2014年山东省高考模拟数学（四）（文科）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.（5分）已知集合A={1，2，3，4}，B={x|x^2=n，n∈A}，则A∩B=（　　）

A.{1，4}

B.{－1，1}

C.{1，2}

D.∅

解：根据x^2=n，n∈A，求出x的值，确定B，

∵集合A={1，2，3，4}，B={x|x^2=n，n∈A}，

∴x=±1，$\pm\sqrt{2}$，$\pm\sqrt{3}$，±2，

即B={－1，－1，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，－2，2}，

则A∩B={1，2}.

答案：C

2.（5分）复数z=i（－2－i）（i为虚数单位）在复平面内所对应的点在（　　）

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

D.第四象限

解析：化简可得复数z=i（－2－i）=－2i－i^2=1－2i，

故复数在复平面内所对应的点的坐标为（1，－2）在第四象限，

答案：D.

3.（5分）已知命题：p：“∀x∈[1，2]，x^2－a≥0”，命题q：“∃x∈R，x^2+2ax+2－a=0”，若命题“￢p且q”是真命题，则实数a的取值范围是（　　）

A.a≤－1或a=1

B.a≤－1或1≤a≤2

C.a≥1

D.a>1

解析：因为命题“￢p且q”是真命题，

因此￢p且q，均为真命题，

命题p：“∀x∈[1，2]，x^2－a≥0”，为真命题，则a≤1，所以￢p为真命题时，a>1；

命题q：“∃x∈R，x^2+2ax+2－a=0”，为真命题，则△=4a^2－4（2－a）≥0，所以a≤－2或a≥1，

所以a>1，

答案：D.

4.（5分）“（2x－1）x=0”是“x=0”的（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充分必要条件

D.既不充分也不必要条件

解析：若（2x－1）x=0 则 x=0 或$x=\frac{1}{2}$，不一定推出x=0. $x=\frac{1}{2}$

若 x=0，则（2x－1）x=0，即 x=0 推出（2x－1）x=0

所以“（2x－1）x=0”是“x=0”的 必要不充分条件.

答案：B

5.（5 分）若曲线 C_1：$x^2+y^2-2x=0$ 与曲线 C_2：$y(y-mx-m)=0$ 有四个不同的交点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A.（$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）

B.（$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0）∪（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）

C.[$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$]

D.（－∞，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$）∪（$\frac{\sqrt{3}}{3}$，+∞）

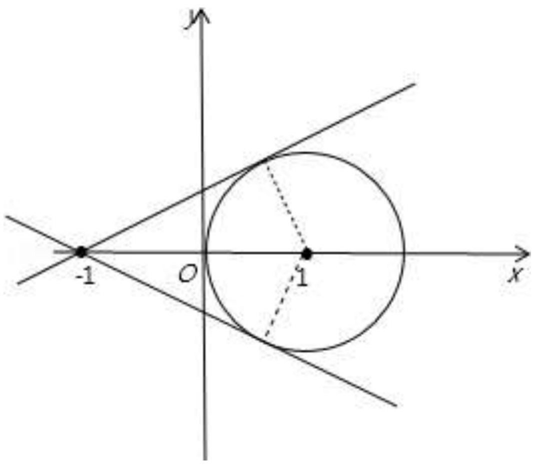
解析：可知曲线 C_1 表示一个圆，曲线 C_2 表示两条直线 y=0 和 y－mx－m=0，

曲线 C_1：$x^2+y^2-2x=0$ 化为标准方程得：$(x-1)^2+y^2=1$，所以圆心坐标为（1，0），半径 r=1；

曲线 C_2：$y(y-mx-m)=0$ 表示两条直线 y=0 和 y－mx－m=0，

由直线 y－mx－m=0 可知：此直线过定点（－1，0），

在平面直角坐标系中画出图象如图所示：



当直线 y－mx－m=0 与圆相切时，圆心到直线的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=r=1$，

化简得：$m^2=\frac{1}{3}$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

而 m=0 时，直线方程为 y=0，即为 x 轴，不合题意，

则直线 y－mx－m=0 与圆相交时，m∈（$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0）∪（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）.

