

## 2018 年北京市顺义区高考一模试卷数学文

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项)

1. 已知全集  $U=\mathbb{R}$ , 集合  $A=\{x \mid -3 < x < 3\}$ , 则  $C_U A=(\quad)$

- A.  $(-3, 3)$
- B.  $[-3, 3]$
- C.  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- D.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

解析:  $U=\mathbb{R}$ ,  $A=\{x \mid -3 < x < 3\}$ ;  $\therefore C_U A=(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ .

答案: D

2. 若复数  $\frac{m+i}{1+i}$  在复平面内对应的点在第四象限, 则实数  $m$  的取值范围是( $\quad$ )

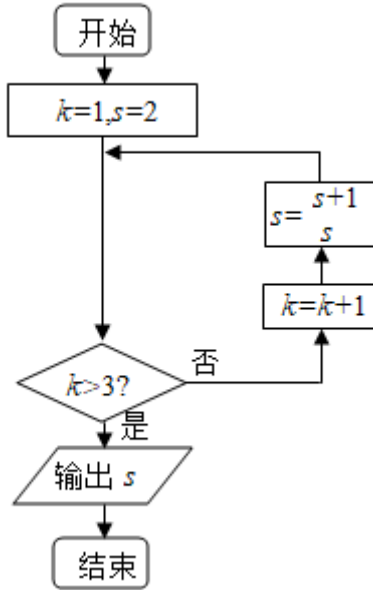
- A.  $(-\infty, -1)$
- B.  $(-1, 1)$
- C.  $(1, +\infty)$
- D.  $(-1, +\infty)$

解析:  $\because \frac{m+i}{1+i} = \frac{(m+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2}i$  在复平面内对应的点在第四象限,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1+m}{2} > 0, \\ \frac{1-m}{2} < 0, \end{cases} \text{解得 } m > 1. \therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是 } (1, +\infty).$$

答案: C

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的  $s$  值为( $\quad$ )



- A.  $\frac{13}{8}$
- B.  $\frac{8}{5}$
- C.  $\frac{5}{3}$
- D.  $\frac{3}{2}$

解析：模拟程序的运行，可得  $k=1$ ， $s=2$

不满足条件  $k>3$ ，执行循环体， $k=2$ ， $s=\frac{3}{2}$

不满足条件  $k>3$ ，执行循环体， $k=3$ ， $s=\frac{5}{3}$

不满足条件  $k>3$ ，执行循环体， $k=4$ ， $s=\frac{8}{5}$ 。

满足条件  $k>3$ ，退出循环，输出  $s$  的值为  $\frac{8}{5}$ 。

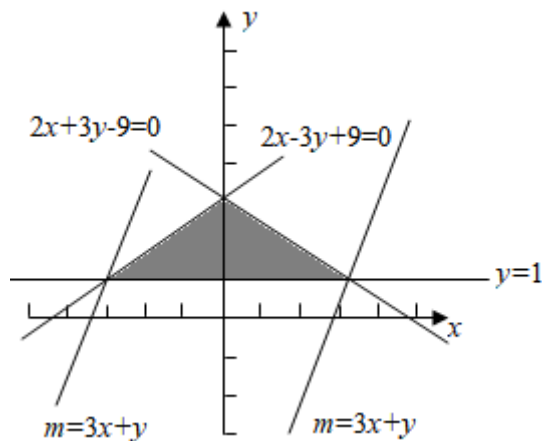
答案：B

4. 已知点  $P(x, y)$  的坐标满足条件  $\begin{cases} 2x + 3y - 9 \leq 0, \\ 2x - 3y + 9 \geq 0, \\ y - 1 \geq 0, \end{cases}$  且点  $P$  在直线  $3x+y-m=0$  上. 则  $m$  的取值

范围是( )

- A.  $[-9, 9]$
- B.  $[-8, 9]$
- C.  $[-8, 10]$
- D.  $[9, 10]$

解析：画出不等式组  $\begin{cases} 2x + 3y - 9 \leq 0, \\ 2x - 3y + 9 \geq 0, \\ y - 1 \geq 0, \end{cases}$  表示的平面区域，如图所示：



则目标函数  $3x + y - m = 0$  转化为  $m = 3x + y$ ,

目标函数过点 A 时，取得最小值，过点 B 时取得最大值；

由  $\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0, \\ y = 1, \end{cases}$  求得  $A(-3, 1)$ ，由  $\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0, \\ y = 1, \end{cases}$  求得  $B(3, 1)$ ，

