

## 2016 年湖南省永州市中考真题数学

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分

1.  $-\frac{1}{2016}$  的相反数的倒数是( )

- A.1
- B.-1
- C.2016
- D.-2016

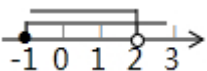
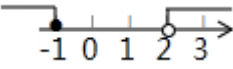
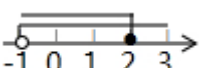
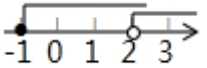
解析：  $-\frac{1}{2016}$  的相反数是：  $\frac{1}{2016}$ ，

$$\therefore \frac{1}{2016} \times 2016 = 1,$$

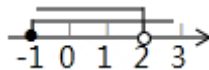
$\therefore -\frac{1}{2016}$  的相反数的倒数是： 2016.

答案： C.

2. 不等式组  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$  的解集在数轴上表示正确的是( )



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析： 不等式组  $x \geq -1, x < 2$  的解集在数轴上表示为：



答案： A.

3. 下列图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是( )

- A. 
- B. 



解析：A、是轴对称图形.也是中心对称图形，故此选项正确；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误.

答案：A.

4.下列运算正确的是( )

A.  $-a \cdot a^3 = a^3$

B.  $-(a^2)^2 = a^4$

C.  $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}$

D.  $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) = -1$

解析：A、 $-a \cdot a^3 = -a^4$ ，故选项错误；

B、 $-(a^2)^2 = -a^4$ ，选项错误；

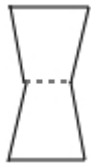
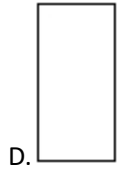
C、 $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$ ，选项错误；

D、 $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$ ，选项正确.

答案：D.

5.如图，将两个形状和大小都相同的杯子叠放在一起，则该实物图的主视图为( )





解析：该实物图的主视图为

答案：B.

6.在“爱我永州”中学生演讲比赛中，五位评委分别给甲、乙两位选手的评分如下：

甲：8、7、9、8、8

乙：7、9、6、9、9

则下列说法中错误的是( )

A.甲、乙得分的平均数都是 8

B.甲得分的众数是 8，乙得分的众数是 9

C.甲得分的中位数是 9，乙得分的中位数是 6

D.甲得分的方差比乙得分的方差小

解析：A、 $\bar{x}_{甲} = \frac{8+7+9+8+8}{5} = 8$ ， $\bar{x}_{乙} = \frac{7+9+6+9+9}{5} = 8$ ，故此选项正确；

B、甲得分次数最多是 8 分，即众数为 8 分，乙得分最多的是 9 分，即众数为 9 分，故此选项正确；

C、 $\because$ 甲得分从小到大排列为：7、8、8、8、9， $\therefore$ 甲的中位数是 8 分；

$\because$ 乙得分从小到大排列为：6、7、9、9、9， $\therefore$ 乙的中位数是 9 分；故此选项错误；

D、 $\because S_{甲}^2 = \frac{1}{5} \times [(8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2] = \frac{1}{5} \times 2 = 0.4$ ，

$S_{乙}^2 = \frac{1}{5} \times [(7-8)^2 + (9-8)^2 + (6-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2] = \frac{1}{5} \times 8 = 1.6$ ，

$\therefore S_{甲}^2 < S_{乙}^2$ ，故 D 正确；

答案：C.

7.对下列生活现象的解释其数学原理运用错误的是( )

A.把一条弯曲的道路改成直道可以缩短路程是运用了“两点之间线段最短”的原理

B.木匠师傅在刨平的木板上任选两个点就能画出一条笔直的墨线是运用了“直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短”的原理

C.将自行车的车架设计为三角形形状是运用了“三角形的稳定性”的原理

D.将车轮设计为圆形是运用了“圆的旋转对称性”的原理

解析：A、把一条弯曲的道路改成直道可以缩短路程是运用了“两点之间线段最短”的原理，正确；

B、木匠师傅在刨平的木板上任选两个点就能画出一条笔直的墨线是运用了“两点确定一条直线”的原理，故错误；

C、将自行车的车架设计为三角形形状是运用了“三角形的稳定性”的原理，正确；

D、将车轮设计为圆形是运用了“圆的旋转对称性”的原理，正确，

答案：B.