答案：B

6.（5 分）已知正方体的棱长为 1，其俯视图是一个面积为 1 的正方形，侧视图是一个面积为$\sqrt{2}$的矩形，则该正方体的正视图的面积等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

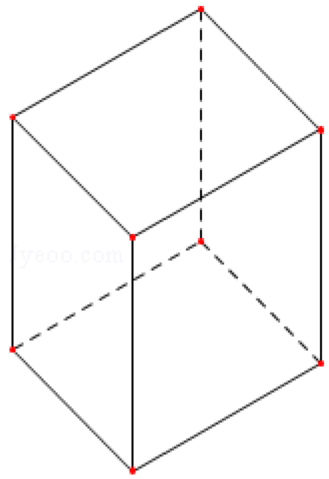
B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D. $\sqrt{2}$

解析：因为正方体的棱长为 1，俯视图是一个面积为 1 的正方形，侧视图是一个面积为$\sqrt{2}$的矩形，说明侧视图是底面对角线为边，正方体的高为一条边的矩形，几何体放置如图：

那么正视图的图形与侧视图的图形相同，所以正视图的面积为：$\sqrt{2}$.



答案：D.

7.（5 分）将函数 f（x）=2sin（2x+$\frac{\pi}{4}$）的图象向右平移 φ 个单位，再将图象上每一点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，所得图象关于直线 x=$\frac{\pi}{4}$对称，则 φ 的最小正值为（　　）

A. $\frac{1}{8}\pi$

B. $\frac{3}{8}\pi$

C. $\frac{3}{4}\pi$

D. $\frac{1}{2}\pi$

解析：根据三角函数图象的变换规律.将函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移 φ 个单位所得图象的解析式$f(x)=2\sin[2(x-\phi)+\frac{\pi}{4}]=2\sin(2x-2\phi+\frac{\pi}{4})$，

再将图象上每一点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍所得图象的解析式f（x）

$=2\sin\left(4x-2\phi+\frac{\pi}{4}\right)$

因为所得图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，所以当$x=\frac{\pi}{4}$时函数取得最值，所以

$4\times\frac{\pi}{4}-2\phi+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z

整理得出$\phi=-\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，k∈Z

当k=0时，ϕ取得最小正值为$\frac{3}{8}\pi$.

答案：B.

8.（5分）已知函数f（x）是定义在R上的奇函数，且满足f（x+2）=﹣f（x），当0≤x≤1时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，则使$f(x)=-\frac{1}{2}$的x的值是（　　）

A.2n（n∈Z）

B.2n﹣1（n∈Z）

C.4n+1（n∈Z）

D.4n﹣1（n∈Z）

解析：因为f（x）是奇函数且f（x+2）=﹣f（x），那么f（x+4）=﹣f（x+2）=f（x），即函数f（x）的周期T=4.

因为当0≤x≤1时，f（x）$=\frac{1}{2}x$，又f（x）是奇函数，所以当﹣1≤x≤0时，f（x）$=\frac{1}{2}x$；

令$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$解得：x=﹣1

而函数f（x）是以4为周期的周期函数，

所以方程f（x）=$-\frac{1}{2}$的x的值是：x=4k﹣1，k∈Z.

答案：D.

9.（5分）设函数f（x）=e^x+x-2，g（x）=$\ln x+x^2-3$.若实数a，b满足f（a）=0，g（b）=0，则（　　）

A.g（a）＜0＜f（b）

B.f（b）＜0＜g（a）

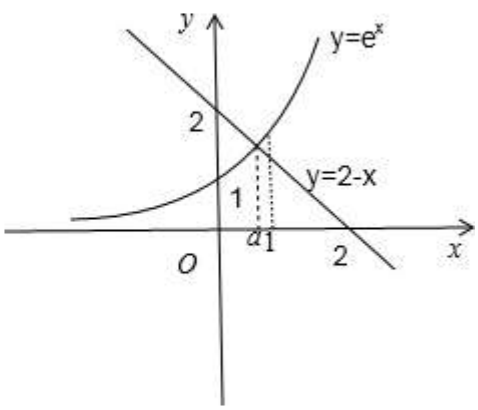
C.0＜g（a）＜f（b）

D.f（b）＜g（a）＜0

解析：判断函数的单调性，利用二分法.