则  $m = 3x + y$  的最小值为  $3 \times (-3) + 1 = -8$ ，最大值为  $3 \times 3 + 1 = 10$ ； $\therefore m$  的取值范围是  $[-8, 10]$ 。

答案：C

5. 设直线  $l$  过原点，倾斜角为  $\alpha$ ，圆  $C$  的方程为  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 。则 “ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ” 是 “直线  $l$  与圆

$C$  相切” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析： $\because$  直线  $l$  过原点，倾斜角为  $\alpha$ ， $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y = \sqrt{3}x$ ，

圆  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  的圆心  $C(0, 2)$ ，半径  $r = 1$ ，

圆心  $C(0, 2)$  到直线  $y = \sqrt{3}x$  的距离  $d = \frac{|2|}{\sqrt{4}} = 1$ ，直线  $l$  与圆相切，

$\therefore$  “ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ”  $\Rightarrow$  “直线  $l$  与圆  $C$  相切”；

直线  $l$  过原点，倾斜角为  $\alpha$  的直线方程为  $y = \tan \alpha x$ ，

$\because$  直线  $l$  与圆  $C$  相切， $\therefore \frac{|2|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = 1$ ，解得  $\tan \alpha = \sqrt{3}$  或  $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore \text{“直线 } l \text{ 与圆 } C \text{ 相切”} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$  是“直线  $l$  与圆  $C$  相切”的充分而不必要条件.

答案: A

6. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $0 < x < y < 1$ , 则( )

A.  $x^{-1} < y^{-1} < 1$

B.  $1 < \lg x < \lg y$

C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y < 2$

D.  $0 < \sin x < \sin y$

解析:  $\because x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $0 < x < y < 1$ ,

$$\therefore \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 1, \lg x < \lg y < 0, \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y > \frac{1}{2}, 0 < \sin x < \sin y.$$

答案: D

7. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  是单位向量,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $|\vec{a} + t\vec{b}|$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) 的最小值为( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

解析:  $\vec{a}, \vec{b}$  是单位向量,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\therefore |\vec{a} + t\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2\vec{b}^2 = 1 + \sqrt{3}t + t^2$ ;

$$\because t^2 + \sqrt{3}t + 1 \text{ 的最小值为 } \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}; \therefore |\vec{a} + t\vec{b}| \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2}.$$

答案: B

8. 某食品保鲜时间  $y$  (单位: 小时) 与储藏温度  $x$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 满足函数关系  $y = e^{kx+b}$  ( $e = 2.718 \dots$  为自然对数的底数,  $k, b$  为常数). 若该食品在  $0^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是 192 小时, 在  $22^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在  $33^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是( )

A. 16 小时

B. 20 小时

C. 24 小时

D. 28 小时

解析:  $y=e^{kx+b}$  ( $e=2.718\cdots$  为自然对数的底数,  $k, b$  为常数).

当  $x=0$  时,  $e^b=192$ ,

当  $x=22$  时  $e^{22k+b}=48$ ,  $\therefore e^{22k}=\frac{48}{192}=\frac{1}{4}$ ,  $e^{11k}=\frac{1}{2}$ ,  $e^b=192$

当  $x=33$  时,  $e^{33k+b}=(e^k)^{33} \cdot (e^b)=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 192=24$ .

答案: C

二、填空题(本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 已知双曲线  $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1$  的一个焦点为  $(-2\sqrt{2}, 0)$ , 则该双曲线的方程为\_\_\_\_\_.

解析: 双曲线  $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1$  的一个焦点为  $(-2\sqrt{2}, 0)$ , 即  $c=2\sqrt{2}$ ,

则有  $c^2=m+1=8$ , 解可得:  $m=7$ , 则双曲线的标准方程为:  $\frac{x^2}{7} - y^2 = 1$ .

答案:  $\frac{x^2}{7} - y^2 = 1$

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $AC=1$ ,  $BC=3$ ,  $A+B=60^\circ$ , 则  $AB=$ \_\_\_\_\_.

