2-x+(1+2ax)(1+x)\ln(x+1)$，
h′(x)=4ax+(4ax+2a+1)ln(x+1).
当 a≥0，x＞0 时，h′(x)＞0，h(x)单调递增，
∴h(x)＞h(0)=0，即 f′(x)＞0，
∴f(x)在(0，+∞)上单调递增，故 x=0 不是 f(x)的极大值点，不符合题意.

当 a＜0 时，$h''(x)=8a+4a\ln(x+1)+\frac{1-2a}{x+1}$，

显然 h″(x)单调递减，

①令 h″(0)=0，解得 a= - $\frac{1}{6}$.

∴当 - 1<x<0 时，h″(x)＞0，当 x>0 时，h″(x)＜0，
∴h′(x)在(- 1，0)上单调递增，在(0，+∞)上单调递减，
∴h′(x)≤h′(0)=0，
∴h(x)单调递减，又 h(0)=0，
∴当 - 1<x<0 时，h(x)＞0，即 f′(x)＞0，
当 x>0 时，h(x)＜0，即 f′(x)＜0，
∴f(x)在(- 1，0)上单调递增，在(0，+∞)上单调递减，
∴x=0 是 f(x)的极大值点，符合题意；

②若 - $\frac{1}{6}$＜a＜0，则 h″(0)=1+6a＞0，h″($e^{-\frac{1+6a}{4a}}$ - 1)=(2a - 1)(1 - $e^{\frac{1+6a}{4a}}$)＜0，

∴h″(x)=0 在(0，+∞)上有唯一一个零点，设为 x_0，

∴当 $0<x<x_0$时，$h''(x)>0$，$h'(x)$单调递增，
∴$h'(x)>h'(0)=0$，即 $f'(x)>0$，
∴$f(x)$在$(0, x_0)$上单调递增，不符合题意；
③若 $a<-\frac{1}{6}$，则 $h''(0)=1+6a<0$，$h''(\frac{1}{e^2}-1)=(1-2a)e^2>0$，
∴$h''(x)=0$ 在$(-1, 0)$上有唯一一个零点，设为 x_1，
∴当 $x_1<x<0$ 时，$h''(x)<0$，$h'(x)$单调递减，
∴$h'(x)>h'(0)=0$，∴$h(x)$单调递增，
∴$h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<0$，
∴$f(x)$在$(x_1, 0)$上单调递减，不符合题意.
综上，$a=-\frac{1}{6}$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在平面直角坐标系 x0y 中，⊙0 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，(θ 为参数)，过点$(0, -\sqrt{2})$且倾斜角为α 的直线 l 与⊙0 交于 A，B 两点.
(1)求α 的取值范围；
(2)求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

解析：(1)⊙0 的普通方程为 $x^2+y^2=1$，圆心为 $O(0, 0)$，半径 $r=1$，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，直线 l 的方程为 $x=0$，成立；当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，过点$(0, -\sqrt{2})$且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+\sqrt{2}$，从而圆心 $O(0, 0)$到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$，进而求出 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，由此能求出α 的取值范围.

(2) 设直线 l 的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$，联立$\begin{cases}x=m\left(y+\sqrt{2}\right)\\x^2+y^2=1\end{cases}$，得$\left(m^2+1\right)y^2+2\sqrt{2}m^2y+2m^2-1$，由此利用韦达定理、中点坐标公式能求出 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

答案：(1)∵⊙0 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$(θ 为参数)，
∴⊙0 的普通方程为 $x^2+y^2=1$，圆心为 $O(0, 0)$，半径 $r=1$，
当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，过点$(0, -\sqrt{2})$且倾斜角为α 的直线 l 的方程为 $x=0$，成立；
当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，过点$(0, -\sqrt{2})$且倾斜角为α 的直线 l 的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+\sqrt{2}$，
∵倾斜角为α 的直线 l 与⊙0 交于 A，B 两点，
∴圆心 $O(0, 0)$到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$，
∴$\tan^2\alpha>1$，∴$\tan\alpha>1$ 或 $\tan\alpha<-1$，

