2014年普通高等学校招生全国统一考试（大纲版）数学文

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分)

1.设集合M={1，2，4，6，8}，N={1，2，3，5，6，7}，则M∩N中元素的个数为(　　)

A. 2

B. 3

C. 5

D. 7

解析：∵M={1，2，4，6，8}，N={1，2，3，5，6，7}，

∴M∩N={1，2，6}，即M∩N中元素的个数为3.

答案：B.

2.已知角α的终边经过点(-4，3)，则cosα=(　　)

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $-\frac{4}{5}$

解析：∵角α的终边经过点(-4，3)，∴x=-4，y=3，r=$\sqrt{x^2+y^2}$=5.

∴cosα=$\frac{x}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$,

答案：D.

3.不等式组$\begin{cases} x(x+2)>0 \\ |x|<1 \end{cases}$的解集为(　　)

A. {x|-2<x<-1}

B. {x|-1<x<0}

C. {x|0<x<1}

D. {x|x>1}

解析：由不等式组$\begin{cases} x(x+2)>0 \\ |x|<1 \end{cases}$可得 $\begin{cases} x<-2，或x>0 \\ -1<x<1 \end{cases}$，解得0<x<1，

答案：C.

4.已知正四面体ABCD中，E是AB的中点，则异面直线CE与BD所成角的余弦值为(　　)

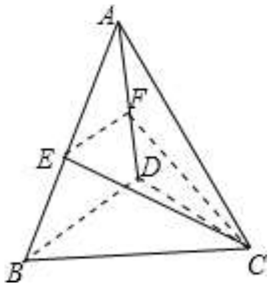
A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：如图，取AD中点F，连接EF，CF，



∵E为AB的中点，∴EF∥DB，

则∠CEF为异面直线BD与CE所成的角，

∵ABCD为正四面体，E，F分别为AB，AD的中点，∴CE=CF.

设正四面体的棱长为2a，则EF=a，CE=CF=$\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$.

在△CEF中，由余弦定理得：$\cos\angle CEF=\frac{CE^2+EF^2-CF^2}{2CE\cdot EF}=\frac{a^2}{2\times\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

答案：B.

5.函数$y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)(x>-1)$的反函数是(　　)

A. $y=(1-e^x)^3(x>-1)$

B. $y=(e^x-1)^3(x>-1)$

C. $y=(1-e^x)^3(x\in R)$

D. $y=(e^x-1)^3(x\in R)$

解析：∵$y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$，∴$\sqrt[3]{x}+1=e^y$，即$\sqrt[3]{x}=e^y-1$，∴$x=(e^y-1)^3$，∴所求反函数为$y=(e^x-1)^3$，

答案：D

6.已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，其夹角为60°，则$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$=(　　)

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

解析：由题意可得，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos60°=\frac{1}{2}$，$\vec{b}^2=1$，∴$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$，

答案：B.

7.有 6 名男医生、5 名女医生，从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有(　　)

A. 60 种

B. 70 种

C. 75 种

D. 150 种

解析：根据题意，先从 6 名男医生中选 2 人，有 $C_6^2=15$ 种选法，

再从 5 名女医生中选出 1 人，有 $C_5^1=5$ 种选法，则不同的选法共有 15×5=75 种；

答案：C.

8.设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $S_2=3$，$S_4=15$，则 $S_6=$(　　)

A. 31

B. 32

C. 63

D. 64

解析：由等比数列的性质可得 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等比数列，

即 3，12，S_6-15 成等比数列，可得 $12^2=3(S_6-15)$，解得 $S_6=63$

答案：C

9.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为 F_1、F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点，若$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

B. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

D. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

解析：∵$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$，∴$4a=4\sqrt{3}$，∴$a=\sqrt{3}$，

∵离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴c=1，∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

答案：A.

10.正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为(　　)

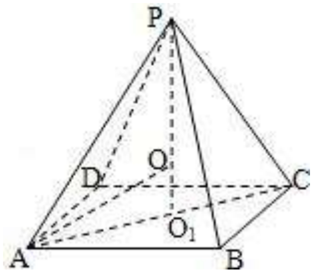
A. $\frac{81\pi}{4}$

B. 16π

C. 9π

D. $\frac{27\pi}{4}$

解析：设球的半径为R，则棱锥的高为4，底面边长为2，



∴$R^2=(4-R)^2+(\sqrt{2})^2$，∴$R=\frac{9}{4}$，∴球的表面积为$4\pi\cdot(\frac{9}{4})^2=\frac{81\pi}{4}$.

答案：A.