解析:  $\because AC=1$ ,  $BC=3$ ,  $A+B=60^\circ$ ,  $\therefore$  由正弦定理可得:  $\frac{3}{\sin A} = \frac{1}{\sin(60^\circ - A)}$ ,

整理可得:  $\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos A - \frac{3}{2} \sin A$ , 可得:  $\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{5} \cos A$ ,

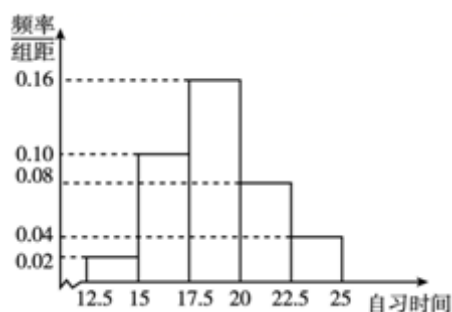
$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , 可解得:  $\cos A = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ ,

$\therefore$  由余弦定理可得:  $3^2 = AB^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times AB \times \frac{5\sqrt{13}}{26}$ , 整理可得:  $AB^2 - \frac{5\sqrt{13}}{13} AB - 8 = 0$ ,

$\therefore$  解得:  $AB = 2\sqrt{13}$ , 或  $-\frac{16\sqrt{13}}{13}$  (舍去).

答案:  $2\sqrt{13}$

11. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间(单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是[12.5, 25], 样本数据分组为[12.5, 15), [15, 17.5), [17.5, 20), [20, 22.5), [22.5, 25]. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 20 小时的人数是\_\_\_\_\_.



解析: 根据直方图, 得这 200 名学生中每周的自习时间不少于 20 小时的频率为  $(0.08+0.04) \times 2.5=0.3$ .

$\therefore$  这 200 名学生中每周的自习时间不少于 20 小时的人数是  $200 \times 0.3=60$ (人).

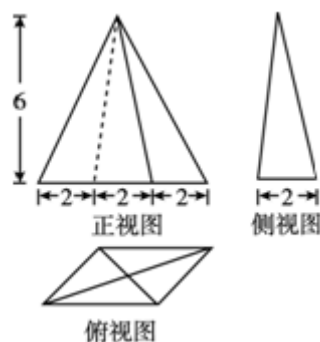
答案: 60

12. 已知  $x+y=3$ , 则  $2^x+2^y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

解析: 已知  $x+y=3$ , 则:  $2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^y} = 2\sqrt{2^{x+y}} = 2 \cdot \sqrt{2^3} = 4\sqrt{2}$ .

答案:  $4\sqrt{2}$

13. 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示(单位: m), 则该四棱锥的体积为\_\_\_\_\_  $m^3$ .



解析: 由主视图可知棱锥高为 6, 由俯视图和侧视图可知底面平行四边形的长为 4, 高为 2,

$\therefore$  四棱锥的体积  $V = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \times 6 = 16$ .



答案: 16

14. 刘老师带甲、乙、丙、丁四名学生去参加自主招生考试, 考试结束后刘老师和四名学生了解考试情况. 四名学生回答如下:

甲说: “我们四人都没考好.”

乙说: “我们四人中有人考得好.”

丙说: “乙和丁至少有一人没考好.”

丁说: “我没考好.”

结果四名学生中有两人说对了, 则这四名学生中说对了的是\_\_\_\_\_两人.

解析: 甲与乙的关系是对立事件, 二人说的话矛盾, 必有一对一错, 如果丁正确, 则丙也是对的, 所以丁错误, 可得丙正确, 此时, 乙正确.

答案: 乙、丙

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. 已知函数  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 x$ .

(I) 求  $f(\frac{\pi}{6})$  的值;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  上的最大值.

解析: (I) 将  $x = \frac{\pi}{6}$  带入计算即可.

(II) 利用和与差公式以及辅助角公式化简, 求解内层范围, 可得答案.

答 案 : (I) 由 题 意 ,

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \sin \frac{\pi}{2} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2};$$

(II) 由函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos 2x = \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} - \cos 2x - 1$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

$$\because x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right] \text{ 上, } \therefore 2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],$$

故当  $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$  时, 函数  $f(x)$  取得最大值为  $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ .

16. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是单调递增的等比数列, 且  $a_2 = b_2 = 3$ ,  $b_1 + b_3 = 10$ ,  $b_1 b_3 = a_5$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $c_n = \begin{cases} a_n & (n \leq 5), \\ b_n & (n > 5), \end{cases}$  求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.

解析: (I) 由  $\begin{cases} b_2 = 3, \\ b_1 + b_3 = 10, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b_1 = 1, \\ q = 3, \end{cases}$  由  $\begin{cases} a_2 = 3, \\ b_1 b_3 = a_5, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$  由此能求出  $a_n$ .

(II) 设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求出  $a_n=2n-1$ ,  $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$ , 由此能求出数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.