由于$y=e^x$及y=x﹣2关于x是单调递增函数，因此函数f（x）=e^x+x-2在R上单调递增，

分别作出$y=e^x$，y=2﹣x的图象，



∵f（0）=1+0﹣2＜0，f（1）=e﹣1＞0，f（a）=0，∴0＜a＜1.
同理 g（x）=lnx+x^2﹣3 在 R^+上单调递增，g（1）=ln1+1﹣3=﹣2＜0，g（$\sqrt{3}$）
$=\ln\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-3=\frac{1}{2}\ln3>0$，g（b）=0，∴$1<b<\sqrt{3}$.
∴g（a）=lna+a^2﹣3＜g（1）=ln1+1﹣3=﹣2＜0，
f（b）=e^b+b﹣2＞f（1）=e+1﹣2=e﹣1＞0.
∴g（a）＜0＜f（b）.
答案：A.

10.（5 分）已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+a & (x<0)\\ f(x-1) & (x\geqslant0)\end{cases}$，且函数 y=f（x）﹣x 恰有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（　　）
A.（0，+∞）
B.[﹣1，0）
C.[﹣1，+∞）
D.[﹣2，+∞）
解析：当 x≥0 时，f（x）=f（x﹣1），所以此时周期是 1，当 x∈[﹣1，0）时，y=﹣x^2﹣2x+a=﹣（x+1）^{2}+1+a，
图象为开口向下的抛物线，对称轴 x=﹣1，顶点（﹣1，1+a），
（1）如果 a＜﹣1，函数 y=f（x）﹣x 至多有 2 个不同的零点；
（2）如果 a=﹣1，则 y 有一个零点在区间（﹣1，0），有一个零点在（﹣∞，﹣1），一个零点是原点；
（3）如果 a＞﹣1，则有一个零点在（﹣∞，﹣1），y 右边有两个零点，
综上可得：实数 a 的取值范围是[﹣1，+∞）
答案：C.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.
11.（5 分）观察等式：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$，根据以上规律，写出第四个等式为：____.
解析：类比推理
观察前面两个等式可得：

出第四个等式为：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}=\frac{5}{6}$,

答案：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}=\frac{5}{6}$.

12.（5 分）在△ABC 中，$\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=1$，$\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=2$，则 AB 边的长度为_____.

解析：将向量$\overrightarrow{BC}$用$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 表示，即$\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\frac{(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+|\overrightarrow{AB}|=-1+|\overrightarrow{AB}|=2$，因此$|\overrightarrow{AB}|=3$.

答案：3.

13.（5 分）各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1a_7=4$，$a_6=8$，若函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$的导数为 $f'(x)$，则 $f'(\frac{1}{2})=$_____.

解析：等比数列$\{a_n\}$，由已知，所以$\begin{cases}a_1^2q^6=4\\a_1q^5=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4}\\q=2\end{cases}$，所以$a_n=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$.

所以 $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+10a_{10}x^9$,

因为$na_n(\frac{1}{2})^{n-1}=n\times 2^{n-3}\times 2^{1-n}=\frac{n}{4}$,

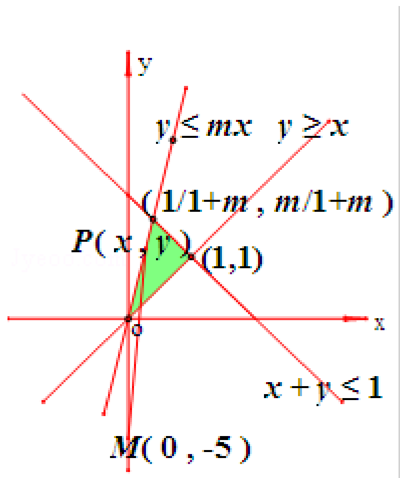
所以$f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{10}{4}=\frac{10\times 11}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{55}{4}$.

答案：$\frac{55}{4}$.