8. 抛物线  $y=x^2+2x+m-1$  与  $x$  轴有两个不同的交点，则  $m$  的取值范围是( )

A.  $m < 2$

B.  $m > 2$

C.  $0 < m \leq 2$

D.  $m < -2$

解析：∵ 抛物线  $y=x^2+2x+m-1$  与  $x$  轴有两个交点，

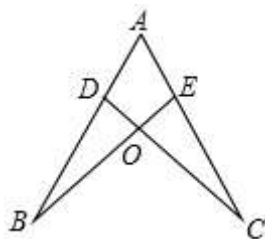
∴  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ,

即  $4 - 4m + 4 > 0$ ,

解得  $m < 2$ ,

答案：A.

9. 如图，点  $D$ 、 $E$  分别在线段  $AB$ 、 $AC$  上， $CD$  与  $BE$  相交于  $O$  点，已知  $AB=AC$ ，现添加以下的哪个条件仍不能判定  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$  ( )



A.  $\angle B = \angle C$

B.  $AD = AE$

C.  $BD = CE$

D.  $BE = CD$

解析：∵  $AB=AC$ ， $\angle A$  为公共角，

A、如添加  $\angle B = \angle C$ ，利用 ASA 即可证明  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ；

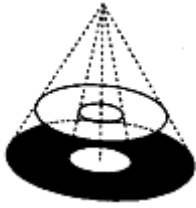
B、如添  $AD=AE$ ，利用 SAS 即可证明  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ；

C、如添  $BD=CE$ ，等量关系可得  $AD=AE$ ，利用 SAS 即可证明  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ；

D、如添  $BE=CD$ ，因为 SSA，不能证明  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，所以此选项不能作为添加的条件.

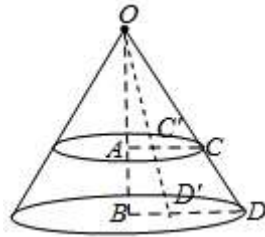
答案：D.

10. 圆桌面(桌面中间有一个直径为  $0.4\text{m}$  的圆洞)正上方的灯泡(看作一个点)发出的光线照射平行于地面的桌面后，在地面上形成如图所示的圆环形阴影. 已知桌面直径为  $1.2\text{m}$ ，桌面离地面  $1\text{m}$ ，若灯泡离地面  $3\text{m}$ ，则地面圆环形阴影的面积是( )



- A.  $0.324 \pi \text{ m}^2$
- B.  $0.288 \pi \text{ m}^2$
- C.  $1.08 \pi \text{ m}^2$
- D.  $0.72 \pi \text{ m}^2$

解析：如图所示： $\because AC \perp OB, BD \perp OB,$



$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOD,$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}, \text{ 即 } \frac{2}{3} = \frac{0.6}{BD},$$

解得：  $BD=0.9\text{m},$

同理可得：  $AC' =0.2\text{m},$  则  $BD' =0.3\text{m},$

$$\therefore S_{\text{圆环阴影}} = 0.9^2 \pi - 0.3^2 \pi = 0.72 \pi (\text{m}^2).$$

答案： D.

11. 下列式子错误的是( )

- A.  $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$
- B.  $\tan 15^\circ \cdot \tan 75^\circ = 1$
- C.  $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$
- D.  $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ$

解析： A、  $\sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ,$  式子正确；

B、  $\tan 15^\circ \cdot \tan 75^\circ = \tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ = 1,$  式子正确；

C、  $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$  正确；

D、  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$  则  $\sin 60^\circ \neq 2 \sin 30^\circ$  错误.

答案： D.

12. 我们根据指数运算，得出了一种新的运算，如表是两种运算对应关系的一组实例：

指数运算	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	...	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	...
新运算	$\log_2 2=1$	$\log_2 4=2$	$\log_2 8=3$	...	$\log_3 3=1$	$\log_3 9=2$	$\log_3 27=3$	...