答案: (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ ,

$\because \{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是单调递增的等比数列, 且  $a_2=b_2=3$ ,  $b_1+b_3=10$ ,  $b_1b_3=a_5$ .

$$\therefore \text{由} \begin{cases} b_2 = 3, \\ b_1 + b_3 = 10, \end{cases} \text{得} \begin{cases} b_1q = 3, \\ b_1 + b_1q^2 = 10, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b_1 = 1, \\ q = 3, \end{cases} \text{由} \begin{cases} a_2 = 3, \\ b_1b_3 = a_5, \end{cases} \text{得} \begin{cases} a_1 + d = 3, \\ a_1 + 4d = 9, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases} \therefore a_n = 2n - 1.$$

(II) 设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,

由 (I) 可知  $a_n=2n-1$ ,  $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$ ,

$$\text{当 } n \leq 5 \text{ 时, } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2,$$

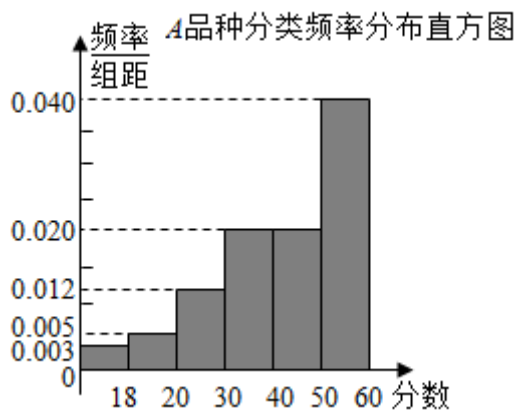
当  $n > 5$  时,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_6 + b_7 + \dots + b_n = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} + \frac{b_6(1 - q^{n-5})}{1 - q} = 25 + \frac{3^n - 243}{2} = \frac{3^n - 193}{2}.$$

$$\text{综上所述, 数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \begin{cases} n^2, & n \leq 5, \\ \frac{3n - 193}{2}, & n > 5. \end{cases}$$

17. 为了解市民对 A, B 两个品牌共享单车使用情况的满意程度, 分别从使用 A, B 两个品牌单车的市民中随机抽取了 100 人, 对这两个品牌的单车进行评分, 满分 60 分. 根据调查, 得到 A 品牌单车评分的频率分布直方图, 和 B 品牌单车评分的频数分布表:

分数区间	频数
[0, 10)	1
[10, 20)	3
[20, 30)	6
[30, 40)	15
[40, 50)	40
[50, 60]	35





根据用户的评分，定义用户对共享单车评价的“满意度指数”如下：

评分	[0, 30)	[30, 50)	[50, 60]
满意度指数	0	1	2

- (I) 求对 A 品牌单车评价“满意度指数”为 0 的人数；  
 (II) 从该市同时使用 A, B 两个品牌单车的用户中随机抽取 1 人进行调查，试估计其对 A 品牌单车评价的“满意度指数”比对 B 品牌单车评价的“满意度指数”高的概率；  
 (III) 如果从 A, B 两个品牌单车中选择一个出行，你会选择哪一个？说明理由。

解析：(I) 由对 A 品牌单车评分的频率分布直方图，求出对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的频率，由此能求出对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的人数。

(II) 设“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’比对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’高”为事件 C，设“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’为 1”为事件  $A_1$ ，“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’为 2”为事件  $A_2$ ，“对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’为 0”为事件  $B_0$ ，“对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’为 1”为事件  $B_1$ ，用频率估计概率，根据相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式能求出该用户对 A 品牌单车评价的“满意度指数”比对 B 品牌单车评价的“满意度指数”高的概率。

(III) 如果从用户对 A、B 两个品牌评价的“满意度指数”的期望角度看，分别求出 A、B 品牌“满意度指数”的分布列和期望，由  $E(X) < E(Y)$ ，得选择 B 品牌的单车出行。

答案：(I) 由对 A 品牌单车评分的频率分布直方图，得：

对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的频率为  $(0.003+0.005+0.012) \times 10=0.2$ ，

$\therefore$  对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的人数为  $100 \times 0.2=20$  人。

(II) 设“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’比对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’高”为事件 C，

设“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’为 1”为事件  $A_1$ ，

“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’为 2”为事件  $A_2$ ，

“对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’为 0”为事件  $B_0$ ，

“对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’为 1”为事件  $B_1$ ，

用频率估计概率得：

$$P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.4, P(B_0)=\frac{1+3+6}{100}=0.1, P(B_1)=\frac{14+40}{100}=0.55,$$