14.（5 分）设 $m\geqslant 2$，点 $P(x,y)$为$\begin{cases}y\geqslant x\\y\leqslant mx\\x+y\leqslant 1\end{cases}$所表示的平面区域内任意一点，$M(0,-5)$，O 坐标原点，$f(m)$为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$的最小值，则 $f(m)$的最大值为____.

解：易知$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=-5y$，设 $z=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=-5y$,

作出不等式组对应的平面区域如图：



即当 y 取得最大值时，z 取得最小值，则由$\begin{cases} x+y=1 \\ y=mx \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+m} \\ y=\dfrac{m}{1+m} \end{cases}$，

∴f（m）=－5×$\frac{m}{1+m}$=－5+$\frac{5}{1+\pi}$，

∵m≥2，∴当 m=2 时，f（m）取得最大值 f（2）=－$\frac{10}{3}$，

答案：$-\frac{10}{3}$

15.（5 分）给出下列四个命题：

①命题“∀x∈R，cosx＞0”的否定是“∃x∈R，cosx≤0”；

②若 0＜a＜1，则函数 f（x）=x^2+a^x－3 只有一个零点；

③函数 y=sin（2x－$\frac{\pi}{3}$）的一个单调增区间是[－$\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$]；

④对于任意实数 x，有 f（－x）=f（x），且当 x＞0 时，f′（x）＞0，则当 x＜0 时，f′（x）＜0.

⑤若 m∈（0，1]，则函数 y=m+$\frac{3}{\pi}$的最小值为 $2\sqrt{3}$；

其中真命题的序号是____（把所有真命题的序号都填上）.

解析：①命题“∀x∈R，cosx＞0”的否定是“∃x∈R，cosx≤0”，正确；

②当 0＜a＜1 时，y=a^x为减函数，y=3－x^2为开口向下的二次函数，两曲线有两个交点，函数 f（x）=x^2+a^x－3 有两个零点，故②错误；

③由－$\frac{\pi}{2}$≤2x－$\frac{\pi}{3}$≤$\frac{\pi}{2}$得：－$\frac{\pi}{12}$≤x≤$\frac{5\pi}{12}$，即函数 y=sin（2x－$\frac{\pi}{3}$）的一个单调增区间是[－$\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$]，即③正确；

④∵f（－x）=f（x），故 y=f（x）为偶函数，又当 x＞0 时，f′（x）＞0，∴y=f（x）在区间（0，+∞）上单调递增，

由偶函数在对称区间上单调性相反知，y=f（x）在区间（－∞，0）上单调递减，即当 x＜0 时，f′（x）＜0，故④正确；

⑤∵$y=m+\frac{3}{\pi}$，∴$y'=1-\frac{3}{m^2}$，∴当 m∈（0，1]时，$y'<0$，即函数$y=m+\frac{3}{\pi}$在区间（0，1]上单调递减，

∴当 x=1 时，$y_{min}=1+3=4$，故⑤错误；

综上所述，真命题的序号是①③④.

答案：①③④.

三、解答题本大题共 6 小题，共 75 分.

16.（12 分）已知函数$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，$x\in R$.

（1）求$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值；

（2）若$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求$f\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

解析：（1）将 $x=\frac{\pi}{3}$直接代入函数解析式求值.

（2）利用同角三角函数的基本关系求出 $\sin\theta$ 的值，利用两角和与差公式求值.

答案：（1）$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

（2）∵$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{4}{5}$，

∴$f\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5}$.

17.（12 分）某校研究性学习小组，为了分析 2012 年某小国的宏观经济形势，查阅了有关材料，得到 2011 年和 2012 年 1﹣5 月该国 CPI 同比（即当年某月与前一年同月比）的增长数据（见下表），但 2012 年 3，4，5 三个月的数据（分别记为 x，y，z）没有查到，有的同学清楚记得 2012 年 1﹣5 月的 CPI 数据成等差数列.