11.双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0，b>0)的离心率为2，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，则C的焦距等于(　　)

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

解析：∵：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0，b>0)的离心率为2，

∴$e=\frac{c}{a}=2$，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，不妨取$y=\frac{b}{a}x$，即bx-ay=0，

则c=2a，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a$，

∵焦点F(c，0)到渐近线bx-ay=0的距离为$\sqrt{3}$，∴$d=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$，

即$\frac{\sqrt{3}a\cdot c}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\frac{\sqrt{3}ac}{2a}=\frac{\sqrt{3}c}{2}=\sqrt{3}$，解得c=2，则焦距为2c=4，

答案：C

12.奇函数f(x)的定义域为R，若f(x+2)为偶函数，且f(1)=1，则f(8)+f(9)=(　　)

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

解析：∵f(x+2)为偶函数，f(x)是奇函数，∴f(-x+2)=f(x+2)=-f(x-2)，
即 f(x+4)=-f(x)，f(x+8)=f(x)，则 f(8)=f(0)=0，f(9)=f(1)=1，∴f(8)+f(9)=0+1=1，
答案：D.

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分)

13.$(x-2)^6$的展开式中 x^3的系数是________.（用数字作答）
解析：根据题意，$(x-2)^6$的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-2)^r=(-1)^r\bullet 2^r\bullet C_6^r x^{6-r}$，
令 6-r=3 可得 r=3，此时 $T_4=(-1)^3\bullet 2^3\bullet C_6^3 x^3=-160x^3$，即 x^3的系数是-160；
答案：-160.

14.函数 y=cos2x+2sinx 的最大值为____________.

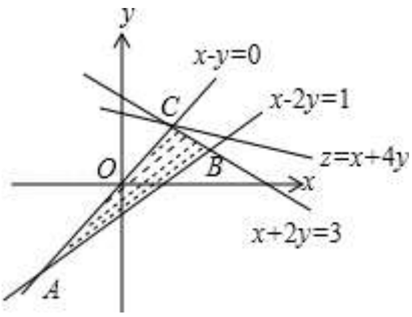
解析：∵函数 $y=\cos 2x+2\sin x=-2\sin^2 x+2\sin x+1=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$,

∴当 $\sin x=\frac{1}{2}$时，函数 y 取得最大值为$\frac{3}{2}$,

答案：$\frac{3}{2}$.

15.设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 3\\ x-2y\leqslant 1\end{cases}$，则 z=x+4y 的最大值为______.

解析：由约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 3\\ x-2y\leqslant 1\end{cases}$作出可行域如图，



联立$\begin{cases}x-y=0\\ x+2y=3\end{cases}$，解得 C(1，1).

化目标函数 z=x+4y 为直线方程的斜截式，得 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$.

由图可知，当直线 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$过 C 点时，直线在 y 轴上的截距最大，z 最大.

此时 $z_{max}=1+4\times 1=5$.
答案：5.

16.直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为(1，3)，则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_______.

解析：设 l_1 与 l_2 的夹角为 2θ，由于 l_1 与 l_2 的交点 A(1，3)在圆的外部，

且点 A 与圆心 O 之间的距离为 $OA=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,

圆的半径为 $r=\sqrt{2}$,

$\therefore \sin\theta=\dfrac{r}{OA}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$,

答案：$\dfrac{4}{3}$.

三、解答题

17.(10 分)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(Ⅰ)设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(Ⅱ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：(Ⅰ)将 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 变形为：$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$，再由条件得 $b_{n+1}=b_n+2$，根据条件求出 b_1，由等差数列的定义证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(Ⅱ)由(Ⅰ)和等差数列的通项公式求出 b_n,代入 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 并令 n 从 1 开始取值,依次得(n-1)个式子，然后相加，利用等差数列的前 n 项和公式求出 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

答案：(Ⅰ)由 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 得，$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$,

由 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得，$b_{n+1}=b_n+2$，即 $b_{n+1}-b_n=2$，又 $b_1=a_2-a_1=1$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得，$b_n=1+2(n-1)=2n-1$,

由 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得，$a_{n+1}-a_n=2n-1$，则 $a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=5$，…，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1$,

所以，$a_n-a_1=1+3+5+\cdots+2(n-1)-1=\dfrac{(n-1)(1+2n-3)}{2}=(n-1)^2$,

又 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=(n-1)^2+1=n^2-2n+2$.

18.(12 分)△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 3acosC=2ccosA，$\tan A=\dfrac{1}{3}$,求 B.

解析：由 3acosC=2ccosA，利用正弦定理可得 3sinAcosC=2sinCcosA，再利用同角的三角函数基本关系式可得 tanC，利用 $\tan B=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)$ 即可得出.