根据上表规律，某同学写出了三个式子：①  $\log_2 16=4,$  ②  $\log_5 25=5,$  ③  $\log_2 \frac{1}{2} = -1.$  其中正确

的是( )

- A. ①②

B.①③

C.②③

D.①②③

解析：①因为  $2^4=16$ ，所以此选项正确；

②因为  $5^5=3125 \neq 25$ ，所以此选项错误；

③因为  $2^{-1}=\frac{1}{2}$ ，所以此选项正确；

答案：B.

二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分

13. 涪天河水库位于永州市江华瑶族自治县境内，其扩建工程是湖南省“十二五”期间水利建设的“一号工程”，也是国务院重点推进的重大工程，其中灌区工程总投资约 39 亿元. 请将 3900000000 用科学记数法表示为\_\_\_\_\_.

解析：3900000000= $3.9 \times 10^9$ ，

答案： $3.9 \times 10^9$ .

14. 在 1,  $\pi$ ,  $\sqrt{3}$ , 2, -3.2 这五个数中随机取出一个数，则取出的这个数大于 2 的概率是\_\_\_\_\_.

解析： $\because$  在 1,  $\pi$ ,  $\sqrt{3}$ , 2, -3.2 这五个数中，只有  $\pi$  这个数大于 2，

$\therefore$  随机取出一个数，这个数大于 2 的概率是： $\frac{1}{5}$ .

答案： $\frac{1}{5}$ .

15. 已知反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象经过点 A(1, -2)，则 k=\_\_\_\_\_.

解析： $\because$  反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象经过点 A(1, -2)，

$\therefore -2 = \frac{k}{1}$ ,

解得 k=-2.

答案：-2.

16. 方程组  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$  的解是\_\_\_\_\_.

解析：解方程组  $\begin{cases} x + 2y = 2 \text{ ①} \\ 2x + y = 4 \text{ ②} \end{cases}$ ,

由①得： $x = 2 - 2y$  ③，

将③代入②，得： $2(2 - 2y) + y = 4$ ，

解得： $y = 0$ ，

将  $y = 0$  代入①，得： $x = 2$ ，

故方程组的解为  $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ ,

答案:  $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ .

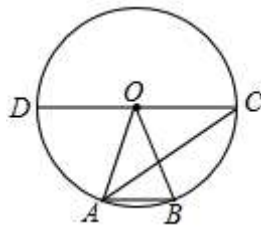
17.化简:  $\frac{x+3}{x^2-4x+4} \div \frac{x^2+3x}{(x-2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解析: 原式 =  $\frac{x+3}{(x-2)^2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x(x+3)}$

$$= \frac{1}{x},$$

答案:  $\frac{1}{x}$ .

18.如图, 在 $\odot O$ 中, A, B 是圆上的两点, 已知 $\angle AOB=40^\circ$ , 直径  $CD \parallel AB$ , 连接 AC, 则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度.



解析:  $\because \angle AOB=40^\circ$ ,  $OA=OB$ ,

$$\therefore \angle ABO = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

$\because$  直径  $CD \parallel AB$ ,

$$\therefore \angle BOC = \angle ABO = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 35^\circ.$$

答案: 35.

19.已知一次函数  $y=kx+2k+3$  的图象与  $y$  轴的交点在  $y$  轴的正半轴上, 且函数值  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $k$  所有可能取得的整数值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解析: 由已知得:  $\begin{cases} 2k+3 > 0 \\ k < 0 \end{cases}$ ,

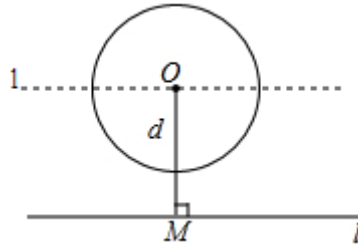
$$\text{解得: } -\frac{3}{2} < k < 0.$$

$\because k$  为整数,

$$\therefore k = -1.$$

答案: -1.