$\therefore$  事件  $A_i$  与  $B_j$  相互独立，其中  $i, 2, j=0, 1$ ，

$\therefore P(C)=P(A_1B_0+A_2B_0+A_2B_1)=0.4 \times 0.1+0.4 \times 0.1+0.4 \times 0.55=0.3$ 。

$\therefore$  该用户对 A 品牌单车评价的“满意度指数”比对 B 品牌单车评价的“满意度指数”高的概率为 0.3。

(III) 如果从用户对 A、B 两个品牌评价的“满意度指数”的期望角度看，

A 品牌“满意度指数” X 的分布列为：

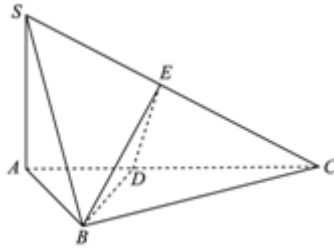
X	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

B 品牌“满意度指数” Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	0.1	0.55	0.35

$\therefore E(X) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4 = 1.2$ ,  
 $E(Y) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.55 + 2 \times 0.35 = 1.25$ ,  
 $E(X) < E(Y)$ ,  $\therefore$  会选择 B 品牌的单车出行.

18. 如图, 在三棱锥 S-ABC 中,  $SA \perp$  底面 ABC,  $AB \perp BC$ , 又  $SA=AB=1$ ,  $SB=BC$ .



- (I) 求证: 平面 SBC  $\perp$  平面 SAB;  
 (II) 如果 DE 垂直平分 SC, 且分别交 AC、SC 于 D、E. 求证:  $SC \perp$  平面 BDE;  
 (III) 在第 (II) 问的条件下, 求三棱锥 E-BCD 的体积.

解析: (I) 由  $SA \perp$  底面 ABC, 得  $SA \perp BC$ , 结合  $AB \perp BC$ , 可得  $BC \perp$  平面 SAB, 进一步得到平面 SBC  $\perp$  平面 SAB;

(II) 由 (I) 知, 三角形 SBC 为等腰直角三角形, 结合已知可得  $SC=2$ , 再由 E 为 SC 的中点, 可得  $BE \perp SC$ . 又  $DE \perp SC$ , 由线面垂直的判定可得  $SC \perp$  平面 BDE;

(III) 由 (II) 知,  $SC \perp$  平面 BDE, 则  $SC \perp BD$ , 又  $SA \perp$  底面 ABC, 得  $SA \perp BD$ , 可得  $BD \perp$  平面 SAC, 即  $BD \perp AC$ , 然后利用等积法求三棱锥 E-BCD 的体积.

答案: (I)  $\because SA \perp$  底面 ABC,  $BC \subset$  平面 ABC,  $\therefore SA \perp BC$ ,  
又  $AB \perp BC$ ,  $SA \cap AB = A$ ,

$\therefore BC \perp$  平面 SAB, 则平面 SBC  $\perp$  平面 SAB;

(II) 由 (I) 知, 三角形 SBC 为等腰直角三角形,

又  $SB=BC=\sqrt{2}$ ,  $\therefore SC=2$ ,

又 E 为 SC 的中点,  $\therefore BE \perp SC$ .

又  $DE \perp SC$ ,  $DE \cap BE = E$ ,  $\therefore SC \perp$  平面 BDE;

(III) 由 (II) 知,  $SC \perp$  平面 BDE, 又  $BD \subset$  平面 SAC,  $\therefore SC \perp BD$ ,

又  $SA \perp$  底面 ABC,  $BD \subset$  平面 ABC,  $\therefore SA \perp BD$ ,

又  $SA \cap SC = S$ ,  $\therefore BD \perp$  平面 SAC,

$$\therefore BD \perp AC, \therefore BD = \frac{\sqrt{6}}{3}, CD = \frac{2\sqrt{3}}{3}, DE = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{E-BCD} = V_{B-CDE} = \frac{1}{3} S_{\square CDE} \cdot BD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

∴三棱锥 E-BCD 的体积为  $\frac{\sqrt{2}}{18}$ .

19. 已知函数  $f(x) = x(\ln x - 1) + \ln x + 1$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若不等式  $x^2 + x(m - f'(x)) + 1 \geq 0$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

解析: (I) 求出函数的导数, 计算  $f'(1)$ ,  $f(1)$  的值, 求出切线方程即可;

(II) 求出函数的导数, 问题等价于  $m \geq \ln x - x$ , 令  $g(x) = \ln x - x$ , 根据函数的单调性求出  $m$  的范围即可.