答案：∵3acosC=2ccosA,

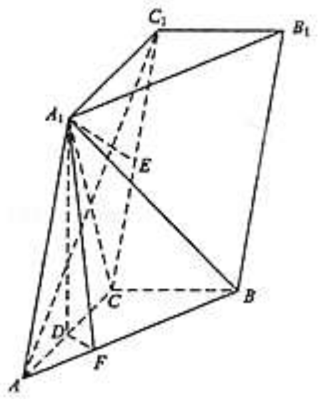
由正弦定理可得 3sinAcosC=2sinCcosA，∴3tanA=2tanC,

$\because \tan A=\dfrac{1}{3}$, $\therefore 2\tan C=3\times\dfrac{1}{3}=1$，解得 $\tan C=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \tan B=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=-1$,

∵B∈(0， π)，∴B=$\frac{3\pi}{4}$.

19.(12 分)如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$中，点 A_1在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上，∠ACB=90°，BC=1，AC=CC_1=2.



(Ⅰ)证明：AC_1⊥A_1B;

(Ⅱ)设直线 AA_1与平面 BCC_1B_1的距离为$\sqrt{3}$，求二面角 A_1-AB-C 的大小.

解析：(Ⅰ)由已知数据结合三垂线定理可得;

(Ⅱ)作辅助线可证∠A_1FD为二面角 A_1-AB-C 的平面角，解三角形由反三角函数可得.

答案：(Ⅰ)∵A_1D⊥平面 ABC，A_1D⊂平面 AA_1C_1C，

∴平面 AA_1C_1C⊥平面 ABC，又 BC⊥AC，∴BC⊥平面 AA_1C_1C，连结 A_1C，

由侧面 AA_1C_1C 为菱形可得 AC_1⊥A_1C，

由三垂线定理可得 AC_1⊥A_1B;

(Ⅱ)∵BC⊥平面 AA_1C_1C，BC⊂平面 BCC_1B_1，∴平面 AA_1C_1C⊥平面 BCC_1B_1，

作 A_1E⊥CC_1，E 为垂足，可得 A_1E⊥平面 BCC_1B_1，

又直线 AA_1∥平面 BCC_1B_1，

∴A_1E为直线 AA_1与平面 BCC_1B_1的距离，即 A_1E=$\sqrt{3}$，

∵A_1C为∠ACC_1的平分线，∴A_1D=A_1E=$\sqrt{3}$，

作 DF⊥AB，F 为垂足，连结 A_1F，

由三垂线定理可得 A_1F⊥AB，

∴∠A_1FD为二面角 A_1-AB-C 的平面角，

由 AD=$\sqrt{AA_1^{\ 2}-A_1D^2}$=1 可知 D 为 AC 中点，

∴DF=$\frac{1}{2}\times\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴tan∠$A_1FD$=$\frac{A_1D}{DF}$=$\sqrt{15}$，∴二面角 A_1-AB-C 的大小为 arctan$\sqrt{15}$

20.(12 分)设每个工作日甲，乙，丙，丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6，0.5，0.5，0.4，各人是否需使用设备相互独立.

(Ⅰ)求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;

(Ⅱ)实验室计划购买 k 台设备供甲，乙，丙，丁使用，若要求“同一工作日需使用设备的人数大于 k”的概率小于 0.1，求 k 的最小值.

解析：(Ⅰ)把 4 个人都需使用设备的概率、4 个人中有 3 个人使用设备的概率相加，即得所求.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得若 k=2，不满足条件.若 k=3，求得“同一工作日需使用设备的人数大于 3”的概率为 0.06＜0.1，满足条件，从而得出结论.
答案：(Ⅰ)由题意可得“同一工作日至少 3 人需使用设备”的概率为
$0.6\times0.5\times0.5\times0.4+(1-0.6)\times0.5\times0.5\times0.4+0.6\times(1-0.5)\times0.5\times0.4+0.6\times0.5\times(1-0.5)\times0.4+0.6\times0.5\times0.5\times(1-0.4)=0.31$.
(Ⅱ)由(Ⅰ)可得若 k=2，则“同一工作日需使用设备的人数大于 2”的概率为 0.31＞0.1，不满足条件.
若 k=3，则“同一工作日需使用设备的人数大于 3”的概率为 $0.6\times0.5\times0.5\times0.4=0.06<0.1$，满足条件.故 k 的最小值为 3.