20.如图,给定一个半径长为 2 的圆,圆心  $O$  到水平直线  $l$  的距离为  $d$ ,即  $OM=d$ .我们把圆上到直线  $l$  的距离等于 1 的点的个数记为  $m$ .如  $d=0$  时,  $l$  为经过圆心  $O$  的一条直线,此时圆上有四个到直线  $l$  的距离等于 1 的点,即  $m=4$ ,由此可知:



(1)当  $d=3$  时,  $m=$ \_\_\_\_\_;

(2)当  $m=2$  时,  $d$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析: (1)当  $d=3$  时,

$\because 3 > 2$ , 即  $d > r$ ,

$\therefore$  直线与圆相离, 则  $m=1$ ,

答案: 1;

(2)当  $d=3$  时,  $m=1$ ;

当  $d=1$  时,  $m=3$ ;

$\therefore$  当  $1 < d < 3$  时,  $m=2$ ,

答案:  $1 < d < 3$ .

三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 79 分

21.计算:  $\sqrt[3]{8} - (3 - \pi)^0 - |-3 + 2|$

解析: 直接利用立方根的性质化简再结合零指数幂的性质以及绝对值的性质化简求出答案.

答案:  $\sqrt[3]{8} - (3 - \pi)^0 - |-3 + 2|$

$=2 - 1 - 1$

$=0$ .

22.二孩政策的落实引起了全社会的关注,某校学生数学兴趣小组为了了解本校同学对父母生育二孩的态度,在学校抽取了部分同学对父母生育二孩所持的态度进行了问卷调查,调查分别为非常赞同、赞同、无所谓、不赞同等四种态度,现将调查统计结果制成了如图两幅统计图,请结合两幅统计图,回答下列问题:

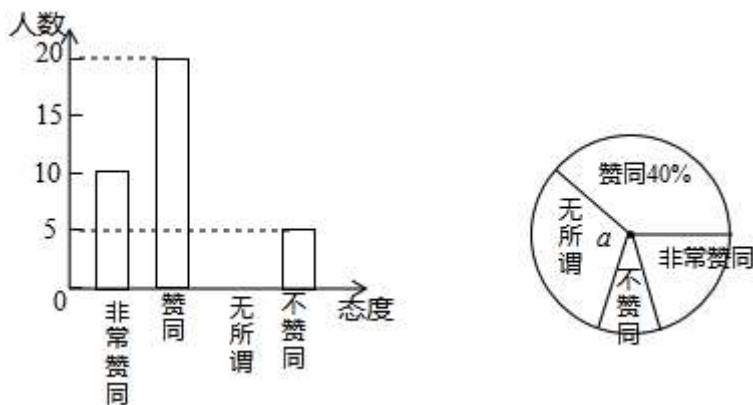
(1)在这次问卷调查中一共抽取了\_\_\_\_\_名学生,  $a=$ \_\_\_\_\_%;

(2)请补全条形统计图;

(3)持“不赞同”态度的学生人数的百分比所占扇形的圆心角为\_\_\_\_\_度;

(4)若该校有 3000 名学生,请你估计该校学生对父母生育二孩持“赞同”和“非常赞同”两种态度的人数之和.

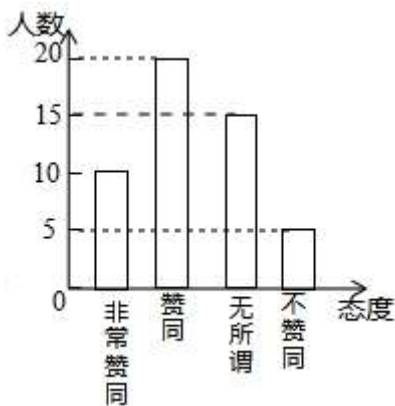




解析: (1)由赞同的人数 20, 所占 40%, 即可求出样本容量, 进而求出 a 的值;  
 (2)由(1)可知抽查的人数, 即可求出无所谓态度的人数, 即可将条形统计图补充完整;  
 (3)求出不赞成人数的百分数, 即可求出圆心角的度数;  
 (4)求出“赞同”和“非常赞同”两种态度的人数所占的百分数, 用样本估计总体的思想计算即可.