（Ⅰ）求 x，y，z 的值；

（Ⅱ）求 2012 年 1﹣5 月该国 CPI 数据的方差；

（Ⅲ）一般认为，某月 CPI 达到或超过 3 个百分点就已经通货膨胀，而达到或超过 5 个百分点则严重通货膨胀.现随机的从下表 2011 年的五个月和 2012 年的五个月的数据中各抽取一个数据，求相同月份 2011 年通货膨胀，并且 2012 年严重通货膨胀的概率.附表：2011 年和 2012 年 1﹣5 月 CPI 数据（单位：百分点 注：1 个百分点=1%）

年份 月份	1	2	3	4	5
2011	2.7	2.4	2.8	3.1	2.9
2012	4.9	5.0	x	y	z

解析：（Ⅰ）因为呈现的等差数列，由图得该数列的公差为 0.1，可求 x、y、z 的值；

（Ⅱ）求出 2012 年 1-5 月的平均数，再利用方差公式求方差.

（Ⅲ）用（m，n）表示随机地从2011年的五个月和2012年的五个月的数据中各抽取一个数据的基本事件，列举抽取数据的情况，分析可得事件"相同月份2011年通货膨胀，并且2012年严重通货膨胀"包含的基本事件的数目，由古典概型公式，计算可得答案.

答案：（Ⅰ）依题意得4.9，5.0，x，y，z成等差数列，所以公差d=5.0﹣4.9=0.1，

故x=5.0+0.1=5.1，y=x+0.1=5.2，z=y+0.1=5.3；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知2012年1～5月该国CPI的数据为：4.9，5.0，5.1，5.2，5.3，

∴$\overline{x}=5.1$，

∴

$$s^2=\frac{1}{5}[(4.9-5.1)^2+(5.0-5.1)^2+(5.1-5.1)^2+(5.2-5.1)^2+(5.3-5.1)^2]$$

=0.02；

（Ⅲ）根据题意，用m表示2011年的数据，n表示2012年的数据，则（m，n）表示随机地从2011年的五个月和2012年的五个月的数据中各抽取一个数据的基本事件，

则所有基本事件有：（2.7，4.9），（2.7，5.0），（2.7，5.1），（2.7，5.2），（2.7，5.3），

（2.4，4.9），（2.4，5.0），（2.4，5.1），（2.4，5.2），（2.4，5.3），

（2.8，4.9），（2.8，5.0），（2.8，5.1），（2.8，5.2），（2.8，5.3），

（3.1，4.9），（3.1，5.0），（3.1，5.1），（3.1，5.2），（3.1，5.3），

（2.9，4.9），（2.9，5.0），（2.9，5.1），（2.9，5.2），（2.9，5.3）；共25个基本事件；

其中满足相同月份2011年通货膨胀，并且2012年严重通货膨胀的基本事件有（3.1，5.0），（3.1，5.1），（3.1，5.2），（3.1，5.3），有4个基本事件；

∴P=$\frac{4}{25}$=0.16，即相同月份2011年通货膨胀，并且2012年严重通货膨胀的概率为0.16.

18.（12分）如图1，在边长为1的等边三角形ABC中，D，E分别是AB，AC边上的点，AD=AE，F是BC的中点，AF与DE交于点G，将△ABF沿AF折起，得到如图2所示的三棱锥A﹣BCF，其中BC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）证明：DE∥平面BCF；

（2）证明：CF⊥平面ABF；

（3）当AD=$\frac{2}{3}$时，求三棱锥F﹣DEG的体积V_{F-DEG}.

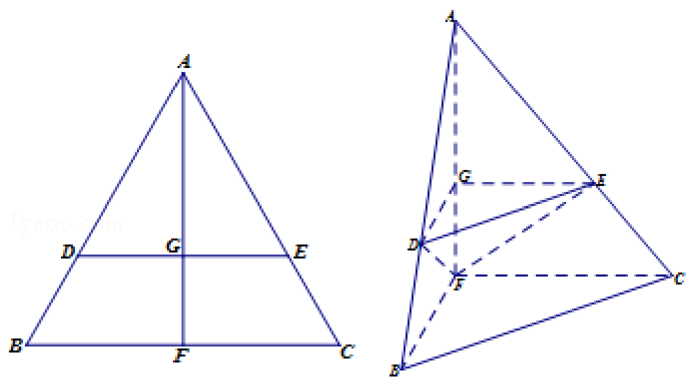


图1　　图2

分析：

（1）利用线面平行的判定定理，易知DE∥BC，可证DE∥平面BCF.