$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$，

综上 α 的取值范围是$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

(2)由(1)知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$，

设 $A(x_1, y_1)$，$(B(x_2, y_2)$，$P(x_3, y_3)$，

联立$\begin{cases} x=m\left(y+\sqrt{2}\right) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$，得$\left(m^2+1\right)y^2+2\sqrt{2}m^2y+2m^2-1=0$，

$\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \\ y_1y_2=\frac{2m^2-1}{m^2+1} \end{cases}$，

$x_1+x_2=m\left(y_1+\sqrt{2}\right)+m\left(y_2+\sqrt{2}\right)=-\frac{2\sqrt{2}m^3}{m^2+1}2\sqrt{2}m$，

$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1}$，$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1}$，

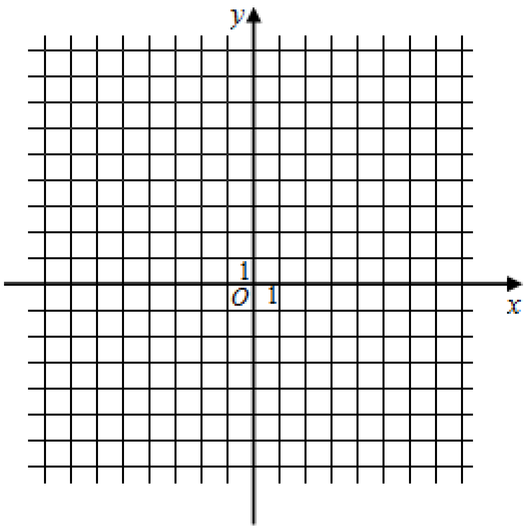
∴AB 中点 P 的轨迹的参数方程为$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1} \\ y=\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \end{cases}$，(m 为参数)，(﹣1<m<1).

[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

23.设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1)画出 $y=f(x)$的图象；

(2)当 $x\in[0, +\infty)$时，$f(x)\leqslant ax+b$，求 $a+b$ 的最小值.



解析：(1)利用分段函数的性质将函数表示为分段函数形式进行作图即可.

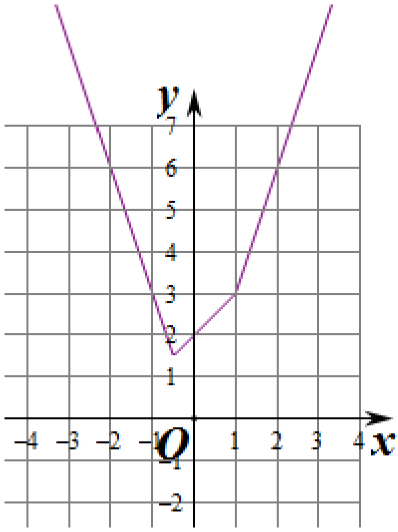
(2)将不等式恒成立转化为图象关系进行求解即可.

答案：(1)当 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-(2x+1)-(x-1)=-3x$，

当$-\frac{1}{2}<x<1$，$f(x)=(2x+1)-(x-1)=x+2$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=(2x+1)+(x-1)=3x$，

则 $f(x)=\begin{cases}-3x, & x\le -\frac{1}{2}\\ x+2, & -\frac{1}{2}<x<1\\ 3x, & x\ge 1\end{cases}$ 对应的图象为：



画出 y=f(x)的图象；

(2)当 x∈[0，+∞)时，f(x)≤ax+b，

当 x=0 时，f(0)=2≤0•a+b，∴b≥2，

当 x＞0 时，要使 f(x)≤ax+b 恒成立，

则函数 f(x)的图象都在直线 y=ax+b 的下方或在直线上，

∵f(x)的图象与 y 轴的交点的纵坐标为 2，

且各部分直线的斜率的最大值为 3，

故当且仅当 a≥3 且 b≥2 时，不等式 f(x)≤ax+b 在[0，+∞)上成立，

即 a+b 的最小值为 5.