答案: (1) $20 \div 40\% = 50$ (人), 无所谓态度的人数为  $50 - 10 - 20 - 5 = 15$ , 则  $a = \frac{15}{50} \times 100\% = 30\%$ ;

(2)补全条形统计图如图所示:



(3)不赞成人数占总人数的百分数为  $\frac{5}{50} \times 100\% = 10\%$ ,

持“不赞同”态度的学生人数的百分比所占扇形的圆心角为  $10\% \times 360^\circ = 36^\circ$ ,

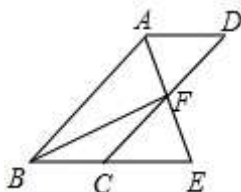
(4)“赞同”和“非常赞同”两种态度的人数所占的百分数为  $\frac{10+20}{50} \times 100\% = 60\%$ ,

则该校学生对父母生育二孩持“赞同”和“非常赞同”两种态度的人数之和为  $3000 \times 60\% = 1800$ (人).

23.如图, 四边形 ABCD 为平行四边形,  $\angle BAD$  的角平分线 AE 交 CD 于点 F, 交 BC 的延长线于点 E.

(1)求证:  $BE = CD$ ;

(2)连接 BF, 若  $BF \perp AE$ ,  $\angle BEA = 60^\circ$ ,  $AB = 4$ , 求平行四边形 ABCD 的面积.



解析：(1)由平行四边形的性质和角平分线得出 $\angle BAE = \angle BEA$ ，即可得出 $AB = BE$ ；

(2)先证明 $\triangle ABE$ 是等边三角形，得出 $AE = AB = 4$ ， $AF = EF = 2$ ，由勾股定理求出 $BF$ ，由AAS证明 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$ ，得出 $\triangle ADF$ 的面积 $= \triangle ECF$ 的面积，因此平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle ABE$ 的面积 $= \frac{1}{2} AE \cdot BF$ ，即可得出结果。

答案：(1)证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle AEB = \angle DAE$ ，

$\because AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle AEB$ ，

$\therefore AB = BE$ ， $\therefore BE = CD$ ；

(2)解： $\because AB = BE$ ， $\angle BEA = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore AE = AB = 4$ ，

$\because BF \perp AE$ ，

$\therefore AF = EF = 2$ ，

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}，$$

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle D = \angle ECF$ ， $\angle DAF = \angle E$ ，

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle ECF \\ \angle DAF = \angle E \\ AF = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ECF$ (AAS)，

$\therefore \triangle ADF$ 的面积 $= \triangle ECF$ 的面积，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle ABE$ 的面积 $= \frac{1}{2} AE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 。

24.某种商品的标价为400元/件，经过两次降价后的价格为324元/件，并且两次降价的百分率相同。

(1)求该种商品每次降价的百分率；

(2)若该种商品进价为300元/件，两次降价共售出此种商品100件，为使两次降价销售的总利润不少于3210元.问第一次降价后至少要售出该种商品多少件？

解析：(1)设该种商品每次降价的百分率为 $x\%$ ，根据“两次降价后的售价=原价 $\times$ (1-降价百分比)的平方”，即可得出关于 $x$ 的一元二次方程，解方程即可得出结论；

(2)设第一次降价后售出该种商品 $m$ 件，则第二次降价后售出该种商品 $(100-m)$ 件，根据“总利润=第一次降价后的单件利润 $\times$ 销售数量+第二次降价后的单件利润 $\times$ 销售数量”，即可的出关于 $m$ 的一元一次不等式，解不等式即可得出结论。

答案：(1)设该种商品每次降价的百分率为 $x\%$ ，

依题意得： $400 \times (1-x\%)^2 = 324$ ，

解得： $x = 10$ ，或 $x = 190$ (舍去)。

答：该种商品每次降价的百分率为 10%.

(2) 设第一次降价后售出该种商品  $m$  件，则第二次降价后售出该种商品  $(100-m)$  件，

第一次降价后的单件利润为： $400 \times (1-10\%) - 300 = 60$  (元/件)；

第二次降价后的单件利润为： $324 - 300 = 24$  (元/件).