（2）可证得 AF⊥CF ，利用勾股定理和已知数据 CF⊥BF，利用线面垂直的判定定理可证 CF⊥平面 ABF.

（3）利用等积法 $V_{F-DEG}=V_{E-DFG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot DG\cdot FG\cdot GE$，运算求得结果.

答案：(1）在等边三角形 ABC 中，AD=AE，$\therefore\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，在折叠后的三棱锥 A－BCF 中也成立，

∴DE∥BC.

又∵DE⊄平面 BCF，BC⊂平面 BCF，

∴DE∥平面 BCF.

（2）在等边三角形 ABC 中，F 是 BC 的中点，所以 AF⊥BC，即 AF⊥CF ①，且$BF=CF=\frac{1}{2}$.

∵在三棱锥 A－BCF 中，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$BC^2=BF^2+CF^2$，∴CF⊥BF②.

又∵BF∩AF=F，∴CF⊥平面 ABF.

（3）由（1）可知 GE∥CF，结合（2）可得 GE⊥平面 DFG.

$\therefore V_{F-DEG}=V_{E-DFG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot DG\cdot FG\cdot GE=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{324}$.

19.（12 分）已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和$T_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-a$，数列$\{b_n\}$（$b_n>0$）的首项为 $b_1=a$，且其前 n 项和 S_n满足 $S_n+S_{n-1}=1+2\sqrt{S_nS_{n-1}}$（n≥2，$n\in N^*$）

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若数列 $\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$的前 n 项和为 P_n.

解析：

（1）数列$\{a_n\}$成等比数列，$a_2^2=a_1\cdot a_3$可得$\frac{4}{81}=\left(\frac{1}{3}-a\right)\times\left(-\frac{2}{27}\right)$，解得 a=1，设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$. 由 $b_n>0$，得$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，数列 $\{\sqrt{S_n}\}$构成一个首项为 1，公差为 1 的等差数列，由此能求出数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

（2）$\frac{1}{b_nb_{n-1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，利用裂项相消求和法能求出数列 $\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$的前 n 项和为 P_n.

答案：(1）根据已知条件知：

$a_1=\frac{1}{3}-a$，$a_2=T_2-T_1=-\frac{2}{9}$，$a_3=T_3-T_2=-\frac{2}{27}$，

有数列$\{a_n\}$成等比数列，得 $a_2^2=a_1\cdot a_3$，

即$\frac{4}{81}=\left(\frac{1}{3}-a\right)\times\left(-\frac{2}{27}\right)$，解得 a=1，

设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$，

所以 $a_n=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$…（3 分）

$S_n+S_{n-1}=1+2\sqrt{S_nS_{n-1}}$，其中 $n\geqslant 2$，$n\in N^*$，

又 $b_n>0$，得$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，

数列 $\{\sqrt{S_n}\}$构成一个首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以$\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$，

所以$S_n=n^2$，当 $n\geqslant 2$，$n\in N^*$时$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

$b_1=1$ 也适合这个公式，

所以 $b_n=2n-1$（$n\in N^*$）　　（6 分）

（2）由（1）知$\frac{1}{b_nb_{n-1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

则 $P_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.…（12 分）

20.（13 分）已知函数 $f(x)=mx-\frac{\pi}{x}$，$g(x)=2\ln x$

（1）当 m=2 时，求曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程；

（2）当 m=1 时，证明方程 f（x）=g（x）有且仅有一个实数根；

（3）若 x∈（1，e]时，不等式 f（x）﹣g（x）<2 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：（1）当 m=2 时，确定 f（x），求导确定斜率，利用点斜式求出切线方程.

（2）当 m=1 时，构造 h（x）=f（x）−g（x），求出 h'（x），判断在定义域上的单调性，判定$h(e)\cdot h\left(\frac{1}{e}\right)$的符号，根据根的存在性定理可得结论；

（3）即$mx-\frac{m}{x}-2\ln x<2$恒成立，即 $m(x^2-1)<2x+2x\ln x$ 恒成立，利用分离变量法，研究右侧的最值，讨论 m 的取值范围.