答案: (I) ∵  $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ , 故  $f'(1) = 1$ , 又  $f(1) = 0$ ,

故切线方程是  $y = x - 1$ , 即  $x - y - 1 = 0$ ;

(II) 由 (I) 知  $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,

故不等式  $x^2 + x(m - f'(x)) + 1 \geq 0$  可化为:  $x^2 + mx - x \ln x \geq 0$ , 而  $x > 0$ ,

故上式等价于  $m \geq \ln x - x$ ,

令  $g(x) = \ln x - x$ , 则  $g'(x) = \frac{1-x}{x}$ ,

当  $g'(x) = 0$  时,  $x = 1$ ,

则  $x$ ,  $g'(x)$ ,  $g(x)$  的变化如下:

$x$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	递增	极大值	递减

故  $x = 1$  是  $g(x)$  的最大值点, 即  $g(x) \leq g(1) = -1$ , 故  $m \geq -1$ ,

综上, 实数  $m$  的范围是  $[-1, +\infty)$ .

20. 已知椭圆 E:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 两点  $P_1(0, \sqrt{3})$ ,  $P_2(1, -\frac{3}{2})$  在椭圆上.

(I) 求椭圆 E 的方程及焦点坐标;

(II) 设直线  $l$  不经过点  $P_1(0, \sqrt{3})$  且与椭圆 E 相交于 M, N 两点, 直线  $P_1M$  与直线  $P_1N$  的斜

率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $k_1 + k_2 = -\sqrt{3}$ . 求证: 直线  $l$  恒过某定点.

解析: (I) 将两点代入即可求得  $a$  和  $b$  的值, 求得椭圆方程及焦点坐标;

(II) 分类讨论, 当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的方程, 代入椭圆方程, 利用韦达定理及直线的斜率公式, 即可求得  $m = -2k - \sqrt{3}$ , 即可证明直线  $l$  恒过定点.

答案：(I)由题意可知： $b=\sqrt{3}$ ，由  $P_2(1, -\frac{3}{2})$  在椭圆上，代入，解得  $a=2$ ， $c^2=a^2-b^2=3$ ，

$\therefore$  椭圆 E 的方程： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，则焦点坐标  $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ；

(II)①当直线 l 斜率不存在时，设 l 的方程： $x=t (t \neq 0)$ ， $M(t, y_M)$ ， $N(t, -y_M)$ ，

则  $k_1 + k_2 = \frac{y_M - \sqrt{3}}{t} + \frac{-y_M - \sqrt{3}}{t} = -\sqrt{3}$ ，解得  $t=2$ ，

此时直线过椭圆 E 的右顶点，不存两个交点，所以这种情况不成立，

②当直线 l 斜率存在时，设 l： $y=kx+m$ ，( $m \neq \sqrt{3}$ )，设  $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

由题意可知： $k \neq 0$ ， $m \neq -\sqrt{3}$ ，

联立  $\begin{cases} y = kx + m, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$  整理得： $(3+4k^2)x + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ ，

$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{4m^2-12}{3+4k^2}$ ，( $m \neq \pm\sqrt{3}$ )， $x_1 \neq 0$ ， $x_2 \neq 0$ ，

则  $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1} + \frac{y_2 - \sqrt{3}}{x_2} = \frac{x_2(kx_1 + m) - \sqrt{3}x_2 + x_1(kx_2 + m) - \sqrt{3}x_1}{x_1x_2}$

$= \frac{2kx_1x_2 + (m - \sqrt{3})(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = 2k + (m - \sqrt{3}) \times \frac{-\frac{8km}{3+4k^2}}{\frac{4m^2-12}{3+4k^2}} = \frac{2\sqrt{3}k}{m + \sqrt{3}}$ ，

$\therefore \frac{2\sqrt{3}k}{m + \sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ ，整理得  $m = -2k - \sqrt{3}$ ，此时  $\Delta = -192\sqrt{3}k$ ，存在 k 使得  $\Delta > 0$ ，

$\therefore$  直线 l 的方程为： $y = kx - 2k - \sqrt{3} = k(x - 2) - \sqrt{3}$ ，当  $x=2$ ， $y=-\sqrt{3}$ ，

$\therefore$  直线 l 恒过定点  $(2, -\sqrt{3})$ 。