依题意得： $60m + 24 \times (100-m) = 36m + 2400 \geq 3210$ ,

解得： $m \geq 22.5$ .

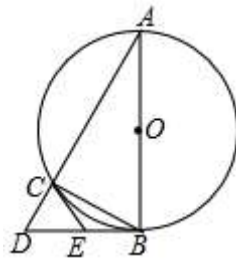
$\therefore m \geq 23$ .

答：为使两次降价销售的总利润不少于 3210 元. 第一次降价后至少要售出该种商品 23 件.

25. 如图， $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的内接三角形， $AB$  为直径，过点  $B$  的切线与  $AC$  的延长线交于点  $D$ ， $E$  是  $BD$  中点，连接  $CE$ .

(1) 求证： $CE$  是  $\odot O$  的切线；

(2) 若  $AC=4$ ， $BC=2$ ，求  $BD$  和  $CE$  的长.

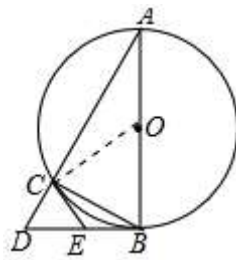


解析：(1) 连接  $OC$ ，由弦切角定理和切线的性质得出  $\angle CBE = \angle A$ ， $\angle ABD = 90^\circ$ ，由圆周角定理得出  $\angle ACB = 90^\circ$ ，得出  $\angle ACO + \angle BCO = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，由直角三角形斜边上的中线性质的得出  $CE = \frac{1}{2} BD = BE$ ，得出  $\angle BCE = \angle CBE = \angle A$ ，证出  $\angle ACO = \angle BCE$ ，得出  $\angle BCE + \angle BCO = 90^\circ$ ，得出  $CE \perp OC$ ，即可得出结论；

(2) 由勾股定理求出  $AB$ ，再由三角函数得出  $\tan A = \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，求出  $BD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5}$ ，

即可得出  $CE$  的长.

答案：(1) 证明：连接  $OC$ ，如图所示：



$\because BD$  是  $\odot O$  的切线，

$\therefore \angle CBE = \angle A$ ， $\angle ABD = 90^\circ$ ，

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACO + \angle BCO = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$\because E$  是  $BD$  中点，

$\therefore CE = \frac{1}{2} BD = BE$ ，

$\therefore \angle BCE = \angle CBE = \angle A$ ,  
 $\because OA = OC$ ,  
 $\therefore \angle ACO = \angle A$ ,  
 $\therefore \angle ACO = \angle BCE$ ,  
 $\therefore \angle BCE + \angle BCO = 90^\circ$ ,  
 即  $\angle OCE = 90^\circ$ ,  $CE \perp OC$ ,  
 $\therefore CE$  是  $\odot O$  的切线;  
 (2)解:  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\because \tan A = \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5},$$

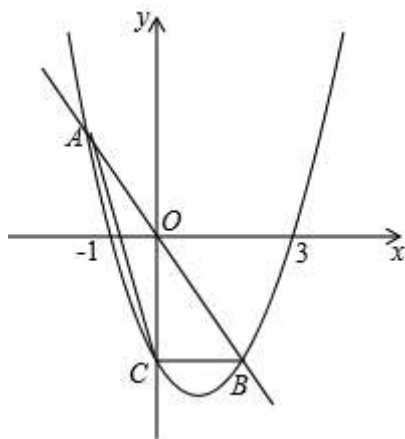
$$\therefore CE = \frac{1}{2} BD = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

26. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 3$  经过  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$  两点, 与  $y$  轴交于点  $C$ , 直线  $y = kx$  与抛物线交于  $A, B$  两点.

(1) 写出点  $C$  的坐标并求出此抛物线的解析式;

(2) 当原点  $O$  为线段  $AB$  的中点时, 求  $k$  的值及  $A, B$  两点的坐标;

(3) 是否存在实数  $k$  使得  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ? 若存在, 求出  $k$  的值; 若不存在, 请说明理由.