答案：（1）m=2 时，$f(x)=2x-\frac{2}{x}$，$f'(x)=2+\frac{2}{x^2}$，$f'(1)=4$，

切点坐标为（1，0），

∴切线方程为 y=4x﹣4…（2 分）

（2）m=1 时，令$h(x)=f(x)-g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，

$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

∴h（x）在（0，+∞）上为增函数.…（4分）

又$h(e)\cdot h(\frac{1}{e})=-(\frac{1}{e}-e+2)^2<0$，

∴y=h（x）在（0，+∞）内有且仅有一个零点

∴在（0，+∞）内f（x）=g（x）有且仅有一个实数根　　　…（6分）

（或说明h（1）=0也可以）

（3）$mx-\frac{m}{x}-2\ln x<2$恒成立，即$m(x^2-1)<2x+2x\ln x$恒成立，

又$x^2-1>0$，则当x∈（1，e]时，$m<\frac{2x+2x\ln x}{x^2-1}$恒成立，

令$G(x)=\frac{2x+2x\ln x}{x^2-1}$，只需m小于G（x）的最小值，

$G'(x)=\frac{-2(x^2\ln x+\ln x+2)}{(x^2-1)^2}$，

∵1＜x≤e，∴lnx＞0，∴当x∈（1，e]时G'（x）＜0，

∴G（x）在（1，e]上单调递减，

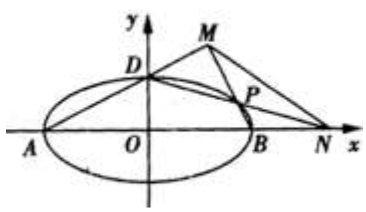
∴G（x）在（1，e]的最小值为$G(e)=\frac{4e}{e^2-1}$，

则m的取值范围是$(-\infty,\frac{4e}{e^2-1})$.　　　　　　…（12分）

21.（14分）椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，a+b=3.

（1）求椭圆C的方程；

（2）如图，A，B，D是椭圆C的顶点，P是椭圆C上除顶点外的任意点，直线DP交x轴于点N直线AD交BP于点M，设BP的斜率为k，MN的斜率为m，证明2m﹣k为定值.



解析：

（1）根据离心率及a+b=3，结合条件$a^2=b^2+c^2$列式求出a，b，确定椭圆方程.

（2）需要求出P，M，N的坐标，利用两点求斜率m，代入整理出2m-k是定值.

答案：（1）因为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，即 $a^2=4b^2$，$a=2b$.

又 $a+b=3$，得 $a=2$，$b=1$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）因为 B（2，0），P 不为椭圆顶点，则可设直线 BP 的方程为

$y=k(x-2)\quad (k\neq 0,\ k\neq \pm\frac{1}{2})$.

联立$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

所以$x_P+2=\frac{16k^2}{4k^2+1}$，$x_P=\frac{8k^2-2}{4k^2+1}$.

则$y_P=k\left(\frac{8k^2-2}{4k^2+1}-2\right)=\frac{-4k}{4k^2+1}$.

所以 $P\left(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\ \frac{-4k}{4k^2+1}\right)$.

又直线 AD 的方程为$y=\frac{1}{2}x+1$.

联立$\begin{cases} y=k(x-2) \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$，解得 $M\left(\frac{4k+2}{2k-1},\ \frac{4k}{2k-1}\right)$.

由三点 D（0，1），$P\left(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\ \frac{-4k}{4k^2+1}\right)$，N（x，0）共线，

得$\frac{\frac{-4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}-0}=\frac{0-1}{x-0}$，所以 $N\left(\frac{4k-2}{2k+1},\ 0\right)$.

所以 MN 的斜率为$m=\frac{\frac{4k}{2k-1}-0}{\frac{4k+2}{2k-1}-\frac{4k-2}{2k+1}}=\frac{4k(2k+1)}{2(2k+1)^2-2(2k-1)^2}=\frac{2k+1}{4}$.

则$2m-k=\frac{2k+1}{2}-k=\frac{1}{2}$.

所以 $2m-k$ 为定值$\frac{1}{2}$.