21.(12 分)函数 $f(x)=ax^3+3x^2+3x(a\neq0)$.
(Ⅰ)讨论 f(x)的单调性；
(Ⅱ)若 f(x)在区间(1，2)是增函数，求 a 的取值范围.
解析：(Ⅰ)求出函数的导数，通过导数为 0，利用二次函数的根，通过 a 的范围讨论 f(x)的单调性；
(Ⅱ)当 a＞0，x＞0 时，f(x)在区间(1，2)是增函数，当 a＜0 时，f(x)在区间(1，2)是增函数，推出 $f'(1)\geqslant0$ 且 $f'(2)\geqslant0$，即可求 a 的取值范围.
答案：(Ⅰ)函数 $f(x)=ax^3+3x^2+3x$，∴$f'(x)=3ax^2+6x+3$，
令 $f'(x)=0$，即 $3ax^2+6x+3=0$，则△=36(1-a).
①若 a＞1 时，则△≤0，$f'(x)\geqslant0$，∴f(x)在 R 上是增函数；
②因为 a≠0，∴当 a≤1，△＞0，$f'(x)=0$ 方程有两个根，$x_1=\frac{-1+\sqrt{-a}}{a}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{-a}}{a}$，
当 0＜a＜1 时，则当 $x\in(-\infty,x_2)$或$(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，故函数在$(-\infty,x_2)$或$(x_1,+\infty)$是增函数；在(x_2,x_1)是减函数；
当 a＜0 时，则当 $x\in(-\infty,x_1)$或$(x_2,+\infty)$，$f'(x)<0$，故函数在$(-\infty,x_1)$或$(x_2,+\infty)$是减函数；在(x_1,x_2)是增函数；
(Ⅱ)当 a＞0，x＞0 时，$f'(x)=3ax^2+6x+3>0$ 故 a＞0 时，f(x)在区间(1，2)是增函数，
当 a＜0 时，f(x)在区间(1，2)是增函数，
当且仅当：$f'(1)\geqslant0$ 且 $f'(2)\geqslant0$，解得$-\frac{5}{4}\leqslant a<0$，a 的取值范围$[-\frac{5}{4},0)\cup(0,+\infty)$.

22.(12 分)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，直线 y=4 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$.
(Ⅰ)求 C 的方程；
(Ⅱ)过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′与 C 相交于 M、N 两点，且 A、M、B、N 四点在同一圆上，求 l 的方程.
解析：(Ⅰ)设点 Q 的坐标为$(x_0,4)$，把点 Q 的坐标代入抛物线 C 的方程，求得 $x_0=\frac{8}{p}$，根据$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$求得 p 的值，可得 C 的方程.
(Ⅱ)设 l 的方程为 x=my+1 (m≠0)，代入抛物线方程化简，利用韦达定理、中点公式、弦长公式求得弦长|AB|.把直线 l′的方程线 l′的方程代入抛物线方程化简，利用韦达定理、弦

长公式求得|MN|.由于 MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于|AE|=|BE|=$\frac{1}{2}$|MN|，求得 m 的值，可得直线 l 的方程.

答案：(Ⅰ)设点 Q 的坐标为(x_0，4)，把点 Q 的坐标代入抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，

可得 $x_0=\frac{8}{p}$，∵点 P(0，4)，∴$|PQ|=\frac{8}{p}$.

又$|QF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{8}{p}+\frac{p}{2}$，$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$，∴$\frac{8}{p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{p}$，求得 p=2，或 p=-2(舍去).

故 C 的方程为 $y^2=4x$.

(Ⅱ)由题意可得，直线 l 和坐标轴不垂直，设 l 的方程为 $x=my+1$ $(m\neq 0)$，

代入抛物线方程可得 $y^2-4my-4=0$，∴$y_1+y_2=4m$，$y_1\bullet y_2=-4$.

∴AB 的中点坐标为 $D(2m^2+1，2m)$，弦长$|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=4(m^2+1)$.

又直线 l′ 的斜率为-m，∴直线 l′ 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2m^2+3$.

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′ 与 C 相交于 M、N 两点，

把线 l′ 的方程代入抛物线方程可得 $y^2+\frac{4}{m}y-4(2m^2+3)=0$，∴$y_3+y_4=\frac{-4}{m}$，$y_3\bullet y_4=-4(2m^2+3)$.

故线段 MN 的中点 E 的坐标为$(\frac{2}{m^2}+2m^2+3，\frac{-2}{m})$，

∴$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=\frac{4(m^2+1)\sqrt{2m^2+1}}{m^2}$，

∵MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于|AE|=|BE|=$\frac{1}{2}$|MN|，∴$\frac{1}{4}\bullet AB^2+DE^2=\frac{1}{4}MN^2$，

∴$4(m^2+1)^2+(2m+\frac{2}{m})^2+(\frac{2}{m^2}+2)^2=\frac{16(m^2+1)^2(2m^2+1)}{m^4}$，化简可得 $m^2-1=0$，

∴m=±1∴直线 l 的方程为 x-y-1=0，或 x-+y-1=0.