解析: (1) 令抛物线解析式中  $x=0$  求出  $y$  值即可得出  $C$  点的坐标, 有点  $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$  利用待定系数法即可求出抛物线的解析式;

(2) 将正比例函数解析式代入抛物线解析式中, 找出关于  $x$  的一元二次方程, 根据根与系数的关系即可得出 “ $x_A + x_B = 2 + k$ ,  $x_A \cdot x_B = -3$ ”, 结合点  $O$  为线段  $AB$  的中点即可得出  $x_A + x_B = 2 + k = 0$ , 由此得出  $k$  的值, 将  $k$  的值代入一元二次方程中求出  $x_A, x_B$ , 在代入一次函数解析式中即可得出点  $A, B$  的坐标;

(3) 假设存在, 利用三角形的面积公式以及(2)中得到的 “ $x_A + x_B = 2 + k$ ,  $x_A \cdot x_B = -3$ ”, 即可得出关于  $k$  的一元二次方程, 结合方程无解即可得出假设不成了, 从而得出不存在满足题意的  $k$  值.

答案：(1)令抛物线  $y=ax^2+bx-3$  中  $x=0$ ，则  $y=-3$ ，

∴点 C 的坐标为(0, -3).

∴抛物线  $y=ax^2+bx-3$  经过(-1, 0), (3, 0)两点，

$$\therefore \text{有} \begin{cases} 0=a-b-3 \\ 0=9a+3b-3 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases},$$

∴此抛物线的解析式为  $y=x^2-2x-3$ .

(2)将  $y=kx$  代入  $y=x^2-2x-3$  中得:  $kx=x^2-2x-3$ ,

整理得:  $x^2-(2+k)x-3=0$ ,

∴ $x_A+x_B=2+k$ ,  $x_A \cdot x_B=-3$ .

∴原点 O 为线段 AB 的中点，

∴ $x_A+x_B=2+k=0$ ,

解得:  $k=-2$ .

当  $k=-2$  时,  $x^2-(2+k)x-3=x^2-3=0$ ,

解得:  $x_A=-\sqrt{3}$ ,  $x_B=\sqrt{3}$ .

∴  $y_A = -2x_A = 2\sqrt{3}$ ,  $y_B = -2x_B = -2\sqrt{3}$ .

故当原点 O 为线段 AB 的中点时, k 的值为-2, 点 A 的坐标为(-3,  $2\sqrt{3}$ ), 点 B 的坐标为( $\sqrt{3}$ ,  $-2\sqrt{3}$ ).

(3)假设存在.

由(2)可知:  $x_A+x_B=2+k$ ,  $x_A \cdot x_B=-3$ ,

$$S_{\square ABC} = \frac{1}{2} OC \cdot |x_A - x_B| = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

∴ $(2+k)^2-4 \times (-3)=10$ , 即 $(2+k)^2+2=0$ .

∴ $(2+k)^2$  非负, 无解.

故假设不成立.

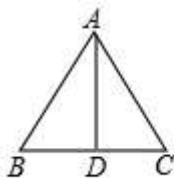
所以不存在实数 k 使得  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ .

27.问题探究:

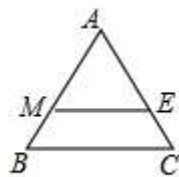
1.新知学习

若把将一个平面图形分为面积相等的两个部分的直线叫做该平面图形的“面线”, 其“面线”被该平面图形截得的线段叫做该平面图形的“面径”(例如圆的直径就是圆的“面径”).

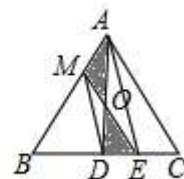
2.解决问题



图一



图二



图三

已知等边三角形 ABC 的边长为 2.

- (1)如图一，若  $AD \perp BC$ ，垂足为  $D$ ，试说明  $AD$  是  $\triangle ABC$  的一条面径，并求  $AD$  的长；  
 (2)如图二，若  $ME \parallel BC$ ，且  $ME$  是  $\triangle ABC$  的一条面径，求面径  $ME$  的长；  
 (3)如图三，已知  $D$  为  $BC$  的中点，连接  $AD$ ， $M$  为  $AB$  上的一点 ( $0 < AM < 1$ )， $E$  是  $DC$  上的一点，连接  $ME$ ， $ME$  与  $AD$  交于点  $O$ ，且  $S_{\triangle MOA} = S_{\triangle DOE}$ .

①求证： $ME$  是  $\triangle ABC$  的面径；

②连接  $AE$ ，求证： $MD \parallel AE$ ；

(4)请你猜测等边三角形  $ABC$  的面径长  $l$  的取值范围(直接写出结果)

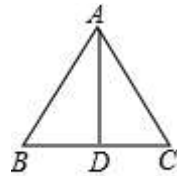
解析：(1)根据等腰三角形三线合一即可证明，利用直角三角形  $30^\circ$  性质，即可求出  $AD$ 。

(2)根据相似三角形性质面积比等于相似比的平方，即可解决问题。

(3)如图三中，作  $MN \perp AE$  于  $N$ ， $DF \perp AE$  于  $F$ ，先证明  $MN = DF$ ，推出四边形  $MNFD$  是平行四边形即可。

(4)如图四中，作  $MF \perp BC$  于  $F$ ，设  $BM = x$ ， $BE = y$ ，求出  $EM$ ，利用不等式性质证明  $ME \geq \sqrt{2}$  即可解决问题。

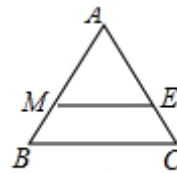
答案：(1)如图一中，



图一

$\because AB = AC = BC = 2$ ， $AD \perp BC$ ，  
 $\therefore BD = DC$ ，  
 $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$ ，  
 $\therefore$  线段  $AD$  是  $\triangle ABC$  的面径。  
 $\because \angle B = 60^\circ$ ，  
 $\therefore \sin 60^\circ = \frac{AD}{AB}$ ，  
 $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{2}$ ，  
 $\therefore AD = \sqrt{3}$ 。

(2)如图二中，



图二

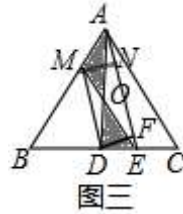
$\because ME \parallel BC$ ，且  $ME$  是  $\triangle ABC$  的一条面径，

$\therefore \triangle AME \sim \triangle ABC$ ， $\frac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \frac{ME}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore ME = \sqrt{2}.$$

(3)如图三中，作  $MN \perp AE$  于  $N$ ， $DF \perp AE$  于  $F$ 。



$$\textcircled{1} \because S_{\triangle MOA} = S_{\triangle DOE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BME},$$

$$\because BD = DC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle EMB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$\therefore ME$  是  $\triangle ABC$  的面径；

$$\textcircled{2} \because S_{\triangle MOA} = S_{\triangle DOE},$$

$$\therefore S_{\triangle AEM} = S_{\triangle AED},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot AE \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DF,$$

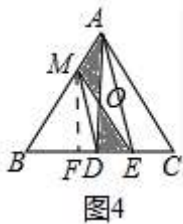
$$\therefore MN = DF,$$

$$\because MN \parallel DF,$$

$\therefore$  四边形  $MNFD$  是平行四边形，

$$\therefore DM \parallel AE.$$

(4)如图四中，作  $MF \perp BC$  于  $F$ ，设  $BM = x$ ， $BE = y$ ，



$$\because DM \parallel AE,$$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \frac{y}{2},$$

$$\therefore xy = 2,$$

在  $RT\triangle MBF$  中， $\because \angle MFB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $BM = x$ ，

$$\therefore BF = \frac{1}{2}x, \quad MF = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore ME = \sqrt{MF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - xy} \geq \sqrt{2xy - xy},$$

$$\therefore ME \geq \sqrt{2},$$

$\therefore$  ME 是等边三角形面径, AD 也是等边三角形面积径,

$\therefore$  等边三角形 ABC 的面径长 l 的取值范围  $\sqrt{2} \leq l \leq \sqrt{3}$ .